

Formulário para Transferência de Calor e Massa I

Profs. Vicente/Santiago

FEB/UNESP-Bauru

Balanco de energia

$$\dot{E}_{Ac} = \dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_G$$

- para um corpo a temperatura uniforme: $\dot{E}_{Ac} = \rho \cdot V \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$
- Lei de Fourier para a condução na direção x : $\dot{q}_{cond} = -k \cdot A_s \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$
- geração de energia uniforme: $\dot{E}_G = \dot{q} \cdot V$

Equação Diferencial e Condições de Contorno

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k}$$

Tipo	Condição padrão	Expressão para posição $x = x_0$
1ª espécie	Temperatura especificada	$T(x_0) = T_i$
2ª espécie	Fluxo de calor determinado	$q''(x_0) = -k \left. \frac{dT}{dx} \right _{x_0} = q_i'' \Rightarrow \left. \frac{dT}{dx} \right _{x_0} = -\frac{q_i''}{k}$
3ª espécie	Troca de calor por convecção	$-k \left. \frac{dT}{dx} \right _{x_0} = h \cdot (T(x_0) - T_\infty)$ ou $h \cdot (T_\infty - T(x_0))$ Observações: • Temperaturas na convecção devem considerar o sentido de q positivo. • Coeficiente global ou relação de resistência térmica podem modificar a implementação desta condição. ($h \rightarrow U$)

Condução Unidimensional e Sistemas com Geração de Energia

	Plana	Cilíndrica	Esférica
Condução – R_t	$\frac{L}{KA}$	$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL}$	$\frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$
Ger. Energia	$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$
- Geral	$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2k} + C_1x + C_2$	$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln(r) + C_2$	$T(r) = -\frac{\dot{q} \cdot r^2}{6 \cdot k} - \frac{C_1}{r} + C_2$
$-T_p$ dada	$T = \frac{\dot{q}L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) +$ $\frac{T_{s+} - T_{s-}}{2} \cdot \frac{x}{L} + \frac{T_{s+} + T_{s-}}{2}$	$T = \frac{\dot{q}R^2}{4 \cdot k} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + T_{sup}$	$T(r) = \frac{\dot{q} \cdot R^2}{6 \cdot k} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + T_s$

Resistência Térmica de Convecção: $R_c = 1/(h \cdot A)$

Fluxo de Calor por Radiação: $q = \epsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_s^4 - T_{viz}^4) = h_r A (T_s - T_{viz})$ sendo:
 $h_r = \epsilon \cdot \sigma \cdot (T_s^2 + T_{viz}^2) \cdot (T_s + T_{viz})$ e T_s, T_{viz} em escala absoluta.

Area Superficial (A_c) e volume(V):

- Cilindro: $A_c = \pi \cdot D \cdot L / V = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot L$
- Esfera: $A_c = 4 \cdot \pi \cdot R^2 / V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

Superfícies Estendidas

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0 \quad \text{sendo que} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot h}{k \cdot t}} \text{ se } W \gg t \quad \text{e} \quad \theta = T - T_\infty,$$

$$\text{Solução Geral: } \theta = C_1 \exp(mx) + C_2 \exp(-mx) = C'_1 \sinh[m(L-x)] + C'_2 \cosh[m(L-x)]$$

Soluções usuais

Ponta da aleta	Perfil de Temperatura	Calor Dissipado
com convecção	$\theta_b \cdot \frac{\cosh[m(L-x)] + (h/mk) \sinh[m(L-x)]}{\cosh(m \cdot L) + (h/mk) \sinh(m \cdot L)}$	$\sqrt{h \cdot P \cdot k \cdot A} \cdot \theta_b \frac{\sinh(m \cdot L) + (h/mk) \cosh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L) + (h/mk) \sinh(m \cdot L)}$
com isolamento	$\theta_b \cdot \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(m \cdot L)}$	$\sqrt{h \cdot P \cdot k \cdot A} \cdot \theta_b \cdot \tanh(m \cdot L)$
temperatura dada	$\frac{\theta_L \sinh(m \cdot x) + \theta_b \sinh[m(L-x)]}{\sinh(m \cdot L)}$	$\sqrt{h \cdot P \cdot k \cdot A} \frac{\theta_b \cosh(m \cdot L) - \theta_L}{\sinh(m \cdot L)}$
infinita ($m \cdot L > 2,65$)	$\theta_b \cdot \exp(-m \cdot x)$	$\sqrt{h \cdot P \cdot k \cdot A} \cdot \theta_b$

Comprimento corrigido

$$L_c = L + \Delta L_c \text{ sendo } \Delta L_c = \frac{A}{P} \approx \frac{t}{2} \text{ se } W \gg t$$

Definição do rendimento de uma aleta:

$$\eta = \frac{q_{\text{real}}}{q_{\text{ideal}}} = \frac{q_{\text{diss}}}{h \cdot A_{\text{conv}} \cdot \theta_b} \quad \text{e a resistência térmica de uma aleta: } R_{al} = \underbrace{\frac{\theta_b}{q}}_{\text{tabela}} = \frac{1}{\eta \cdot h \cdot A_{\text{conv}}}$$

Para uma aleta de ponta adiabática ($L_c = L$) ou usando o comprimento corrigido, o rendimento pode ser calculado pela expressão:

$$\eta = \frac{\tanh(m \cdot L_c)}{m \cdot L_c}$$

Gráfico do η de Aletas Triangulares, Parabólicas e Cônicas

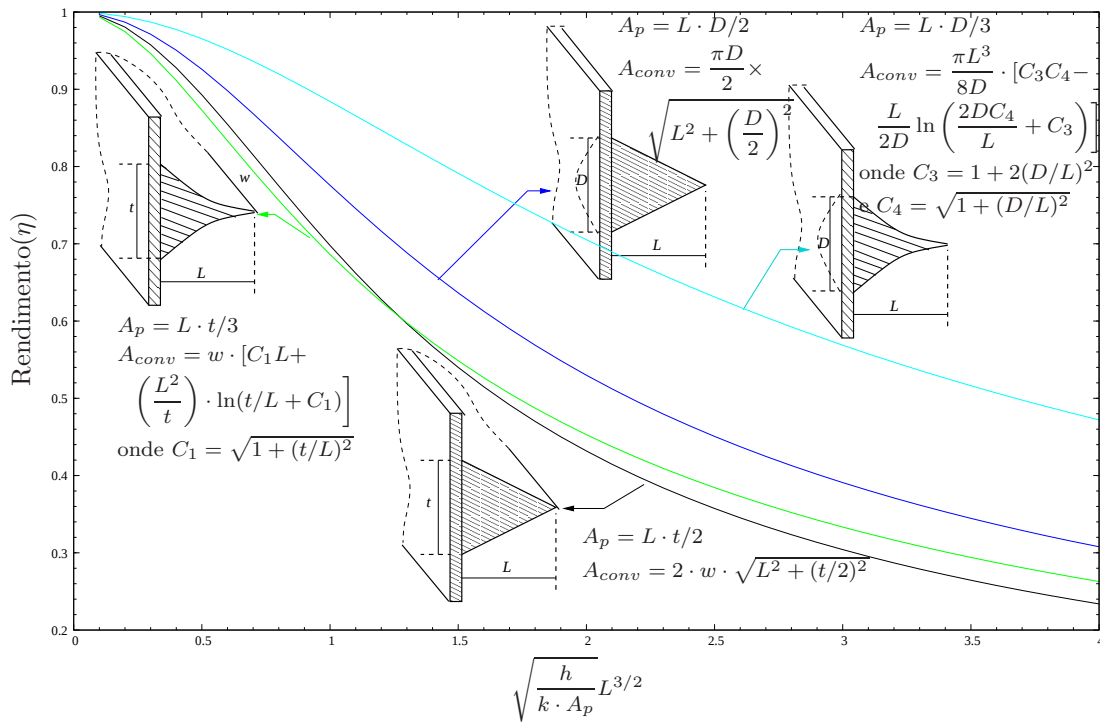


Gráfico do η de Aletas circunferenciais

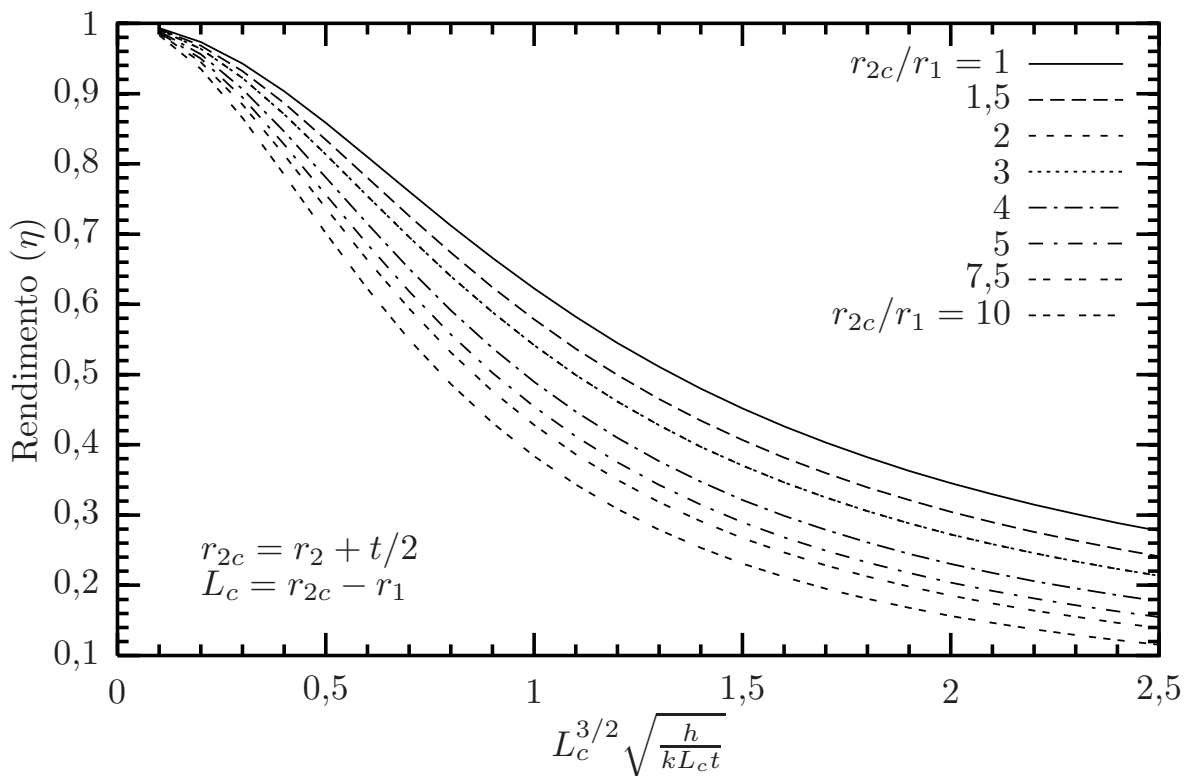
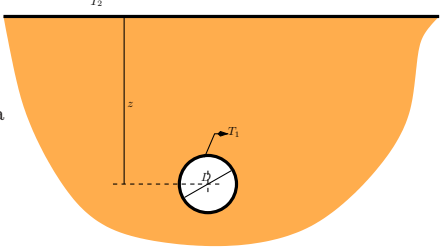
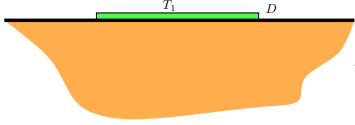
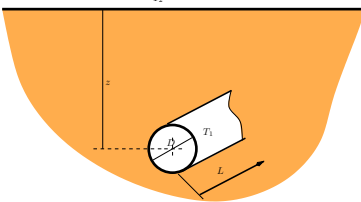
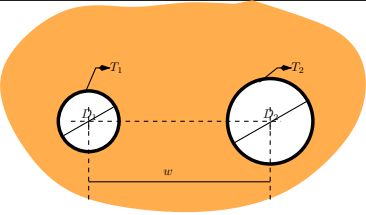
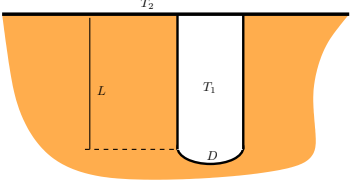
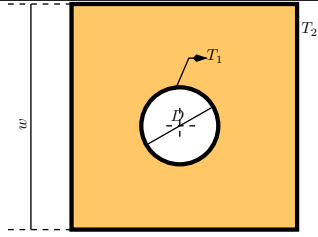
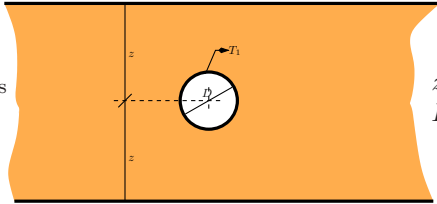
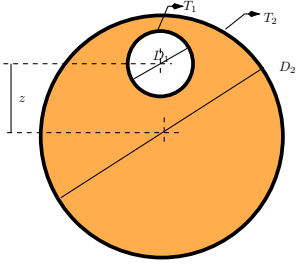
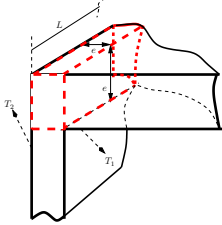
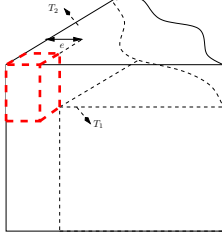


Tabela de Fatores de Forma na condução

Cálculo de Fluxo de Calor: $q = k \cdot S \cdot (T_2 - T_1)$ ou ainda $R_{term} = \frac{1}{k \cdot S}$

Geometria	Figura	Condições	Fator de Forma na Condução
Esfera enterrada em um meio		$z > D/2$	$S = \frac{2 \cdot \pi \cdot D}{1 - D/(4 \cdot z)}$
Disco sobre uma superfície semi-infinita		-	$S = 2 \cdot D$
Cilindro de comprimento L num meio semi-infinito		$L \gg D$	$S = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\cosh^{-1}(2 \cdot z/D)}$
Dois cilindros espaçados em um meio		$L \gg (D_1, D_2)$ $L \gg w$	$S = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4 \cdot w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2 \cdot D_1 \cdot D_2}\right)}$
Cilindro Vertical em meio semi-infinito		$L \gg D$	$S = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln(4 \cdot L/D)}$
Cilindro de comprimento L no interior de quadrado sólido		$w > D$ $L \gg w$	$S = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln(1,08w/D)}$
Cilindro entre dois planos		$z \gg D/2$ $L \gg z$	$S = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln[8 \cdot z/(\pi \cdot D)]}$

Geometria	Figura	Condições	Fator de Forma na Condução
Cilindro em um cilindro maior		$D_2 > D_1$ $L \gg D_2$	$S = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\cosh^{-1} \left(\frac{D_2^2 + D_1^2 - 4 \cdot z^2}{2 \cdot D_1 \cdot D_2} \right)}$
Aresta de uma caixa ou duto quadrado L no interior de quadrado sólido		$e < L/5$	$S = 0,54 \cdot e$
Vértice de uma caixa		$e \ll \text{aresta}$	$S = 0,15 \cdot e$

Análise Transiente

Formulação concentrada ($Bi = h \cdot (V/A)/k < 0,1$)

$$Bi \cdot Fo = \frac{h \cdot A_{sup} \cdot t}{\rho \cdot V \cdot c} = \frac{t}{\tau} \quad \text{e a solução:} \quad \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp(-Bi \cdot Fo) \quad \text{e ainda} \quad \frac{Q(t)}{Q_0} = 1 - \theta^*(t)$$

Formulação distribuída ($Fo \geq 0,2 \rightarrow 1^o$ termo da série é suficiente)

	Plana	Cilíndrica	Esférica
Temperaturas	$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \cos(\zeta_1 \cdot x^*)$	$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) J_0(\zeta_1 \cdot r^*)$	$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \frac{\text{sen}(\zeta_1 \cdot r^*)}{\zeta_1 \cdot r^*}$
Equação de ζ	$\zeta \cdot \tan(\zeta) = Bi$	$\zeta \frac{J_1(\zeta)}{J_0(\zeta)} = Bi$	$1 - \frac{\zeta}{\tan(\zeta)} = Bi$
Constante C_1	$C_1 = \frac{4 \text{sen}(\zeta_1)}{2\zeta_1 + \text{sen}(2\zeta_1)}$	$C_1 = \frac{2}{\zeta_1} \cdot \frac{J_1(\zeta_1)}{J_0^2(\zeta_1) + J_1^2(\zeta_1)}$	$C_1 = \frac{4[\text{sen}(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1)]}{2\zeta_1 - \text{sen}(2\zeta_1)}$
Energia Transferida	$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\text{sen}(\zeta_1)}{\zeta_1} \theta_{r=0}^*$	$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2 \cdot \theta_{r=0}^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1)$	$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3 \cdot \theta_{r=0}^*}{\zeta_1^3} [\text{sen}(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1)]$

$$\text{sendo:} \quad \theta^* = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}, Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \text{ ou } \frac{\alpha t}{R^2}, Bi = \frac{h \cdot L}{k} \text{ ou } \frac{h \cdot R}{k}, \alpha = \frac{k}{\rho \cdot c}, x^* = \frac{x}{L} \quad \text{e ainda} \quad r^* = \frac{r}{R},$$

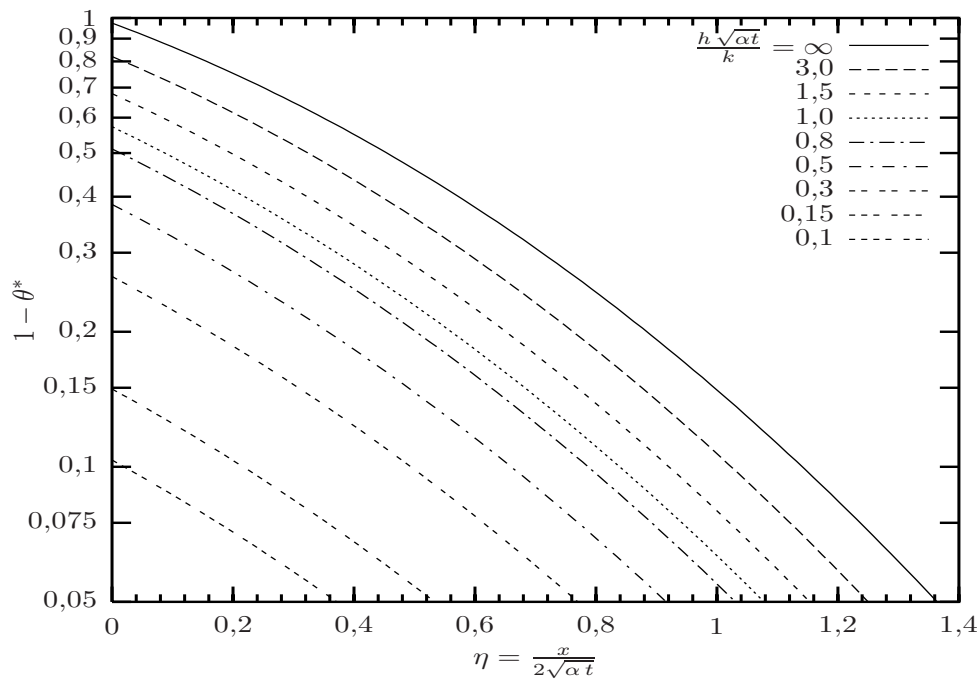
Tabela com o primeiro valor de ζ_1 e a constante C_1 , em geometrias:

Número de Biot	Plana		Cilíndrica		Esférica	
	ζ_1	C_1	ζ_1	C_1	ζ_1	C_1
0,01	0,09983	1,0017	0,1412	1,0025	0,173	1,003
0,05	0,2218	1,0082	0,3143	1,0124	0,3854	1,015
0,1	0,3111	1,0161	0,4417	1,0246	0,5423	1,0298
0,2	0,4328	1,0311	0,617	1,0483	0,7593	1,0592
0,5	0,6533	1,0701	0,9408	1,1143	1,166	1,1441
1	0,8603	1,1191	1,256	1,2071	1,571	1,2732
2	1,077	1,1785	1,599	1,3384	2,029	1,4793
5	1,314	1,2402	1,99	1,5029	2,57	1,787
10	1,429	1,262	2,179	1,5677	2,836	1,9249
20	1,496	1,2699	2,288	1,5919	2,986	1,9781
100	1,555	1,2731	2,381	1,6015	3,11	1,999
∞	1,569	1,2732	2,402	1,602	3,138	2

Tabela com os valores de função de Bessel de primeira espécie

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0	1	0	0,8	0,846287	0,368842	1,6	0,455402	0,569896
0,1	0,997502	0,0499375	0,9	0,807524	0,40595	1,7	0,397985	0,577765
0,2	0,990025	0,0995008	1	0,765198	0,440051	1,8	0,339986	0,581517
0,3	0,977626	0,148319	1,1	0,719622	0,470902	1,9	0,281819	0,581157
0,4	0,960398	0,196027	1,2	0,671133	0,498289	2	0,223891	0,576725
0,5	0,93847	0,242268	1,3	0,620086	0,522023	2,1	0,166607	0,568292
0,6	0,912005	0,286701	1,4	0,566855	0,541948	2,2	0,110362	0,555963
0,7	0,881201	0,328996	1,5	0,511828	0,557937	2,3	0,0555398	0,539873

Perfil de Temperaturas - Meio Semi-Infinito



Trocas de Calor por Radiação

- Emissão de um corpo negro:

$$E_{CN} = \sigma \cdot T^4 \text{ sendo } \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4 \text{ e } T \text{ em K.}$$

- Propriedades dos Fatores de forma:

Reciprocidade

Fechamento

Somatória

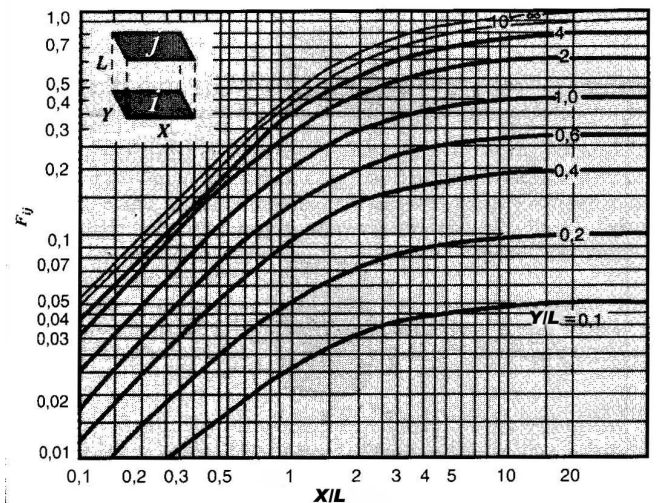
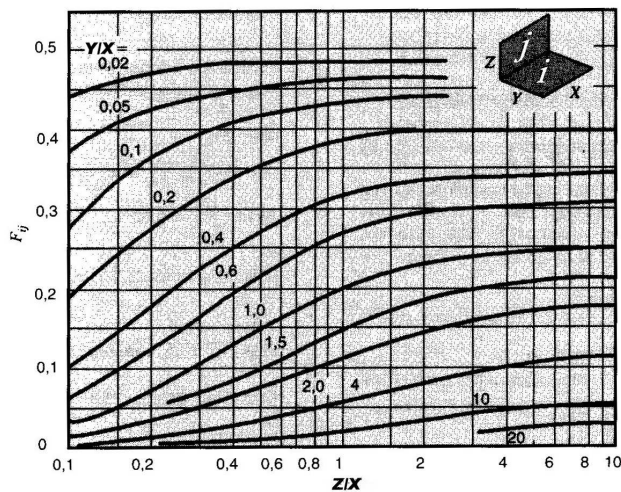
$$A_i \cdot F_{i,j} = A_j \cdot F_{j,i} \qquad \sum_{j=1}^n F_{i,j} = 1 \qquad A_i = \sum_{k=1}^l A_k \Rightarrow A_i \cdot F_{i,j} = \sum_{k=1}^l A_k \cdot F_{k,j}$$

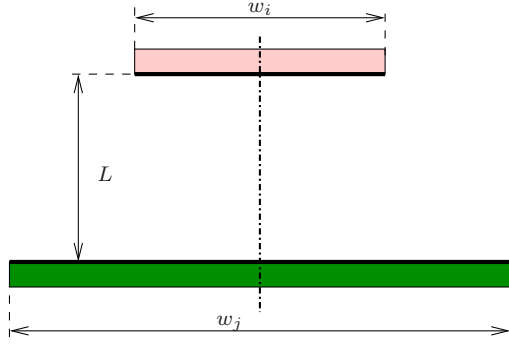
- Resistências térmicas para corpos cinzas:

$$\text{Energia total: } q_i = \frac{J_i - E_{CN,i}}{R_i} \text{ sendo } R_i = \frac{1 - \epsilon_i}{\epsilon_i \cdot A_i}$$

$$\text{Troca entre corpos: } q_{i,j} = \frac{J_i - J_j}{R_{i,j}} \text{ sendo } R_{i,j} = \frac{1}{A_i \cdot F_{i,j}}$$

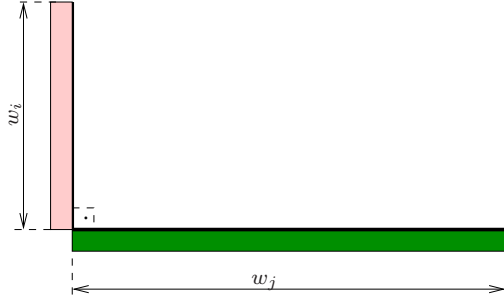
Cálculos e gráficos do Fator de Forma



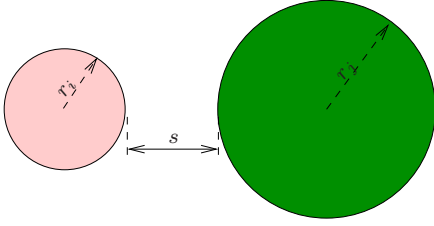


$$F_{i,j} = \frac{\sqrt{(W_i + W_j)^2 + 4} - \sqrt{(W_j - W_i)^2 + 4}}{2W_i}$$

$$W_i = w_i/L \text{ e } W_j = w_j/L$$



$$F_{i,j} = \frac{w_i + w_j - \sqrt{w_i^2 + w_j^2}}{2w_i}$$



$$R_j = r_j/r_i$$

$$S = s/r_i$$

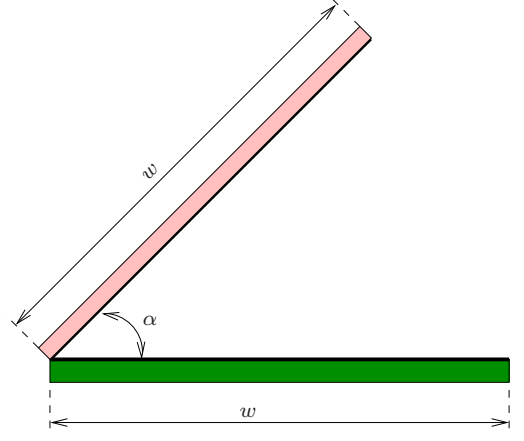
$$C = 1 + R + S$$

$$F_{i,j} = \frac{1}{2\pi} \left[\pi + \sqrt{C^2 - (R+1)^2} - \right.$$

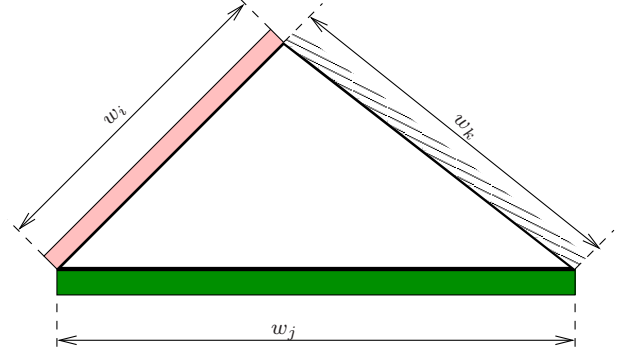
$$\left. \sqrt{C^2 - (R-1)^2} + \right.$$

$$(R-1)\text{ArcCos}\left(\frac{R}{C} - \frac{1}{C}\right) -$$

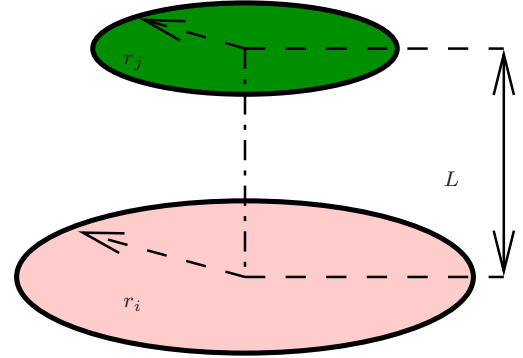
$$\left. (R+1)\text{ArcCos}\left(\frac{R}{C} + \frac{1}{C}\right) \right]$$



$$F_{i,j} = 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



$$F_{i,j} = \frac{w_i + w_j - w_k}{2w_i}$$



$$R_i = r_i/L$$

$$R_j = r_j/L$$

$$S = 1 + \frac{1 + R_j^2}{R_i^2}$$

$$F_{i,j} = \frac{1}{2} \cdot \left[S - \sqrt{S^2 - 4 \left(\frac{R_j}{R_i} \right)^2} \right]$$