ABORDAGEM PADRÃO: TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NA BASE DA ALETA

CASO A – EXTREMIDADE COM CONVECÇÃO

$$hA_{tr}\left[T(x=L)-T_\infty\right]=-kA_{tr}\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}\Rightarrow h\theta(x=L)=-k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} \tag{1}$$

$$\theta(x=0)=T_b-T_\infty=\theta_b \tag{2}$$

A solução geral da equação $\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$ é:

$$\theta(x)=C_1e^{mx}+C_2e^{-mx} \tag{3}$$

Aplicando a solução geral na equação (1) obtém-se:

$$h\left(C_1e^{mL}+C_2e^{-mL}\right)=-k\left(mC_1e^{mL}-mC_2e^{-mL}\right) \tag{4}$$

Aplicando a solução geral na equação (2) obtém-se:

$$\theta(x=0)=C_1e^{m.0}+C_2e^{-m.0}=C_1+C_2=\theta_b\Rightarrow C_1=\theta_b-C_2 \tag{5}$$

Com as equações (4) e (5) pode-se obter as constantes C_1 e C_2 :

$$\begin{aligned}
&h\left[(\theta_b-C_2)e^{mL}+C_2e^{-mL}\right]=-mk\left[(\theta_b-C_2)e^{mL}-C_2e^{-mL}\right]\\
&h\theta_be^{mL}-hC_2e^{mL}+hC_2e^{-mL}=-mk\theta_be^{mL}+mkC_2e^{mL}+mkC_2e^{-mL}\\
&C_2\left(he^{-mL}-he^{mL}-mke^{mL}-mke^{-mL}\right)=-mk\theta_be^{mL}-h\theta_be^{mL}\\
&C_2=\frac{-mk\theta_be^{mL}-h\theta_be^{mL}}{he^{-mL}-he^{mL}-mke^{mL}-mke^{-mL}}
\end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo a expressão de C_2 na equação (5):

$$\begin{aligned}
&C_1=\theta_b-C_2=\theta_b-\left[\frac{-mk\theta_be^{mL}-h\theta_be^{mL}}{he^{-mL}-he^{mL}-mke^{mL}-mke^{-mL}}\right]\\
&C_1=\frac{\theta_b\left(he^{-mL}-he^{mL}-mke^{mL}-mke^{-mL}\right)+mk\theta_be^{mL}+h\theta_be^{mL}}{he^{-mL}-he^{mL}-mke^{mL}-mke^{-mL}}\\
&C_1=\frac{h\theta_be^{-mL}-h\theta_be^{mL}-mk\theta_be^{mL}-mk\theta_be^{-mL}+mk\theta_be^{mL}+h\theta_be^{mL}}{he^{-mL}-he^{mL}-mke^{mL}-mke^{-mL}}\\
&C_1=\frac{h\theta_be^{-mL}-mk\theta_be^{-mL}}{he^{-mL}-he^{mL}-mke^{mL}-mke^{-mL}}
\end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na equação (3) obtém-se:

$$\theta(x) = \left[\frac{h\theta_b e^{-mL} - mk\theta_b e^{-mL}}{he^{-mL} - he^{mL} - mke^{mL} - mke^{-mL}}\right]e^{mx} + \left[\frac{-mk\theta_b e^{mL} - h\theta_b e^{mL}}{he^{-mL} - he^{mL} - mke^{mL} - mke^{-mL}}\right]e^{-mx}$$

$$\theta(x) = \frac{h\theta_b e^{-mL+mx} - mk\theta_b e^{-mL+mx} - mk\theta_b e^{mL-mx} - h\theta_b e^{mL-mx}}{he^{-mL} - he^{mL} - mke^{mL} - mke^{-mL}}$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{h\left(e^{-m(L-x)} - e^{m(L-x)}\right) - mk\left(e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)}\right)}{h\left(e^{-mL} - e^{mL}\right) - mk\left(e^{mL} + e^{-mL}\right)} \qquad (8)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{h\left(\frac{e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)}}{2}\right) + mk\left(\frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{2}\right)}{h\left(\frac{e^{mL} - e^{-mL}}{2}\right) + mk\left(\frac{e^{mL} + e^{-mL}}{2}\right)}$$

Sabe-se que $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\mathrm{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ de tal forma que:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{h\,\mathrm{senh}\,m(L-x) + mk\cosh m(L-x)}{h\,\mathrm{senh}\,mL + mk\cosh mL} \qquad (9)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/mk)\mathrm{senh}\,m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk)\mathrm{senh}\,mL} \qquad (10)$$

A taxa de transferência de calor q_a pode ser calculada pela lei de Fourier aplicada na base da aleta:

$$q_a = -kA_{tr}\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -kA_{tr}\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} \qquad (11)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1e^{mx} - mC_2e^{-mx} \Rightarrow \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = mC_1e^{m.0} - mC_2e^{-m.0} = m(C_1 - C_2) \qquad (12)$$

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na equação (12) obtém-se:

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = m\left(\frac{h\theta_b e^{-mL} - mk\theta_b e^{-mL}}{he^{-mL} - he^{mL} - mke^{mL} - mke^{-mL}} - \frac{-mk\theta_b e^{mL} - h\theta_b e^{mL}}{he^{-mL} - he^{mL} - mke^{mL} - mke^{-mL}}\right)$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = m\left(\frac{h\theta_b e^{-mL} - mk\theta_b e^{-mL} + mk\theta_b e^{mL} + h\theta_b e^{mL}}{he^{-mL} - he^{mL} - mke^{mL} - mke^{-mL}}\right)$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = m\theta_b\left[\frac{h\left(e^{-mL} + e^{mL}\right) + mk\left(e^{mL} - e^{-mL}\right)}{h\left(e^{-mL} - e^{mL}\right) - mk\left(e^{mL:} + e^{-mL}\right)}\right]$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -m\theta_b \left[\frac{h\left(\dfrac{e^{mL}+e^{-mL}}{2}\right)+mk\left(\dfrac{e^{mL}-e^{-mL}}{2}\right)}{h\left(\dfrac{e^{mL}-e^{-mL}}{2}\right)+mk\left(\dfrac{e^{mL:}+e^{-mL}}{2}\right)} \right]$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -m\theta_b \frac{h\cosh mL + mk\,\mathrm{sen}hmL}{h\,\mathrm{sen}hmL + mk\cosh mL} \tag{13}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -m\theta_b \frac{\mathrm{sen}hmL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\mathrm{sen}hmL}$$

Assim, substituindo a expressão resultante (13) na equação (11) obtém-se:

$$q_a = -kA_{tr}\left[-m\theta_b \frac{\mathrm{sen}hmL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\mathrm{sen}hmL} \right]$$

$$q_a = kA_{tr} m\theta_b \frac{\mathrm{sen}hmL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\mathrm{sen}hmL} \tag{14}$$

Sabe-se que $m = \sqrt{\dfrac{hP}{kA_{tr}}}$ de tal forma que:

$$q_a = kA_{tr}\sqrt{\frac{hP}{kA_{tr}}}\theta_b \frac{\mathrm{sen}hmL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\mathrm{sen}hmL}$$

$$q_a = \sqrt{\frac{hP(kA_{tr})^2}{kA_{tr}}}\theta_b \frac{\mathrm{sen}hmL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\mathrm{sen}hmL} \tag{15}$$

$$q_a = \sqrt{hPKA_{tr}}\,\theta_b \frac{\mathrm{sen}hmL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\mathrm{sen}hmL}$$

onde $M = \sqrt{hPkA_{tr}}\,\theta_b$. Assim, tem-se que:

$$q_a = M \frac{\mathrm{sen}hmL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\mathrm{sen}hmL} \tag{16}$$

Assim, para condição de convecção na extremidade da aleta os seguintes resultados foram obtidos:

Distribuição de temperaturas: $\dfrac{\theta(x)}{\theta_b} = \dfrac{T(x)-T_\infty}{T_b - T_\infty} = \dfrac{\cosh m(L-x) + (h/mk)\mathrm{sen}hm(L-x)}{\cosh mL + (h/mk)\mathrm{sen}hmL}$

Taxa de transferência de calor: $q_a = M \dfrac{\mathrm{sen}hmL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\mathrm{sen}hmL}$

CASO B – EXTREMIDADE ADIABÁTICA

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} \tag{1}$$

$$\theta(x=0) = T_b - T_\infty = \theta_b \tag{2}$$

A solução geral da equação $\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$ é:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \tag{3}$$

Aplicando a solução geral na equação (1) obtém-se:

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx} \Rightarrow \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = m\left(C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL}\right) = 0 \Rightarrow C_1 e^{mL} = C_2 e^{-mL} \tag{4}$$

Aplicando a solução geral na equação (2) obtém-se:

$$\theta(x=0) = C_1 e^{m.0} + C_2 e^{-m.0} = C_1 + C_2 = \theta_b \Rightarrow C_1 = \theta_b - C_2 \tag{5}$$

Com as equações (4) e (5) pode-se obter as constantes C_1 e C_2:

$$\begin{aligned} &(\theta_b - C_2)e^{mL} = C_2 e^{-mL} \\ &\theta_b e^{mL} - C_2 e^{mL} = C_2 e^{-mL} \\ &\theta_b e^{mL} = C_2\left(e^{-mL} + e^{mL}\right) \\ &C_2 = \frac{\theta_b e^{mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo a expressão de C_2 na equação (5) obtém-se:

$$\begin{aligned} &C_1 = \theta_b - C_2 = \theta_b - \frac{\theta_b e^{mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} \\ &C_1 = \frac{\theta_b\left(e^{-mL} + e^{mL}\right) - \theta_b e^{mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} \\ &C_1 = \frac{\theta_b e^{-mL} + \theta_b e^{mL} - \theta_b e^{mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} \\ &C_1 = \frac{\theta_b e^{-mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} \end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na equação (3) obtém-se:

$$\theta(x)=\left(\frac{\theta_b e^{-mL}}{e^{-mL}+e^{mL}}\right)e^{mx}+\left(\frac{\theta_b e^{mL}}{e^{-mL}+e^{mL}}\right)e^{-mx}$$

$$\theta(x)=\frac{\theta_b e^{-mL+mx}+\theta_b e^{mL-mx}}{e^{-mL}+e^{mL}}$$

$$\theta(x)=\frac{\theta_b\left(e^{-m(L-x)}+e^{m(L-x)}\right)}{e^{-mL}+e^{mL}} \tag{8}$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b}=\frac{\left(\dfrac{e^{-m(L-x)}+e^{m(L-x)}}{2}\right)}{\left(\dfrac{e^{mL}+e^{-mL}}{2}\right)}=\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b}=\frac{T(x)-T_\infty}{T_b-T_\infty}=\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \tag{9}$$

A taxa de transferência de calor q_a pode ser calculada pela lei de Fourier aplicada na base da aleta:

$$q_a=-kA_{tr}\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=-kA_{tr}\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} \tag{10}$$

$$\frac{d\theta}{dx}=mC_1e^{mx}-mC_2e^{-mx}\Rightarrow\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}=mC_1e^{m.0}-mC_2e^{-m.0}=m(C_1-C_2) \tag{11}$$

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na equação (11) obtém-se:

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}=m\left(\frac{\theta_b e^{-mL}}{e^{-mL}+e^{mL}}-\frac{\theta_b e^{mL}}{e^{-mL}+e^{mL}}\right)$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}=m\theta_b\left(\frac{e^{-mL}-e^{mL}}{e^{-mL}+e^{mL}}\right)=-m\theta_b\left(\frac{e^{mL}-e^{-mL}}{e^{-mL}+e^{mL}}\right) \tag{12}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}=-m\theta_b\left(\frac{\dfrac{e^{mL}-e^{-mL}}{2}}{\dfrac{e^{-mL}+e^{mL}}{2}}\right)=-m\theta_b\frac{\text{senh}mL}{\cosh mL}=-m\theta_b\text{tgh}mL$$

Assim, substituindo a expressão resultante de (12) na equação (10) obtém-se:

$$q_a=-kA_{tr}(-m\theta_b\text{tgh}mL)$$

$$q_a=kA_{tr}m\theta_b\text{tgh}mL \tag{13}$$

Sabe-se que $m = \sqrt{\frac{hP}{kA_{tr}}}$ de tal forma que:

$$q_a = kA_{tr}\sqrt{\frac{hP}{kA_{tr}}}\theta_b \mathrm{tgh} mL$$

$$q_a = \sqrt{\frac{hP(kA_{tr})^2}{kA_{tr}}}\theta_b \mathrm{tgh} mL \qquad (14)$$

$$q_a = \sqrt{hPkA_{tr}}\theta_b \mathrm{tgh} mL$$

onde $M = \sqrt{hPkA_{tr}}\theta_b$. Assim, tem-se:

$$q_a = M \mathrm{tgh} mL \qquad (15)$$

Assim, para condição de extremidade adiabática os seguintes resultados foram obtidos:

Distribuição de temperaturas: $\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$

Taxa de transferência de calor: $q_a = M \mathrm{tgh} mL$

CASO C – EXTREMIDADE COM TEMPERATURA ESPECIFICADA

$$\theta(x = L) = \theta_L \qquad (1)$$

$$\theta(x = 0) = T_b - T_\infty = \theta_b \qquad (2)$$

A solução geral da equação $\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$ é:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \qquad (3)$$

Aplicando a solução geral na equação (1) obtém-se:

$$\theta(x = L) = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = \theta_L \qquad (4)$$

Aplicando a solução geral na equação (2) obtém-se:

$$\theta(x = 0) = C_1 e^{m.0} + C_2 e^{-m.0} = C_1 + C_2 = \theta_b \Rightarrow C_1 = \theta_b - C_2 \qquad (5)$$

Com as equações (4) e (5) pode-se obter as constantes C_1 e C_2:

$$
\begin{aligned}
&(\theta_b - C_2)e^{mL} + C_2 e^{-mL} = \theta_L \\
&\theta_b e^{mL} - C_2 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = \theta_L \\
&C_2\left(e^{-mL} - e^{mL}\right) = \theta_L - \theta_b e^{mL} \\
&C_2 = \frac{\theta_L - \theta_b e^{mL}}{e^{-mL} - e^{mL}} \\
&C_2 = \frac{\theta_b e^{mL} - \theta_L}{e^{mL} - e^{-mL}}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Substituindo a expressão de C_2 na equação (5) obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&C_1 = \theta_b - C_2 = \theta_b - \frac{\theta_L - \theta_b e^{mL}}{e^{-mL} - e^{mL}} \\
&C_1 = \frac{\theta_b\left(e^{-mL} - e^{mL}\right) - \theta_L + \theta_b e^{mL}}{e^{-mL} - e^{mL}} \\
&C_1 = \frac{-\theta_b e^{-mL} + \theta_b e^{mL} + \theta_L - \theta_b e^{mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \\
&C_1 = \frac{\theta_L - \theta_b e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na equação (3) obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\theta(x) = \left(\frac{\theta_L - \theta_b e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}}\right)e^{mx} + \left(\frac{\theta_b e^{mL} - \theta_L}{e^{mL} - e^{-mL}}\right)e^{-mx} \\
&\theta(x) = \frac{\theta_L e^{mx} - \theta_b e^{-mL+mx} + \theta_b e^{mL-mx} - \theta_L e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} \\
&\theta(x) = \frac{\theta_b\left(e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)}\right) + \theta_L\left(e^{mx} - e^{-mx}\right)}{e^{mL} - e^{-mL}} \\
&\theta(x) = \theta_b\left[\frac{\left(e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)}\right) + \left(\theta_L/\theta_b\right)\left(e^{mx} - e^{-mx}\right)}{e^{mL} - e^{-mL}}\right] \\
&\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{\left(\dfrac{e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)}}{2}\right) + \left(\dfrac{\theta_L}{\theta_b}\right)\left(\dfrac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}\right)}{\left(\dfrac{e^{mL} - e^{-mL}}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{(\theta_L/\theta_b)\,\mathrm{senh}\,mx + \mathrm{senh}\,m(L-x)}{\mathrm{senh}\,mL} \tag{9}
$$

A taxa de transferência de calor q_a pode ser calculada pela lei de Fourier aplicada na base da aleta:

$$q_a = -kA_{tr}\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -kA_{tr}\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} \tag{10}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1e^{mx} - mC_2e^{-mx} \Rightarrow \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = mC_1e^{m.0} - mC_2e^{-m.0} = m(C_1 - C_2) \tag{11}$$

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na equação (11) obtém-se:

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = m\left(\frac{\theta_L - \theta_b e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} - \frac{\theta_b e^{mL} - \theta_L}{e^{mL} - e^{-mL}}\right) = m\left(\frac{\theta_L - \theta_b e^{-mL} - \theta_b e^{mL} + \theta_L}{e^{mL} - e^{-mL}}\right)$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = m\left[\frac{2\theta_L - \theta_b\left(e^{mL} + e^{-mL}\right)}{e^{mL} - e^{-mL}}\right]$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = m\left[\frac{\frac{2\theta_L}{2} - \theta_b\left(\frac{e^{mL} + e^{-mL}}{2}\right)}{\left(\frac{e^{mL} - e^{-mL}}{2}\right)}\right] = m\frac{\left(-\theta_b \cosh mL + \theta_L\right)}{\mathrm{sen}hmL} \tag{12}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -m\theta_b\frac{\left(\cosh mL - \theta_L/\theta_b\right)}{\mathrm{sen}hmL}$$

Assim, substituindo a expressão resultante de (12) na equação (10) obtém-se:

$$q_a = -kA_{tr}\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -kA_{tr}\left[-m\theta_b\frac{\left(\cosh mL - \theta_L/\theta_b\right)}{\mathrm{sen}hmL}\right] \tag{13}$$

Sabe-se que $m = \sqrt{\frac{hP}{kA_{tr}}}$ de tal forma que:

$$q_a = kA_{tr}\sqrt{\frac{hP}{kA_{tr}}}\theta_b\frac{\left(\cosh mL - \theta_L/\theta_b\right)}{\mathrm{sen}hmL}$$

$$q_a = \sqrt{\frac{hP(kA_{tr})^2}{kA_{tr}}}\theta_b\frac{\left(\cosh mL - \theta_L/\theta_b\right)}{\mathrm{sen}hmL} \tag{14}$$

$$q_a = \sqrt{hPkA_{tr}}\,\theta_b\frac{\left(\cosh mL - \theta_L/\theta_b\right)}{\mathrm{sen}hmL}$$

onde $M = \sqrt{hPkA_{tr}}\theta_b$. Assim, tem-se:

$$\boxed{q_a = M\frac{\left(\cosh mL - \theta_L/\theta_b\right)}{\mathrm{sen}hmL}} \tag{15}$$

Assim, para condição de temperatura prescrita na extremidade os seguintes resultados foram obtidos:

Distribuição de temperaturas: $\dfrac{\theta(x)}{\theta_b}=\dfrac{T(x)-T_\infty}{T_b-T_\infty}=\dfrac{(\theta_L/\theta_b)\text{sen}hmx+\text{sen}hm(L-x)}{\text{sen}hmL}$

Taxa de transferência de calor: $q_a=M\,\dfrac{(\cosh ml-\theta_L/\theta_b)}{\text{sen}hmL}$

CASO D – ALETA INFINITA

$$\theta(x\to\infty)=0 \qquad (1)$$

$$\theta(x=0)=T_b-T_\infty=\theta_b \qquad (2)$$

A solução geral da equação $\dfrac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$ é:

$$\theta(x)=C_1e^{mx}+C_2e^{-mx} \qquad (3)$$

Aplicando a solução geral na equação (1) obtém-se:

$$\theta(x\to\infty)=C_1e^{m\infty}+C_2e^{-m\infty}=0\Rightarrow C_1=0 \qquad (4)$$

Aplicando a solução geral na equação (2) obtém-se:

$$\theta(x=0)=C_1e^{m.0}+C_2e^{-m.0}=C_1+C_2=\theta_b\Rightarrow C_2=\theta_b \qquad (5)$$

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na equação (3) obtém-se:

$$\theta(x)=(0)e^{mx}+(\theta_b)e^{-mx}$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b}=\frac{T(x)-T_\infty}{T_b-T_\infty}=e^{-mx} \qquad (6)$$

A taxa de transferência de calor q_a pode ser calculada pela lei de Fourier aplicada na base da aleta:

$$q_a=-kA_{tr}\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=-kA_{tr}\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} \qquad (7)$$

$$\frac{d\theta}{dx}=mC_1e^{mx}-mC_2e^{-mx}\Rightarrow\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}=mC_1e^{m.0}-mC_2e^{-m.0}=m(C_1-C_2) \qquad (8)$$

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na equação (8) obtém-se:

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -m\theta_b \tag{9}$$

Assim, substituindo a expressão resultante de (9) na equação (7) obtém-se:

$$q_a = -kA_{tr}\left(-m\theta_b\right) = kA_{tr}m\theta_b \tag{10}$$

Sabe-se que $m = \sqrt{\frac{hP}{kA_{tr}}}$ de tal forma que:

$$q_a = kA_{tr}\sqrt{\frac{hP}{kA_{tr}}}\theta_b$$
$$q_a = \sqrt{\frac{hP\left(kA_{tr}\right)^2}{kA_{tr}}}\theta_b \tag{11}$$
$$q_a = \sqrt{hPkA_{tr}}\theta_b$$

onde $M = \sqrt{hPkA_{tr}}\theta_b$. Assim, tem-se:

$$q_a = M \tag{12}$$

Assim, para condição de aleta infinita os seguintes resultados foram obtidos:
Distribuição de temperaturas: $\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{T(x)-T_\infty}{T_b - T_\infty} = e^{-mx}$
Taxa de transferência de calor: $q_a = M$

ABORDAGEM ALTERNATIVA: TAXA NA QUAL O CALOR É TRANSFERIDO POR CONVECÇÃO DA SUPERFÍCIE DA ALETA

Outra forma de se determinar a taxa de transferência de calor em uma aleta de seção transversal uniforme é através da conservação da energia para uma superfície estendida, que possui o seguinte enunciado:

$$\begin{pmatrix}\text{Taxa na qual o calor é}\\ \text{transferido por convecção}\\ \text{da superfície da aleta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Taxa condutiva através}\\ \text{da base da aleta}\end{pmatrix}$$

Conseqüentemente, uma formulação alternativa para q_a é:

$$q_a = \int_{A_a} h\left[T(x) - T_\infty\right]dA_s = \int_{A_a} h\theta(x)dA_s$$

A área A_a indica a área superficial total da aleta, incluindo sua extremidade. Assim, para facilitar o tratamento matemático, é conveniente separar a integral anterior em dois termos: o primeiro termo levando em consideração a taxa de transferência de calor pela superfície da aleta, excluindo sua extremidade, e o segundo termo levando em consideração a taxa de transferência de calor pela extremidade da aleta. Dessa forma, sabendo que $dA_s = Pdx$ obtém-se:

$$q_a = \int_0^L hP\theta(x)dx + hA_{tr}\left[T(x=L) - T_\infty\right] = \int_0^L hP\theta(x)dx + hA_{tr}\theta(x=L)$$

CASO A – EXTREMIDADE COM CONVECÇÃO

Perfil de temperaturas: $\theta(x) = \theta_b \dfrac{\cosh m(L-x) + (h/mk)\text{senh}\, m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}\, mL}$

Taxa de transferência de calor: $q_a = \int_0^L hP\left[\theta_b \dfrac{\cosh m(L-x) + (h/mk)\text{senh}\, m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}\, mL}\right]dx$

$+ hA_{tr}\theta_b \dfrac{\cosh m(L-L) + (h/mk)\text{senh}\, m(L-L)}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}\, mL}$

Com h, P, θ_b, m, L e k constantes e sabendo que $\text{senh}(0) = 0$ e $\cosh(0) = 1$ obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}\, mL}\int_0^L \left[\cosh m(L-x) + (h/mk)\text{senh}\, m(L-x)\right]dx$$
$$+ \frac{hA_{tr}\theta_b}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}\, mL}$$

Separando em duas integrais obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}\, mL}\left[\int_0^L \cosh m(L-x)dx + (h/mk)\int_0^L \text{senh}\, m(L-x)dx\right]$$
$$+ \frac{hA_{tr}\theta_b}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}\, mL}$$

As duas integrais podem ser resolvidas fazendo a substituição $a = m(L-x)$ de tal maneira que $dx = -da/m$. Dessa forma tem-se que:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}\, mL}\left[-\frac{\int_0^L \cosh a\, da}{m} - \frac{(h/mk)\int_0^L \text{senh}\, a\, da}{m}\right]$$
$$+ \frac{hA_{tr}\theta_b}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}\, mL}$$

Resolvendo as duas integrais e voltando na variável x obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}mL}\left\{-\frac{1}{m}\left[\text{sen}hm(L-x)\right]_0^L - \frac{(h/mk)}{m}\left[\cosh m(L-x)\right]_0^L\right\}$$
$$+\frac{hA_{tr}\theta_b}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}mL}$$

Sabendo que $\text{sen}h(0)=0$ e $\cosh(0)=1$ e rearranjando obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b\left[\text{senh}mL - (h/mk)(1-\cosh mL)\right]}{m\left[\cosh mL + (h/mk)\text{senh}mL\right]} + \frac{hA_{tr}\theta_b}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}mL}$$

Sabendo que $hP\theta_b/m = \sqrt{hPkA_{tr}}\,\theta_b = M$ obtém-se:

$$q_a = \frac{M\left[\text{senh}mL - (h/mk)(1-\cosh mL)\right] + hA_{tr}\theta_b}{\left[\cosh mL + (h/mk)\text{senh}mL\right]}$$

Distribuindo M obtém-se:

$$q_a = \frac{M\text{senh}mL - M(h/mk) + M(h/mk)\cosh mL + hA_{tr}\theta_b}{\left[\cosh mL + (h/mk)\text{senh}mL\right]}$$

Utilizando as definições de M e m pode-se mostrar que $-M(h/mk) = hA_{tr}\theta_b$ de tal maneira que:

$$\boxed{q_a = M\,\frac{\text{senh}mL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\text{senh}mL}}$$

CASO B – EXTREMIDADE ADIABÁTICA

Perfil de temperaturas: $\theta(x) = \theta_b\,\dfrac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$

Taxa de transferência de calor: $q_a = \int_0^L hP\left[\theta_b\,\dfrac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}\right]dx + \overbrace{hA_{tr}\theta(x=L)}^{=0\text{ (ADIABÁTICA)}}$

Com h, P, θ_b, m, L e k constantes obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\cosh mL}\int_0^L\left[\cosh m(L-x)\right]dx$$

A integral pode ser resolvida fazendo a substituição $a = m(L - x)$ de tal maneira que $dx = -da/m$. Dessa forma tem-se que:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\cosh mL}\left[-\frac{\int_0^L \cosh a da}{m}\right]$$

Resolvendo a integral e voltando na variável *x* obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\cosh mL}\left\{-\frac{1}{m}\left[\mathrm{sen}hm(L-x)\right]_0^L\right\}$$

Sabendo que $\mathrm{sen}h(0) = 0$ e rearranjando obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\cosh mL}\left\{-\frac{1}{m}\left[0 - \mathrm{sen}hmL\right]\right\}$$

Sabendo que $\mathrm{sen}hmL/\cosh mL = \mathrm{tg}hmL$ e $m = \sqrt{hP/kA_{tr}}$ obtém-se:

$$q_a = \frac{\sqrt{kA_{tr}}}{\sqrt{hP}} hP\theta_b \mathrm{tg}hmL = \frac{\sqrt{kA_{tr}}}{\sqrt{hP}}\sqrt{hP}\sqrt{hP}\theta_b \mathrm{tg}hmL = \sqrt{hPkA_{tr}}\,\theta_b \mathrm{tg}hmL$$

Fazendo $M = \sqrt{hPkA_{tr}}\,\theta_b$ obtém-se:

$$q_a = M\mathrm{tg}hmL$$

CASO C – EXTREMIDADE COM TEMPERATURA ESPECIFICADA

$$\theta(x) = \theta_b \frac{(\theta_L/\theta_b)\mathrm{sen}hmx + \mathrm{sen}hm(L-x)}{\mathrm{sen}hmL}$$

Taxa de transferência de calor: $q_a = \int_0^L hP\left[\theta_b \frac{(\theta_L/\theta_b)\mathrm{sen}hmx + \mathrm{sen}hm(L-x)}{\mathrm{sen}hmL}\right]dx$

$$+ hA_{tr}\theta_b \frac{(\theta_L/\theta_b)\mathrm{sen}hmL + \mathrm{sen}hm(L-L)}{\mathrm{sen}hmL}$$

Com h, P, θ_b, m, L e k constantes e sabendo que $\mathrm{sen}h(0) = 0$ obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\mathrm{sen}hmL}\int_0^L \left[(\theta_L/\theta_b)\mathrm{sen}hmx + \mathrm{sen}hm(L-x)\right]dx + hA_{tr}\theta_L$$

Separando em duas integrais obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\text{sen}hmL}\left[(\theta_L/\theta_b)\int_0^L \text{sen}hmxdx + \int_0^L \text{sen}hm(L-x)dx \right] + hA_{tr}\theta_L$$

As duas integrais podem ser resolvidas fazendo a substituição $a = mx$ para a primeira integral e $a = m(L-x)$ para a segunda integral de tal maneira que $dx = da/m$ e $dx = -da/m$, respectivamente. Dessa forma tem-se que:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\text{sen}hmL}\left[(\theta_L/\theta_b)\frac{\int_0^L \text{sen}hada}{m} - \frac{\int_0^L \text{sen}hada}{m} \right] + hA_{tr}\theta_L$$

Resolvendo as duas integrais e voltando na variável x obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b}{\text{sen}hmL}\left\{ \frac{(\theta_L/\theta_b)}{m}[\cosh mx]_0^L - \frac{1}{m}[\cosh m(L-x)]_0^L \right\} + hA_{tr}\theta_L \text{ ??}$$

Sabendo que $\cosh(0) = 1$ e rearranjando obtém-se:

$$q_a = \frac{hP\theta_b(\cosh mL - 1)}{m\text{sen}hmL}(\theta_L/\theta_b + 1) + hA_{tr}\theta_L$$

Sabendo que $hP\theta_b/m = \sqrt{hPkA_{tr}}\theta_b = M$ obtém-se:

$$q_a = \frac{M(\cosh mL - 1)}{\text{sen}hmL}(\theta_L/\theta_b + 1) + hA_{tr}\theta_L$$

Rearranjando obtém-se:

$$q_a = M\,\frac{(\cosh ml - \theta_L/\theta_b)}{\text{sen}hmL}$$

CASO D – ALETA INFINITA

$$\theta(x) = \theta_b e^{-mx}$$

Taxa de transferência de calor: $q_a = \int_0^\infty hP\theta_b e^{-mx}dx + \overbrace{hA_{tr}\theta(x \to \infty)}^{=0\,\text{(ADIABÁTICA)}}$

Com h, P, θ_b, m, L e k constantes obtém-se:

$$q_a = hP\theta_b\int_0^\infty e^{-mx}dx$$

A integral pode ser resolvida fazendo $a = -mx$ de tal maneira que $dx = -da/m$. Dessa forma tem-se que:

$$q_a = hP\theta_b \left[-\frac{\int_0^{\infty} e^a da}{m} \right]$$

Resolvendo a integral e voltando na variável x obtém-se:

$$q_a = -\frac{hP\theta_b}{m} \left[e^{-mx} \right]_0^{\infty}$$

Rearranjando obtém-se:

$$q_a = -\frac{hP\theta_b}{m} \left[\frac{1}{e^{m\infty}} - \frac{1}{e^{m0}} \right]_0^{\infty} = \frac{hP\theta_b}{m} = \frac{\sqrt{kA_{tr}}}{\sqrt{hP}} hP\theta_b = \frac{\sqrt{kA_{tr}}}{\sqrt{hP}} \sqrt{hP}\sqrt{hP}\theta_b = \sqrt{hPkA_{tr}}\theta_{\mathrm{b}}$$

Fazendo $M = \sqrt{hPkA_{tr}}\theta_b$ obtém-se:

$$q_a = M$$