

DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO

COORDENADAS RETANGULARES

Consideremos agora a maneira na qual a distribuição de temperatura pode ser determinada. Essa distribuição de temperatura pode ser determinada pela aplicação da conservação da energia. Nesse caso, definimos um volume de controle diferencial, identificamos os processos relevantes de transferência de energia e introduzimos as equações das taxas de transferência de calor apropriadas. O resultado é uma equação diferencial cuja solução, para condições de contorno descritas, fornece a distribuição de temperatura no meio.

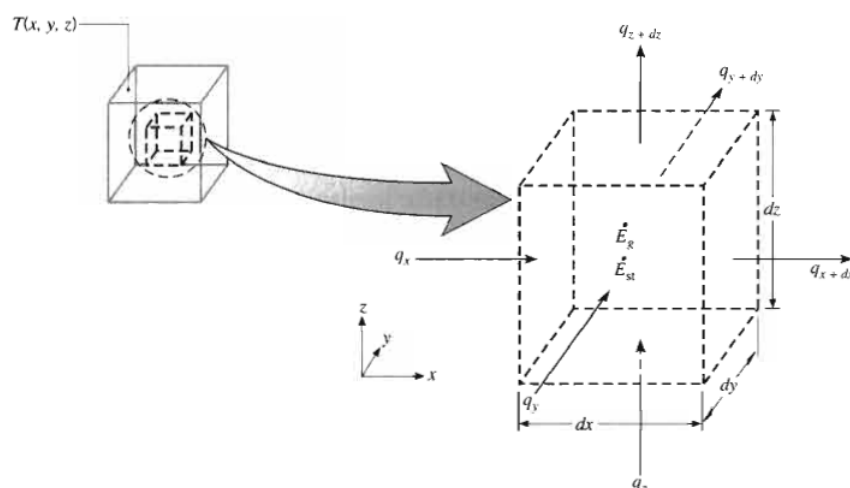


Figura 1 – Volume de controle diferencial, $dx.dy.dz$, para a análise da condução de calor em coordenadas cartesianas.

Considere um meio homogêneo dentro do qual não existe movimento global e a distribuição de temperatura $T(x, y, z)$ é expressa em coordenadas cartesianas. Inicialmente definimos um pequeno volume de controle infinitesimal (diferencial), $dx.dy.dz$, conforme mostrado na figura 1. Usando a primeira lei da termodinâmica para formular o problema num dado instante de tempo, a segunda etapa é considerar os processos de energia que são relevantes para esse volume de controle. Se existirem gradientes de temperatura, haverá transferência de calor por condução através de cada uma das superfícies de controle.

As taxas de calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle nos pontos com coordenadas x , y e z são indicadas pelos termos q_x , q_y e q_z , respectivamente. As taxas de transferência de calor por condução nas superfícies opostas podem ser então expressas como uma expansão da série de Taylor, onde, desprezando os termos de ordem superiores:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (1)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (2)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (3)$$

Em palavras, a equação 1 afirma simplesmente que a componente x da taxa de transferência de calor na direção do eixo x , na posição $x + dx$, é igual ao valor dessa componente em x somado à quantidade pela qual ela varia em relação a x multiplicado por dx . No interior do meio pode haver também um termo para representar uma fonte de energia, que está associado à taxa de geração de energia térmica. Esse termo é representado por

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz \quad (4)$$

em que $\dot{q}$ é a taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume do meio (W/m^3). Além disso, podem ocorrer variações na quantidade de energia térmica armazenada pelo material no volume de controle. Se o material não sofre mudança de fase, não há o efeito de energia latente, e a energia armazenada pode ser dada por:

$$\dot{E}_{ar} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (5)$$

em que $\rho c_p \partial T / \partial t$ é a taxa de variação com o tempo da energia sensível (térmica) do meio por unidade de volume.

Mais uma vez, é importante observar que os termos $\dot{E}_g$ e $\dot{E}_{ar}$ representam processos físicos diferentes. O termo referente a geração de energia $\dot{E}_g$ é uma manifestação de algum processo de conversão de energia que envolve de um lado energia térmica e do outro a energia química, elétrica e/ou nuclear. Esse termo é positivo (uma fonte) se a energia térmica está sendo gerada no material à custa de uma outra forma de energia, e negativo (sumidouro) se a energia térmica estiver sendo consumida. Por outro lado, o termo relativo ao armazenamento ou acúmulo de energia $\dot{E}_{ar}$ refere-se à taxa de variação da energia térmica armazenada pela matéria.

A última etapa consiste em representar a conservação da energia utilizando as equações de taxas previamente apresentadas. Com base nas taxas, a forma geral da exigência de conservação de energia é

$$\dot{E}_e + \dot{E}_g - \dot{E}_s = \dot{E}_{ar}$$

Logo, reconhecendo as taxas de condução que entram, $\dot{E}_e$, e as taxas de condução que saem, $\dot{E}_s$, e substituindo as equações 4 e 5, obtemos

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q} dx dy dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (6)$$

Substituindo as equações 1, 2 e 3, segue que

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (7)$$

As taxas de calor por condução podem ser avaliadas a partir da lei de Fourier:

$$q_x = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (8)$$

$$q_y = -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (9)$$

$$q_z = -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (10)$$

em que cada componente do fluxo de calor das equações 8, 9 e 10 foram multiplicados pela área da superfície (diferencial) de controle apropriada, a fim de se obter a taxa de transferência de calor. Substituindo as derivadas das equações 8, 9 e 10 na equação 7 e dividindo todos os termos pelas dimensões do volume de controle ($dx.dy.dz$), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

A equação 11 é a forma geral da equação de difusão de calor em coordenadas cartesianas. Essa equação, conhecida como equação do calor, é a ferramenta básica para a análise da condução de calor. A partir de sua solução, obtemos a distribuição de temperatura $T(x,y,z)$ como uma função do tempo. A aparente complexidade dessa expressão não deve obscurecer o fato de que ela descreve uma condição física importante, ou seja, a conservação de energia. Devemos ter um entendimento claro do significado físico de cada um dos termos que aparecem nessa equação. Por exemplo, o termo $\partial(k\partial T/\partial x)/\partial x$ está relacionado ao fluxo líquido de calor por condução para o interior do volume de controle na direção da coordenada do eixo x . Dessa forma, multiplicando essa parcela por dx , tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = q_x'' - q_{x+dx}'' \quad (12)$$

com expressões similares aplicadas aos fluxos nas direções y e z . Portanto, em palavras, a equação do calor, equação 11, estabelece que, em qualquer ponto do meio, a taxa de energia líquida transferida por condução para o interior de um volume unitário somado

à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica armazenada no interior desse volume.

Com frequência, é possível trabalhar com versões simplificadas da equação 11. Por exemplo, se a condutividade térmica for constante, a equação do calor é:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13)$$

em que $\alpha = k/\rho c_p$ é a difusividade térmica do meio. Simplificações adicionais da forma geral da equação do calor são frequentemente possíveis. Por exemplo, sob condições de regime estacionário, não há variação na quantidade da energia armazenada; então, a equação 11 se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0 \quad (14)$$

Além disso, se a transferência de calor for unidimensional (por exemplo, na direção do eixo x) e se não houver geração de energia, a equação 11 se reduz a

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (15)$$

A importante consequência desse resultado é que, sob estado estacionário, unidimensional, sem geração de energia, o fluxo de calor é uma constante na direção da transferência ($dq_x''/dx = 0$). A equação do calor também pode ser escrita em coordenadas cilíndricas e esféricas. Os volumes de controle diferenciais para esses dois sistemas são mostrados nas figuras 3 e 4.

COORDENADAS CILÍNDRICAS

Quando o operador (∇) é representado em coordenadas cilíndricas, a forma geral do vetor fluxo de calor, e, portanto, a lei de Fourier, é

$$q'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (16)$$

em que

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} \quad q_z'' = -k\frac{\partial T}{\partial z} \quad (17)$$

são as componentes do fluxo de calor nas direções radial, circunferencial e axial, respectivamente. É importante observar que o gradiente de temperatura na lei de Fourier deve possuir unidades de K/m. Por esse motivo, ao avaliar o gradiente para uma coordenada angular, ele deve estar expresso em termos de uma variação diferencial do comprimento de arco. Por exemplo, a componente do fluxo de calor na direção circunferencial no sistema de coordenadas cilíndricas é $q_\phi = -(k/r)(\partial T/\partial \phi)$ e não $q_\phi = -k(\partial T/\partial \phi)$. Isso pode ser visto mais facilmente pela figura 2:

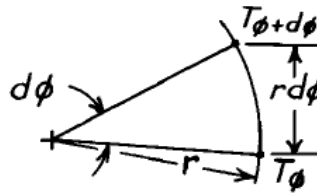


Figura 2 – Esquema utilizado para calcular o fluxo de calor na direção circunferencial de um sistema de coordenadas cilíndricas.

Considerando um volume de controle diferencial da figura 3, de volume $dV = dr.r.d\phi.dz$, e aplicando o princípio da conservação da energia em forma de taxa obtém-se:

$$q_r - q_{r+dr} + q_\phi - q_{\phi+d\phi} + q_z - q_{z+dz} + \dot{E}_g = \dot{E}_{ar} \quad (18)$$

O termo de geração de energia é calculado como:

$$\dot{E}_g = \dot{q}dV = \dot{q}(dr.r.d\phi.dz) \quad (19)$$

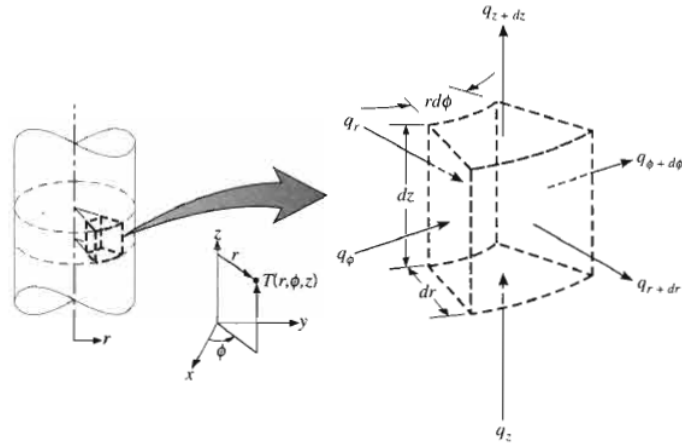


Figura 3 – Volume de controle diferencial $dr.rd\phi.dz$, para a análise da condução de calor em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) .

O termo de armazenamento pode ser calculado como:

$$\dot{E}_{ar} = \rho dV c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho(dr.rd\phi.dz)c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (20)$$

As taxas de calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle nos pontos com coordenadas r, ϕ e z são indicadas pelos termos q_r , q_ϕ e q_z , respectivamente. As taxas de transferência de calor por condução nas superfícies opostas podem ser então expressas como uma expansão da série de Taylor, onde, desprezando os termos de ordem superiores:

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \quad (21)$$

$$q_{\phi+d\phi} = q_\phi + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi \quad (22)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (23)$$

Utilizando a lei de Fourier, as expressões para as taxas de transferência de calor por condução são:

$$q_r = -kA_r \frac{\partial T}{\partial r} = -k(r d\phi dz) \frac{\partial T}{\partial r} \quad (24)$$

$$q_\phi = -kA_\phi \frac{\partial T}{r \partial \phi} = -k(dr dz) \frac{\partial T}{r \partial \phi} \quad (25)$$

$$q_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z} = -k(dr.r d\phi) \frac{\partial T}{\partial z} \quad (26)$$

Substituindo as equações 19, 20, 21, 22 e 23 na equação 18 obtém-se:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + \dot{q}(dr.r d\phi.dz) = \rho(dr.r d\phi.dz) c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (27)$$

Substituindo as equações 24, 25 e 26 na equação 27 obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial r} \left[-k(r d\phi dz) \frac{\partial T}{\partial r} \right] dr - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[-k(dr dz) \frac{\partial T}{r \partial \phi} \right] d\phi - \frac{\partial}{\partial z} \left[-k(dr.r d\phi) \frac{\partial T}{\partial z} \right] dz \\ + \dot{q}(dr.r d\phi.dz) = \rho(dr.r d\phi.dz) c_p \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (28)$$

Dividindo a equação 28 por $dr.r d\phi.dz$ e rearranjando obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (29)$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

Em coordenadas esféricas a forma geral do vetor fluxo de calor da lei de Fourier é:

$$q'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + k\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \quad (30)$$

em que:

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\theta'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (31)$$

são as componentes do fluxo de calor nas direções radial, polar e azimutal, respectivamente. Novamente é importante observar que o gradiente de temperatura na lei de Fourier deve possuir unidades de K/m. Por esse motivo, ao avaliar o gradiente para uma coordenada angular, ele deve estar expresso em termos de uma variação diferencial do comprimento de arco. Por exemplo, a componente do fluxo de calor na direção polar de um sistema de coordenadas esféricas é $q_\theta'' = -(k/r)(\partial T/\partial \theta)$ e não $q_\theta'' = -k(\partial T/\partial \theta)$, assim como a componente do fluxo de calor na direção azimutal de um sistema de coordenadas esféricas é $q_\phi'' = -(k/r\sin\theta)(\partial T/\partial \phi)$ e não $q_\phi'' = -k(\partial T/\partial \phi)$. Considerando um volume de controle diferencial da figura 4, de volume $dV = dr.r\sin\theta d\phi.r d\theta$, e aplicando o princípio da conservação da energia em forma de taxa obtém-se:

$$q_r - q_{r+dr} + q_\phi - q_{\phi+d\phi} + q_\theta - q_{\theta+d\theta} + \dot{E}_g = \dot{E}_{ar} \quad (32)$$

O termo de geração de energia é calculado como:

$$\dot{E}_g = \dot{q}dV = \dot{q}(dr.r\sin\theta d\phi.r d\theta) \quad (33)$$

O termo de armazenamento pode ser calculado como:

$$\dot{E}_{ar} = \rho dV c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho(dr.r\sin\theta d\phi.r d\theta)c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (34)$$

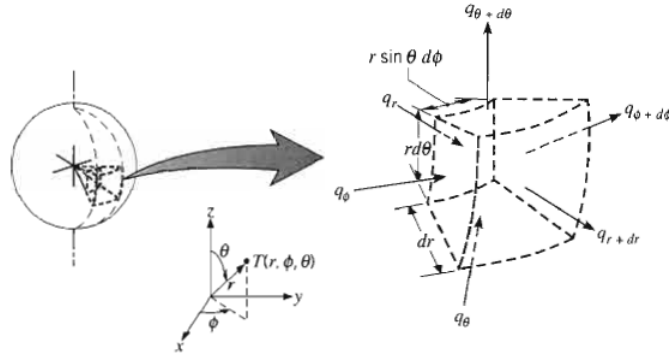


Figura 4 – Volume de controle diferencial $dr.r\sin\theta d\phi.r d\theta$, para a análise da condução de calor em coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) .

As taxas de calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle nos pontos com coordenadas r, ϕ e θ são indicadas pelos termos q_r , q_ϕ e q_θ , respectivamente. As taxas de transferência de calor por condução nas superfícies opostas podem ser então expressas como uma expansão da série de Taylor, onde, desprezando os termos de ordem superiores:

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \quad (35)$$

$$q_{\phi+d\phi} = q_\phi + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi \quad (36)$$

$$q_{\theta+d\theta} = q_\theta + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta \quad (37)$$

Utilizando a lei de Fourier, as expressões para as taxas de transferência de calor por condução são:

$$q_r = -kA_r \frac{\partial T}{\partial r} = -k(r\sin\theta d\phi.r d\theta) \frac{\partial T}{\partial r} \quad (38)$$

$$q_{\phi} = -kA_{\phi} \frac{\partial T}{r \partial \phi} = -k(dr.rd\theta) \frac{\partial T}{r \sin \theta d\phi} \quad (39)$$

$$q_{\theta} = -kA_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} = -k(dr.r \sin \theta d\phi) \frac{\partial T}{r \partial \theta} \quad (40)$$

Substituindo as equações 33, 34, 35, 36 e 37 na equação 32 obtém-se:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{\partial q_{\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial q_{\theta}}{\partial \theta} + \dot{q}(dr.r \sin \theta d\phi.rd\theta) = \rho(dr.r \sin \theta d\phi.rd\theta)c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (41)$$

Substituindo as equações 38, 39 e 40 na equação 41 obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial r} \left[-k(r \sin \theta d\phi.rd\theta) \frac{\partial T}{\partial r} \right] dr - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[-k(dr.rd\theta) \frac{\partial T}{r \sin \theta d\phi} \right] d\phi \\ - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-k(dr.r \sin \theta d\phi) \frac{\partial T}{r \partial \theta} \right] d\theta + \dot{q}(dr.r \sin \theta d\phi.rd\theta) = \rho(dr.r \sin \theta d\phi.rd\theta)c_p \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (42)$$

Dividindo a equação 42 por $dr.r \sin \theta d\phi.rd\theta$ e rearranjando obtém-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (43)$$

RESUMO DAS EQUAÇÕES DE CONDUÇÃO E VETOR FLUXO DE CALOR

a) Coordenadas retangulares

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)}_{\text{taxa de energia líquida transferida por condução na direção do eixo x por unidade de volume}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_{\text{taxa de energia líquida transferida por condução na direção do eixo y por unidade de volume}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_{\text{taxa de energia líquida transferida por condução na direção do eixo z por unidade de volume}} + \underbrace{\dot{q}}_{\text{taxa volumétrica de geração de energia térmica}} = \underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{taxa de variação da energia térmica (sensível) do meio por unidade de volume}}$$

$$q'' = -k \nabla T = -k \left(i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

b) Coordenadas cilíndricas

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right)}_{\text{taxa de energia líquida transferida por condução na direção do eixo } r \text{ por unidade de volume}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)}_{\text{taxa de energia líquida transferida por condução na direção do eixo } \phi \text{ por unidade de volume}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_{\text{taxa de energia líquida transferida por condução na direção do eixo } z \text{ por unidade de volume}} + \underbrace{\dot{q}}_{\text{taxa volumétrica de geração de energia térmica}} = \underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{taxa de variação da energia térmica (sensível) do meio por unidade de volume}}$$

$$q'' = -k \nabla T = -k \left(i \frac{\partial T}{\partial r} + j \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

c) Coordenadas esféricas

$$\underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}_{\text{taxa de energia líquida transferida por condução na direção do eixo } r \text{ por unidade de volume}} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)}_{\text{taxa de energia líquida transferida por condução na direção do eixo } \phi \text{ por unidade de volume}} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}_{\text{taxa de energia líquida transferida por condução na direção do eixo } \theta \text{ por unidade de volume}} + \underbrace{\dot{q}}_{\text{taxa volumétrica de geração de energia térmica}} = \underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{taxa de variação da energia térmica (sensível) do meio por unidade de volume}}$$

$$q'' = -k \nabla T = -k \left(i \frac{\partial T}{\partial r} + j \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + k \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)$$

$$q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\theta'' = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi}$$