



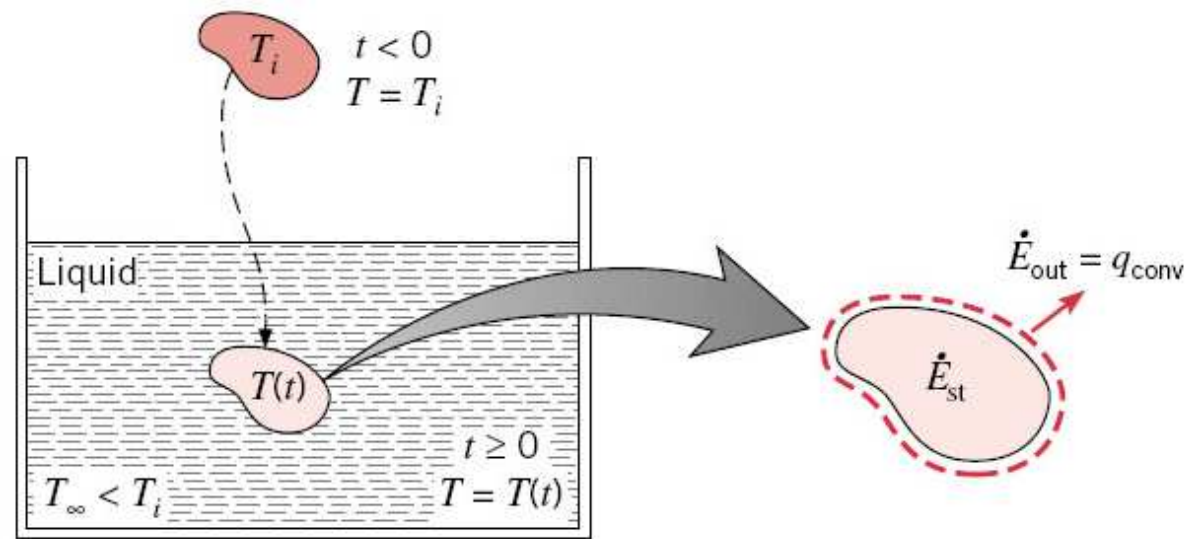
CAPÍTULO 5 – CONDUÇÃO TRANSIENTE

DISCIPLINA: TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA 1

PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

- As condições térmicas **mudam com o tempo**.
- São problemas chamados de **não-estacionários** ou **transientes**.
- Surgem quando as condições de contorno de um sistema são alteradas.
- Objetivos:
 1. Determinar a **dependência da distribuição de temperaturas no interior de um sólido em relação ao tempo** durante um processo transiente.
 2. Determinar a **transferência de calor entre o sólido e a vizinhança**.

5.1 O MÉTODO DA CAPACITÂNCIA GLOBAL



- Imersão de um corpo com $T = T_i$ em $t < 0$ num fluido com $T_\infty < T_i$.
- Em $t \geq 0$ a temperatura do sólido irá diminuir até que $T = T_\infty$.
- Hipótese do método da capacitância global: $T(x, t) \approx T(t)$.

- Essa hipótese implica que os gradientes de temperatura no interior do sólido sejam desprezíveis.
- Isso ocorre quando no interior do sólido $k \rightarrow \infty$ ou $R_{cond} \rightarrow 0$.
- Na prática, a hipótese de gradientes desprezíveis é aproximada quando a resistência à condução no interior do sólido for pequena em comparação à resistência à convecção entre o sólido e sua vizinhança.
- A resposta transiente da temperatura é obtida por um balanço global de energia no sólido:

$$\underbrace{\dot{E}_e}_{=0} - \dot{E}_s + \underbrace{\dot{E}_g}_{=0} = \dot{E}_{acu} \Rightarrow -\dot{E}_s = \dot{E}_{acu}$$

$$-q_{conv} = \frac{dE_{acu}}{dt} = \frac{dU}{dt} + \underbrace{\frac{d(EC)}{dt}}_{=0} + \underbrace{\frac{d(EP)}{dt}}_{=0} \Rightarrow -q_{conv} = \frac{dU}{dt}$$

- Fazendo $q_{conv} = hA_s(T - T_\infty)$ e $dU = mdu$ obtém-se:

$$-hA_s(T - T_\infty) = m \frac{du}{dt}$$

- Sabendo que $m = \rho V$ e $du = cdT$ obtém-se:

$$-hA_s(T - T_\infty) = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

- Introduzindo a diferença de temperaturas $\theta = T - T_\infty$ tem-se que:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta + T_{\infty}) = \frac{d\theta}{dt} + \underbrace{\frac{dT_{\infty}}{dt}}_{=0} = \frac{d\theta}{dt}$$

- Substituindo θ e $d\theta/dt$ e separando variáveis obtém-se:

$$dt = -\frac{\rho V c}{h A_s} \frac{d\theta}{\theta}$$

- Sabendo que $T(t=0) = T_i$ pode-se integrar a equação anterior:

$$\int_0^t dt = -\frac{\rho V c}{h A_s} \int_{\theta_i = T_i - T_{\infty}}^{\theta = T - T_{\infty}} \frac{d\theta}{\theta}$$

$$[t]_0^t = -\frac{\rho V c}{h A_s} [\ln \theta]_{\theta_i}^{\theta} \Rightarrow t - 0 = -\frac{\rho V c}{h A_s} [\ln \theta - \ln \theta_i] \Rightarrow t = -\frac{\rho V c}{h A_s} \ln \left(\frac{\theta}{\theta_i} \right)$$

$$t = -\frac{\rho V c}{h A_s} \ln \left(\frac{\theta}{\theta_i} \right) \Rightarrow t = -\frac{\rho V c}{h A_s} \ln \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)$$

- A expressão anterior pode ser utilizada para determinar o **tempo necessário** t **para alcançar uma dada temperatura** T .
- Expressando T em função de t obtém-se:

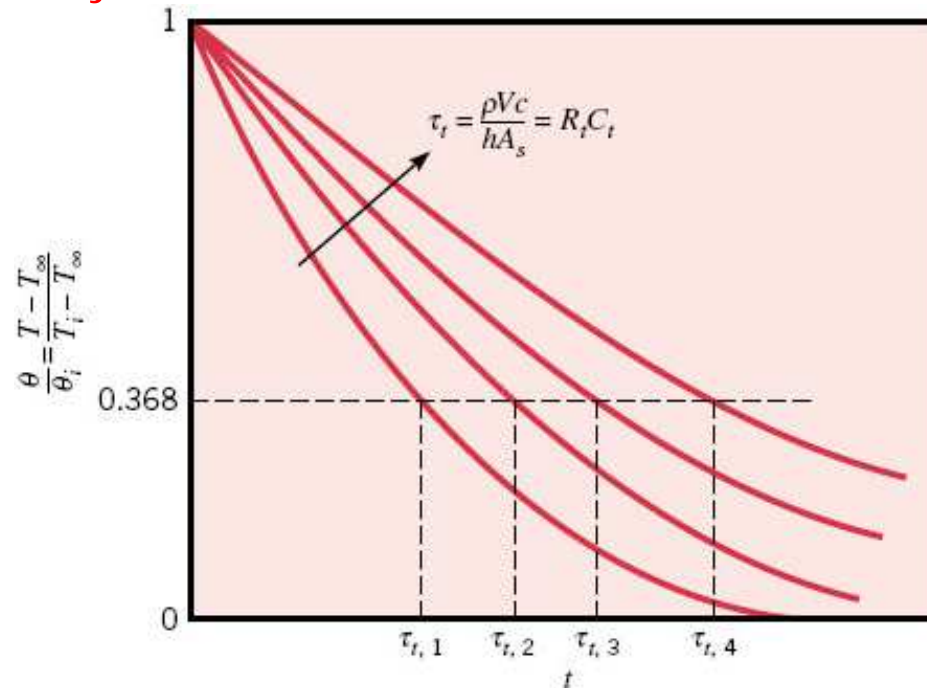
$$-\frac{\rho V c}{h A_s} \ln \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right) = t \Rightarrow \ln \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right) = -\left(\frac{h A_s}{\rho V c} \right) t \Rightarrow$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp\left[-\left(\frac{hA_s}{\rho Vc}\right)t\right]$$

- A expressão anterior pode ser utilizada para determinar a temperatura T em algum tempo t .
- Os resultados anteriores indicam que a diferença entre $T(t)$ e T_{∞} diminui exponencialmente para zero conforme $t \rightarrow \infty$.
- A grandeza $(\rho Vc/hA_s)$ pode ser interpretada como uma constante de tempo térmica:

$$\tau_t = \left(\frac{1}{hA_s}\right)(\rho Vc) = R_t C_t \text{ (unidade de tempo)}$$

- R_t é a resistência térmica de convecção e C_t é a capacitância térmica global do sólido.
- Um aumento de R_t e/ou C_t causará uma resposta mais lenta do sólido a mudanças no seu ambiente térmico.



- O **total de energia transferida** Q até um instante t é dado por:

$$Q = \int_0^t q dt = \int_0^t hA_s (T - T_\infty) dt$$

- Substituindo $T - T_\infty$ obtém-se:

$$Q = \int_0^t hA_s (T_i - T_\infty) \exp\left[-\left(\frac{hA_s}{\rho Vc}\right)t\right] dt = hA_s (T_i - T_\infty) \int_0^t \exp\left[-\left(\frac{hA_s}{\rho Vc}\right)t\right] dt$$

- Fazendo $a = -(hA_s / \rho Vc)t$ obtém-se $dt = -(\rho Vc / hA_s) da$ e assim:

$$Q = -hA_s (T_i - T_\infty) \int_0^t \exp(a) (\rho Vc / hA_s) da = -\rho Vc (T_i - T_\infty) \int_0^t \exp(a) da$$

$$Q = -\rho V c (T_i - T_\infty) \exp \left[- \left(\frac{h A_s}{\rho V c} \right) t \right]_0^t =$$

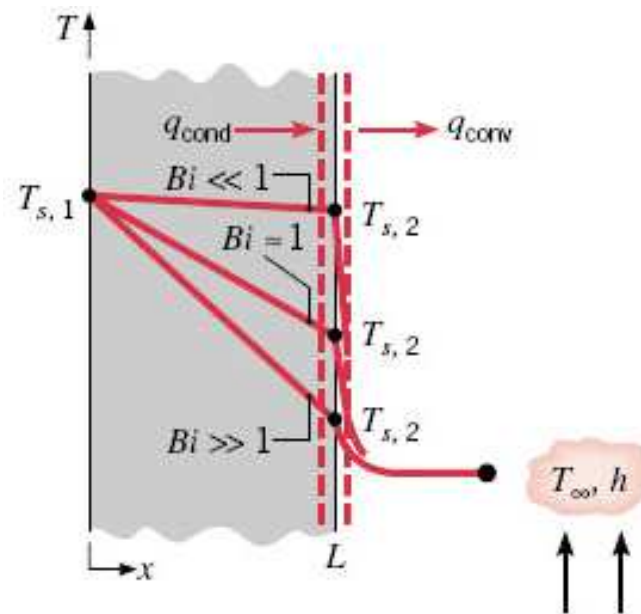
$$Q = -\rho V c (T_i - T_\infty) \left\{ \exp \left[- \left(\frac{h A_s}{\rho V c} \right) t \right] - \exp \left[- \left(\frac{h A_s}{\rho V c} \right) 0 \right] \right\}$$

$$Q = \rho V c (T_i - T_\infty) \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{h A_s}{\rho V c} \right) t \right] \right\} = \rho V c \theta_i \left[1 - \exp \left(- \frac{t}{\tau_t} \right) \right]$$

- Obviamente, Q está relacionada à **mudança na energia interna do sólido**:

$$-Q = \Delta E_{acu}$$

5.2 VALIDADE DO MÉTODO DA CAPACITÂNCIA GLOBAL

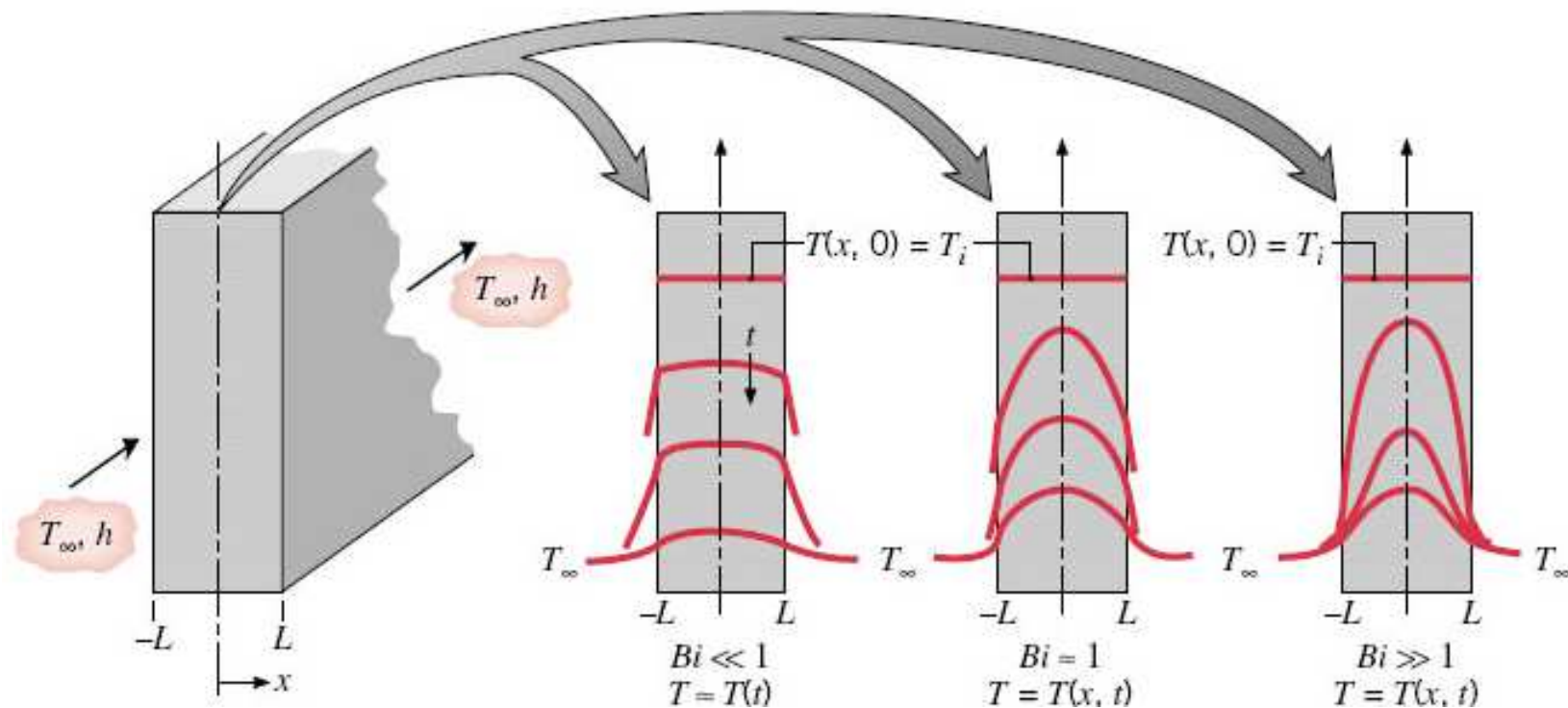


- Considere uma superfície mantida a $T_{s,1}$ e outra exposta a um fluido com temperatura $T_{\infty} < T_{s,1}$ de tal maneira que $T_{\infty} < T_{s,2} < T_{s,1}$.
- Um balanço de energia na superfície a $T_{s,2}$ se reduz a:

$$\dot{E}_e = \dot{E}_s \Rightarrow q_{cond} = q_{conv} \Rightarrow \frac{kA}{L}(T_{s,1} - T_{s,2}) = hA(T_{s,2} - T_\infty)$$

$$\frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{(T_{s,2} - T_\infty)} = \frac{(L/kA)}{(1/hA)} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{hL}{k} = \text{Bi}$$

- Bi é o **NÚMERO DE BIOT** e fornece uma medida da “**queda de temperatura no sólido em relação à diferença de temperaturas entre a superfície e o fluido**”.
- Para $\text{Bi} \ll 1$ é razoável supor uma **distribuição de temperaturas uniforme no interior do sólido** em qualquer instante durante o processo transiente, ou seja, $R_{cond} \ll R_{conv}$.



- Como **condição** para a utilização do método da capacitância global tem-se que:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} < 0,1$$

- L_c é o **comprimento característico**, definido como $L_c = V/A_s$.

Parede plana de espessura $2L$: $L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{2LH_w}{2H_w} = L$

Cilindro longo: $L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\pi r_o^2 L}{2\pi r_o L} = \frac{r_o}{2}$

Esfera: $L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{8\pi r_o^3/6}{4\pi r_o^2} = \frac{r_o}{3}$

- O expoente $(hA_s t / \rho V c)$ pode ser representado por:

$$\frac{hA_s t}{\rho V c} = \frac{ht}{\rho c L_c} = \frac{hL_c}{k} \frac{k}{\rho c} \frac{t}{L_c^2} = \frac{hL_c}{k} \frac{\alpha t}{L_c^2} = \text{Bi.Fo}$$

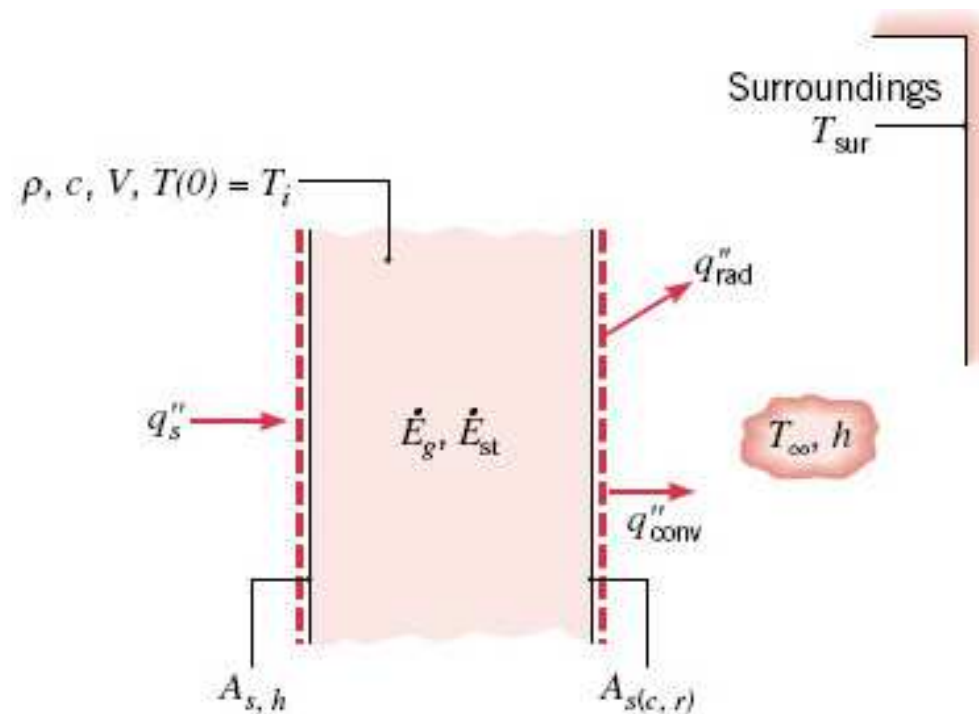
- Fo é o **número de Fourier** (tempo adimensional):

$$Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

5.3 ANÁLISE GERAL VIA CAPACITÂNCIA GLOBAL

- Condução transiente no interior de um sólido pode surgir devido a vários processos de transferência de energia, que podem agir individualmente ou em conjunto:
 1. **Convecção** para ou de um fluido adjacente (já mostrado).
 2. **Troca líquida por radiação** com uma vizinhança (separação com um gás ou vácuo).
 3. **Fluxo térmico** sobre toda a superfície ou parte dela (aquecedor elétrico delgado).

4. Geração de energia térmica (passagem de corrente elétrica).



- Considerando que $T(t=0)=T_i$, que $T_i \neq T_{\infty}$ e $T_i \neq T_{viz}$, que q_s'' age sobre $A_{s(h)}$, que q_{rad}'' e q_{conv}'' agem sobre $A_{s(c,r)}$ tem-se que:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = \dot{E}_{acu} \Rightarrow q_s'' A_{s(h)} + \dot{E}_g - q_{conv}'' A_{s(c,r)} - q_{rad}'' A_{s(c,r)} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

- Substituindo as equações de taxas para q_{conv}'' e q_{rad}'' obtém-se:

$$q_s'' A_{s(h)} + \dot{E}_g - \left[h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_{viz}^4) \right] A_{s(c,r)} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

- A equação anterior é uma equação diferencial ordinária, não-linear de primeira ordem, não-homogênea, que não pode ser integrada para se obter uma solução exata.
- **1º CASO:** sem fluxo térmico, sem geração interna de energia e sem convecção térmica.

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = -\epsilon \sigma A_{s,r} (T^4 - T_{viz}^4)$$

- Separando as variáveis e integrando de uma condição inicial até algum tempo t tem-se que:

$$\frac{\epsilon \sigma A_{s,r}}{\rho V c} \int_0^t dt = \int_{T_i}^T \frac{dT}{T_{viz}^4 - T^4}$$

- Efetuando as integrais e rearranjando, o tempo necessário para alcançar a temperatura T se torna:

$$t = \frac{\rho V c}{4 \epsilon \sigma A_{s,r} T_{viz}^3} \left\{ \ln \left| \frac{T_{viz} + T}{T_{viz} - T} \right| - \ln \left| \frac{T_{viz} + T_i}{T_{viz} - T_i} \right| + 2 \left[\tan^{-1} \left(\frac{T}{T_{viz}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{T_i}{T_{viz}} \right) \right] \right\}$$

- 2º CASO: sem radiação térmica.

$$q_s'' A_{s(h)} + \dot{E}_g - h(T - T_\infty) A_{s,c} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{q_s'' A_{s(h)} + \dot{E}_g}{\rho V c} - \frac{h A_{s,c}}{\rho V c} (T - T_\infty) = \frac{dT}{dt}$$

- Introduzindo $\theta = T - T_\infty$ onde $d\theta/dt = dT/dt$ e fazendo $a = (h A_{s,c} / \rho V c)$ e $b = [(q_s'' A_{s(h)} + \dot{E}_g) / \rho V c]$ obtém-se:

$$\frac{d\theta}{dt} + a\theta - b = 0$$

- Introduzindo a variável $\theta' = \theta - \frac{b}{a}$ de tal forma que $d\theta'/dt = d\theta/dt$ obtém-se:

$$\frac{d\theta'}{dt} + a\theta' = 0$$

- Separando variáveis e integrando de 0 até t (θ'_i até θ') segue:

$$\frac{\theta'}{\theta'_i} = \exp(-at)$$

- Substituindo as definições de θ' e θ'_i obtém-se:

$$\frac{T - T_{\infty} - (b/a)}{T_i - T_{\infty} - (b/a)} = \exp(-at)$$

- Rearranjando obtém-se:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp(-at) + \frac{b/a}{T_i - T_{\infty}} [1 - \exp(-at)]$$

- **3º CASO:** sem fluxo térmico e sem geração interna de energia.

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = [h(T - T_{\infty}) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_{viz}^4)] A_{s(c,r)}$$

- A solução desta equação diferencial pode ser obtida por integração numérica no tempo (Runge-Kutta).

- Uma alternativa aproximada consiste em **expressar o termo de radiação na forma linearizada e combinar os coeficientes de convecção e radiação**, ou seja:

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = (h + h_r) A_{s(c,r)} (T - T_\infty) = h_c A_{s(c,r)} (T - T_\infty)$$

- Foi admitido que $T_{viz} = T_\infty$ e que $h_c = h + h_r$.
- A solução para esse caso é igual à apresentada no início desse tópico e consiste em:

$$t = -\frac{\rho V c}{h_c A_{s(c,r)}} \ln \left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp \left[- \left(\frac{h_c A_{s(c,r)}}{\rho V c} \right) t \right]$$

- No cálculo do **coeficiente de radiação**, pode-se aproximar a temperatura superficial pela média aritmética no intervalo de tempo considerado, ou seja:

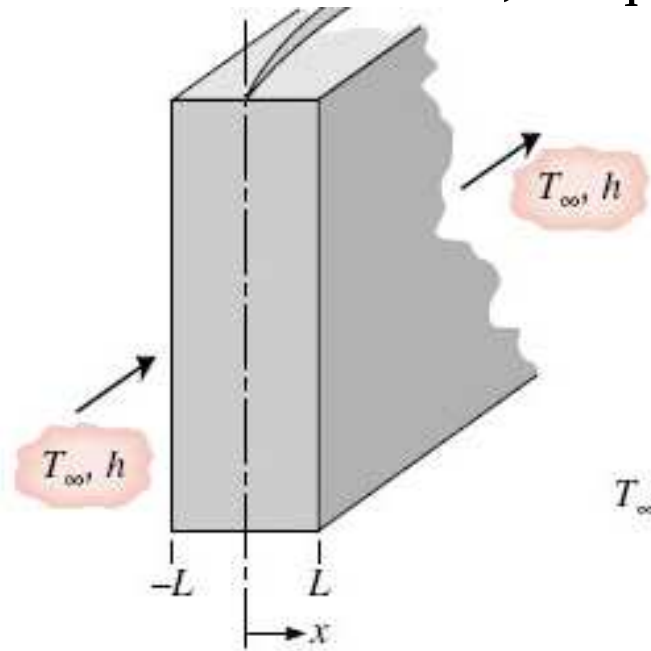
$$T_{s,m} = \frac{T_s(t=0) + T_s(t)}{2}$$

- O coeficiente de radiação é calculado então como:

$$h_r = \varepsilon \sigma (T_{s,m} + T_{viz}) (T_{s,m}^2 + T_{viz}^2)$$

5.4 EFEITOS ESPACIAIS

- Gradientes de temperatura no interior do meio não são mais desprezíveis. Para uma parede plana de espessura $2L$, com condução unidimensional em x , sem geração de energia interna e com k constante, a equação do calor se reduz a:



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \overbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)}^{=0} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}^{=0} + \overbrace{\dot{q}}^{=0} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- A solução da equação diferencial parcial anterior fornece $T(x, t)$.
- A condição inicial é:

$$T(x, 0) = T_i$$

- As condições de contorno são:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

e

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h[T(L, t) - T_\infty]$$

- Fica evidente que as temperaturas na parede dependem de:

$$T = T(x, t, T_i, T_\infty, L, k, \alpha, h)$$

- Para reduzir a dependência funcional de T faz-se a adimensionalização das equações do problema.
- A adimensionalização consiste no agrupamento das variáveis relevantes do problema em grupos adimensionais apropriados.
- TEMPERATURA ADIMENSIONAL: $\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$
- COORDENADA ESPACIAL ADIMENSIONAL: $x^* = \frac{x}{L}$
- TEMPO ADIMENSIONAL: $t^* = \frac{\alpha t}{L^2} = \text{Fo}$

- Com os adimensionais, a formulação é reescrita como:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo}$$

$$\theta^*(x^*, 0) = 1$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -Bi \theta^*(1, t^*)$$

- Nota-se agora que a **dependência funcional** é na forma:

$$\theta^* = f(x^*, Fo, Bi)$$

- Fica evidente a **vantagem** de $\theta^* = f(x^*, Fo, Bi)$ sobre $T = T(x, t, T_i, T_\infty, L, k, \alpha, h)$.

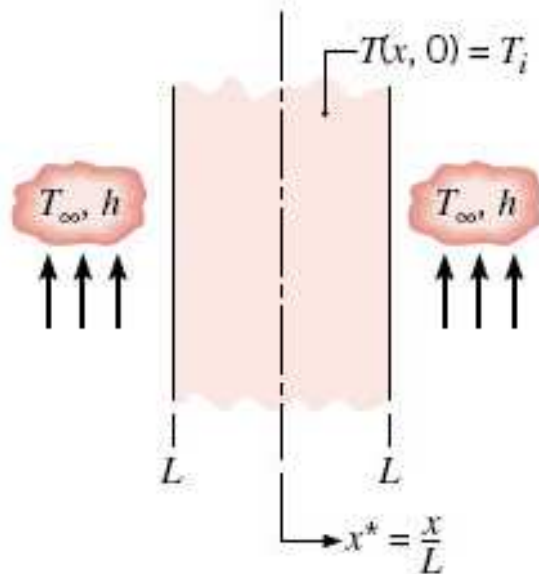
- Para uma dada geometria, a distribuição transiente de temperaturas é uma **função universal** de x^* , Fo e Bi.
- O número de Fourier é um **tempo adimensional**, embora ele tenha uma interpretação alternativa em problemas nas quais a **transferência de calor por condução através de sólidos é concorrente com o armazenamento de energia pelo sólido**:

$$\frac{q_{cond}}{\dot{E}_{acu}} = \frac{kA \frac{\Delta T}{L}}{\rho A L c \frac{\Delta T}{t}} = \frac{kt}{\rho L^2 c} = \frac{\alpha t}{L^2} = Fo$$

- O número de Fourier fornece uma medida da efetividade com a qual um sólido conduz e armazena energia térmica.

5.5 A PAREDE PLANA COM CONVECÇÃO

5.5.1 SOLUÇÃO EXATA



$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 \text{Fo}) \cos(\zeta_n x^*)$$

$$C_n = \frac{4 \text{sen} \delta_n}{2\delta_n + \text{sen}(2\delta_n)}$$

$$\zeta_n \tan \zeta_n = \text{Bi} \quad \text{Fo} = \alpha t / L^2$$

- As quatro primeiras raízes da equação transcendental são fornecidas no Apêndice B.3 do livro-texto.

5.5.2 SOLUÇÃO APROXIMADA

- Para $Fo > 0,2$ a solução em série infinita pode ser **aproximada pelo primeiro termo da série**:

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \cos(\zeta_1 x^*) \quad \text{ou} \quad \theta^* = \theta_o^* \cos(\zeta_1 x^*)$$

onde
$$\theta_o^* = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$

5.5.3 TRANSFERÊNCIA TOTAL DE ENERGIA

- É útil saber a energia total que deixou (ou entrou) a parede até um dado tempo t em um dado processo transiente.

- Da conservação da energia aplicada num **intervalo de tempo** de $t = 0$ até $t > 0$ tem-se que:

$$E_{ent} - E_{sai} = \Delta E_{acu}$$

- Fazendo $Q = E_{sai}$, $E_{ent} = 0$ e $\Delta E_{acu} = E(t) - E(0)$ obtém-se:

$$Q = -[E(t) - E(0)] \quad \text{ou} \quad Q = -\int \rho c [T(x, t) - T_i] dV$$

- É conveniente introduzir a quantidade máxima de transferência de energia que poderia ocorrer se o processo se estendesse até $t = \infty$:

$$Q_o = \rho c V (T_i - T_\infty)$$

- Pode-se então escrever a razão entre a quantidade total de energia transferida a partir da parede ao longo do intervalo de tempo t e a transferência máxima possível:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int \frac{-[T(x,t) - T_i]}{T_i - T_\infty} \frac{dV}{V} = \frac{1}{V} \int (1 - \theta^*) dV$$

- Utilizando a forma apropriada de θ^* obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{\text{sen} \zeta_1}{\zeta_1} \theta_o^*$$

- Os resultados anteriores podem ser utilizados para uma parede plana com espessura L e isolada em um dos seus lados ($x^* = 0$).

TABLE 5.1 Coefficients used in the one-term approximation to the series solutions for transient one-dimensional conduction

Bi^a	Plane Wall		Infinite Cylinder		Sphere	
	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.03	0.1723	1.0049	0.2440	1.0075	0.2991	1.0090
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.05	0.2218	1.0082	0.3143	1.0124	0.3854	1.0149
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.07	0.2615	1.0114	0.3709	1.0173	0.4551	1.0209
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.09	0.2956	1.0145	0.4195	1.0222	0.5150	1.0268
0.10	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.15	0.3779	1.0237	0.5376	1.0365	0.6609	1.0445
0.20	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.25	0.4801	1.0382	0.6856	1.0598	0.8447	1.0737
0.30	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0932	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0919	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488

1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5994	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2402	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	1.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2881	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5708	1.2733	2.4050	1.6018	3.1415	2.0000

^a $Bi = hL/k$ for the plane wall and hr_o/k for the infinite cylinder and sphere. See Figure 5.6.

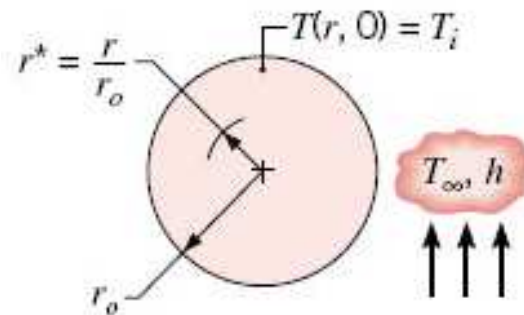
- Para utilização das tabelas acima, deve-se recalcular Biot:

$$Bi = \frac{hL}{k} \text{ (parede plana)}$$

$$Bi = \frac{hr_o}{k} \text{ (cilindro infinito e esfera)}$$

5.6 SISTEMAS RADIAIS COM CONVECÇÃO

5.6.1 SOLUÇÕES EXATAS



Cilindro Infinito

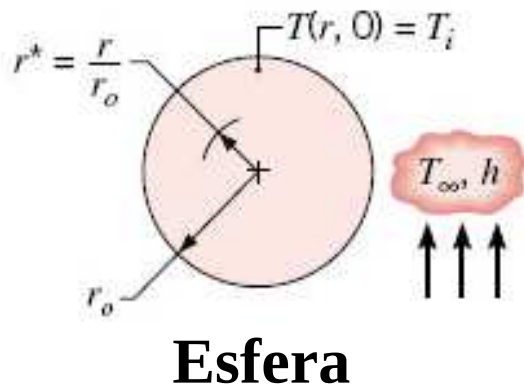
$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 \text{Fo}) J_0(\zeta_n r^*)$$

$$C_n = \frac{2}{\delta_n} \frac{J_1(\delta_n)}{J_0^2(\zeta_n) + J_1^2(\zeta_n)}$$

$$\zeta_n \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0(\zeta_n)} = \text{Bi} \quad \text{Fo} = \alpha t / r_o^2$$

- J_1 e J_0 são funções de Bessel de primeira espécie, tabeladas no Apêndice B do livro-texto.

- Raízes da equação transcendental $\zeta_n \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0(\zeta_n)} = \text{Bi}$ podem ser encontradas em livros textos especializados.



$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 \text{Fo}) \frac{1}{\zeta_n r^*} \sin(\zeta_n r^*)$$

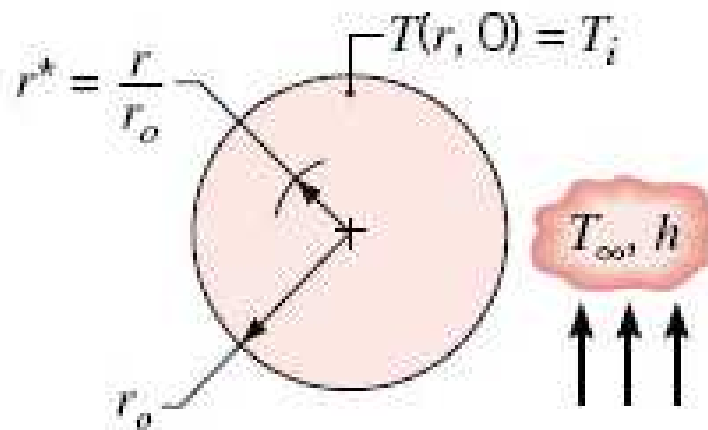
$$C_n = \frac{4[\sin(\zeta_n) - \zeta_n \cos(\zeta_n)]}{2\zeta_n - \sin(2\zeta_n)}$$

$$1 - \zeta_n \cot \zeta_n = \text{Bi} \quad \text{Fo} = \alpha t / r_o^2$$

- Raízes da equação transcendental $1 - \zeta_n \cot \zeta_n = \text{Bi}$ podem ser encontradas em livros textos especializados.

5.6.2 SOLUÇÕES APROXIMADAS

- Para $Fo > 0,2$ a solução em série infinita pode ser **aproximada pelo primeiro termo da série**:



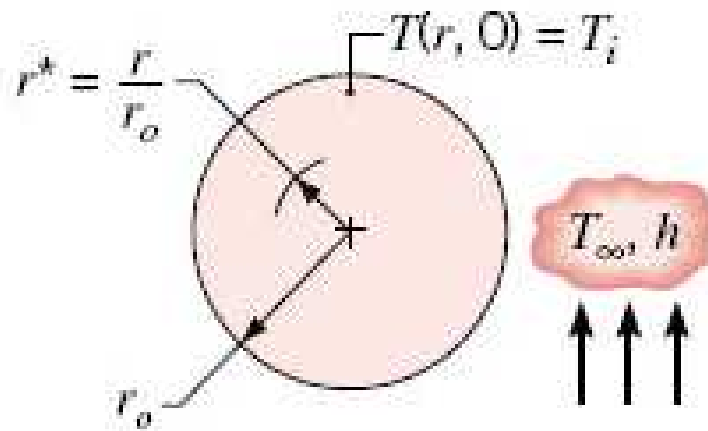
Cilindro Infinito

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) J_0(\zeta_1 r^*)$$

$$\theta^* = \theta_o^* J_0(\zeta_1 r^*)$$

$$\theta_o^* = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{2\theta_o^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1)$$



Esfera

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 \text{Fo}) \frac{1}{\zeta_1 r^*} \text{sen}(\zeta_1 r^*)$$

$$\theta^* = \theta_o^* \frac{1}{\zeta_1 r^*} \text{sen}(\zeta_1 r^*)$$

$$\theta_o^* = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp(-\zeta_1^2 \text{Fo})$$

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{3\theta_o^*}{\zeta_1^3} [\text{sen}(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1)]$$

5.6.3 CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

- Os resultados anteriores podem ser usados para prever a resposta transiente de cilindros longos e de esferas submetidos a uma **súbita mudança na temperatura superficial**.
- Para tal, um **número de Biot infinito** é estabelecido, e a temperatura no fluido T_∞ é substituída pela temperatura superficial constante T_s .

RESULTADOS DE CONDUÇÃO TRANSIENTE

Formulação concentrada ($Bi = h \cdot (V/A)/k < 0,1$)

$$Bi \cdot Fo = \frac{h \cdot A_{sup} \cdot t}{\rho \cdot V \cdot c} = \frac{t}{\tau} \quad \text{e a solução:} \quad \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-Bi \cdot Fo) \quad \text{e ainda} \quad \frac{Q(t)}{Q_0} = 1 - \theta^*(t)$$

Formulação distribuída ($Bi \geq 0,1$ e $Fo \geq 0,2$)

	Plana	Cilíndrica	Esférica
Temperaturas	$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \cos(\zeta_1 \cdot x^*)$	$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) J_0(\zeta_1 \cdot r^*)$	$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \frac{\sin(\zeta_1 \cdot r^*)}{\zeta_1 \cdot r^*}$
Equação de ζ	$\zeta \cdot \tan(\zeta) = Bi$	$\zeta \frac{J_1(\zeta)}{J_0(\zeta)} = Bi$	$1 - \frac{\zeta}{\tan(\zeta)} = Bi$
Constante C_1	$C_1 = \frac{4 \sin(\zeta_1)}{2\zeta_1 + \sin(2\zeta_1)}$	$C_1 = \frac{2}{\zeta_1} \cdot \frac{J_1(\zeta_1)}{J_0^2(\zeta_1) + J_1^2(\zeta_1)}$	$C_1 = \frac{4[\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1)]}{2\zeta_1 - \sin(2\zeta_1)}$
Energia Armazenada	$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin(\zeta_1)}{\zeta_1} \theta_{r=0}^*$	$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2 \cdot \theta_{r=0}^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1)$	$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3 \cdot \theta_{r=0}^*}{\zeta_1^3} [\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1)]$
sendo:	$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}, Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \text{ ou } \frac{\alpha t}{R^2}, Bi = \frac{h \cdot L}{k} \text{ ou } \frac{h \cdot R}{k}, \alpha = \frac{k}{\rho \cdot c}, x^* = \frac{x}{L} \quad \text{e ainda} \quad r^* = \frac{r}{R},$		