



CAPÍTULO 4 – CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME ESTACIONÁRIO

DISCIPLINA: TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA 1

PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

4.1 ABORDAGENS ALTERNATIVAS

- **1º objetivo:** determinar a distribuição de temperaturas no meio.
- **2º objetivo:** determinar o fluxo térmico em pontos de interesse.
- Para condução bidimensional em x, y em regime estacionário, sem geração de energia e com k constante obtém-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{equação de Laplace})$$

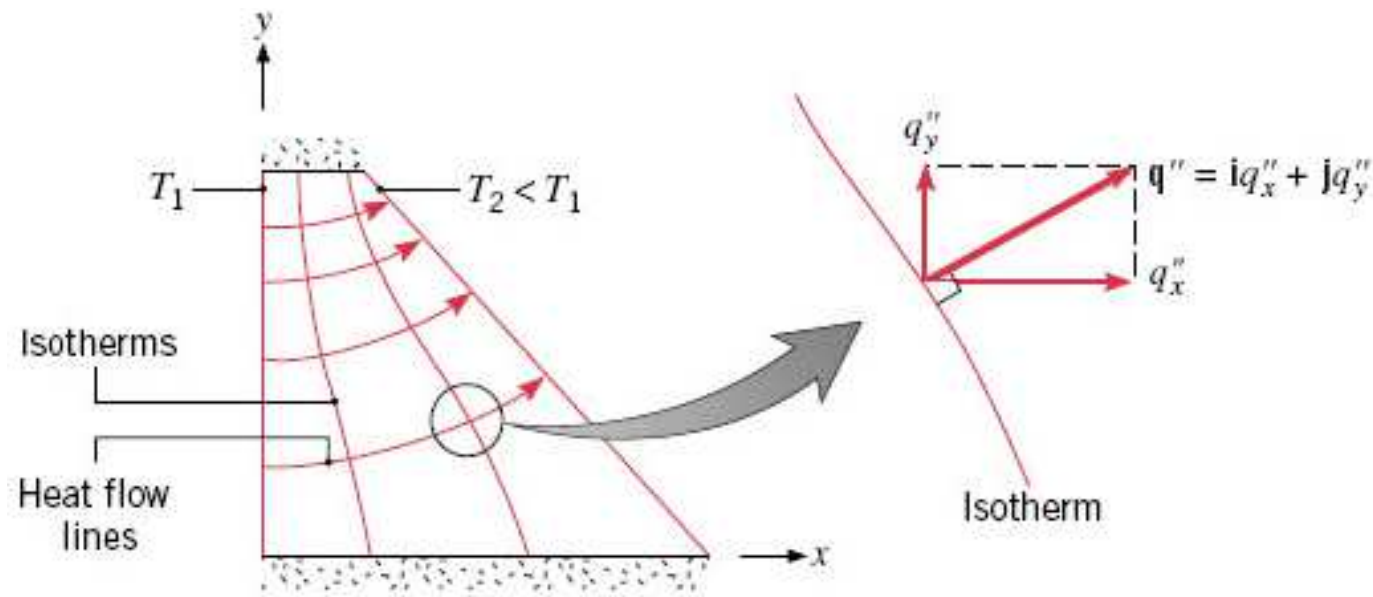
- A solução da equação anterior fornece $T(x, y)$ em qualquer ponto no interior do meio e é uma tarefa fácil determinar q_x'' e q_y'' .

- Podem ser utilizados:

1. Abordagens analíticas

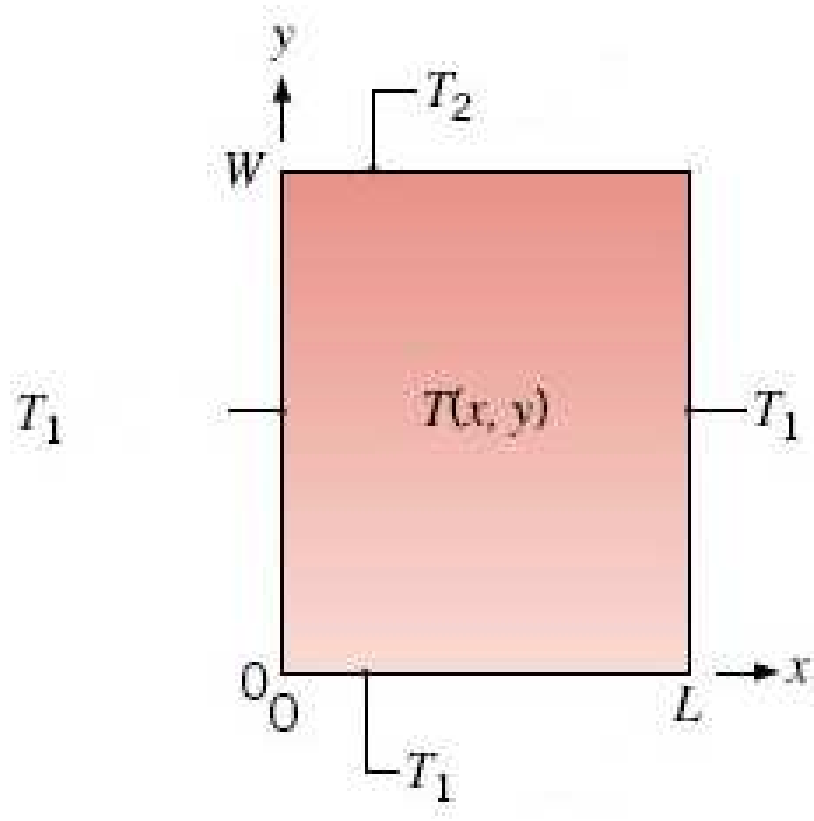
2. Soluções gráficas

3. Métodos numéricos (elementos finitos, diferenças finitas, elementos de contorno, volumes finitos)



4.2 O MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

- Seja uma placa retangular delgada ou um longo bastão retangular:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

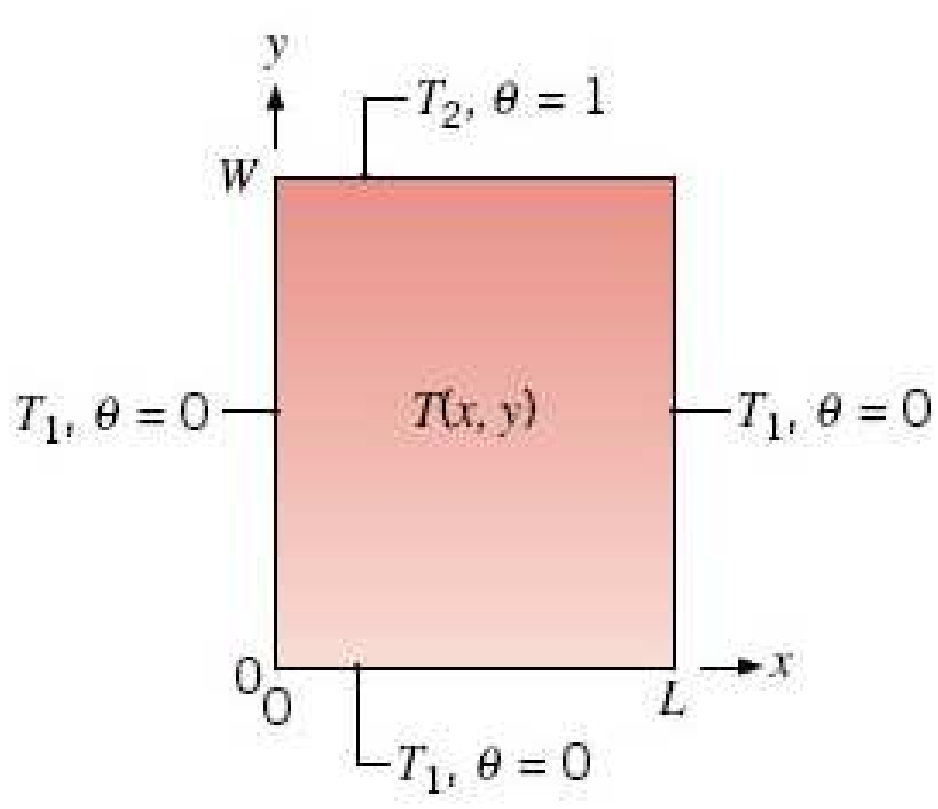
$$T(x, 0) = T_1$$

$$T(x, W) = T_2$$

$$T(0, y) = T_1$$

$$T(L, y) = T_1$$

- Introduzindo a transformação $\theta = (T - T_1)/(T_2 - T_1)$, as equações do problema são reescritas como:



$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

$$\theta(x, 0) = 0$$

$$\theta(x, W) = 1$$

$$\theta(0, y) = 0$$

$$\theta(L, y) = 0$$

- Com a transformação de variáveis, **três das quatro condições de contorno são agora homogêneas** e $0 \leq \theta \leq 1$.
- O método da **separação de variáveis** indica que a solução pretendida pode ser escrita como o **produto de duas funções**, uma dependente de x e outra dependente de y .

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y)$$

- Utilizando a solução $\theta(x, y)$ pode-se obter $\partial^2 \theta / \partial x^2$ e $\partial^2 \theta / \partial y^2$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial [X(x)Y(y)]}{\partial x} = Y(y) \frac{\partial X(x)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \left[Y(y) \frac{\partial X(x)}{\partial x} \right]}{\partial x} = Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = Y \frac{d^2 X}{dx^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial [X(x)Y(y)]}{\partial y} = X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial \left[X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right]}{\partial y} = X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = X \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

- Substituindo na equação diferencial e dividindo por XY :

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{\text{não é função de } y} = \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{\text{não é função de } x}$$

- A única forma pela qual a equação anterior seja satisfeita para quaisquer valores de x e y é que ela seja constante.

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2$$

- 1ª Equação diferencial ordinária: $\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$

- 2ª Equação diferencial ordinária: $\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0$

- Deve ser notado que a equação diferencial parcial foi reduzida a duas equações diferenciais ordinárias.
- As soluções para as duas E.D.Os são mostradas num curso básico de equações diferenciais e tem a seguinte forma:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

$$Y(y) = C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}$$

- A solução geral bidimensional tem a seguinte forma:

$$\theta(x, y) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x)(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y})$$

- Aplicando a condição $\theta(0, y) = 0$ obtém-se:

$$\theta(0, y) = (C_1 \cos \lambda 0 + C_2 \operatorname{sen} \lambda 0)(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

- Aplicando a condição $\theta(x, 0) = 0$ obtém-se:

$$\theta(x, 0) = (C_2 \operatorname{sen} \lambda x)(C_3 e^{-\lambda 0} + C_4 e^{\lambda 0}) = 0 \Rightarrow C_2 \operatorname{sen} \lambda x (C_3 + C_4) = 0$$

- Se $C_2 = 0$ obtém-se que $\theta(x, y) = 0$, o que não satisfaz a exigência que $\theta(x, W) = 1$.

- Dessa forma tem-se que $C_3 = -C_4$.

- Aplicando a condição $\theta(L, y) = 0$ e fazendo $C_3 = -C_4$ obtém-se:

$$\theta(L, y) = (C_2 \operatorname{sen} \lambda L) (-C_4 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) = 0 \Rightarrow C_2 C_4 \operatorname{sen} \lambda L (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 0$$

- A equação anterior é satisfeita quando:

$$\operatorname{sen}(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- O valor $n = 0$ foi descartado pois implica em $\theta(x, y) = 0$.
- A solução agora é expressa como:

$$\theta(x, y) = \left(C_4 C_2 \sin \frac{n\pi x}{L} \right) (e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L})$$

- Sabendo que $(e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L}) = 2\sinh(n\pi y/L)$, combinando as constantes e admitindo que a nova constante possa depender de n :

$$\theta(x, y) = \left(C_4 C_2 \sin \frac{n\pi x}{L} \right) 2\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \Rightarrow \theta(x, y) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L}$$

- Como o problema é linear, a solução pode ser escrita por superposição, ou seja:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L}$$

- Para determinar C_n utiliza-se a condição de contorno $\theta(x, W) = 1$:

$$\theta(x, W) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi W}{L} = 1$$

- A determinação de C_n é feita pela **expansão da unidade em série de Fourier**, ou seja:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- Comparando as expressões anteriores obtém-se:

$$C_n = \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{n\pi \sinh(n\pi W/L)} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Substituindo C_n na solução geral obtemos a **solução final** para θ :

$$\theta(x, y) = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$

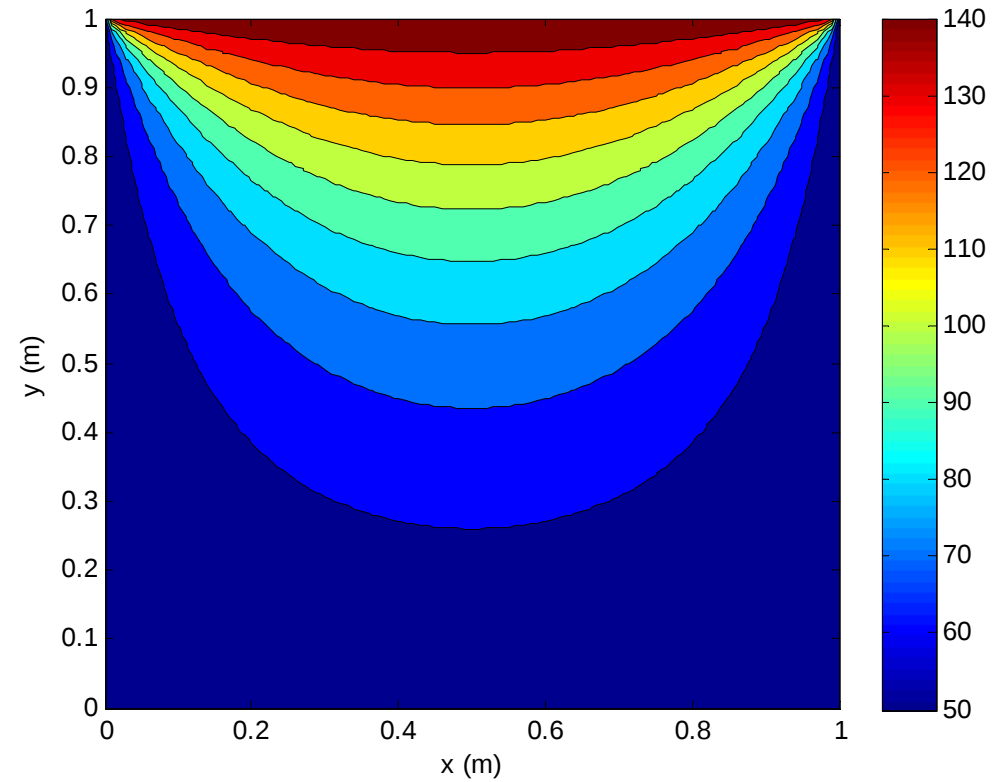
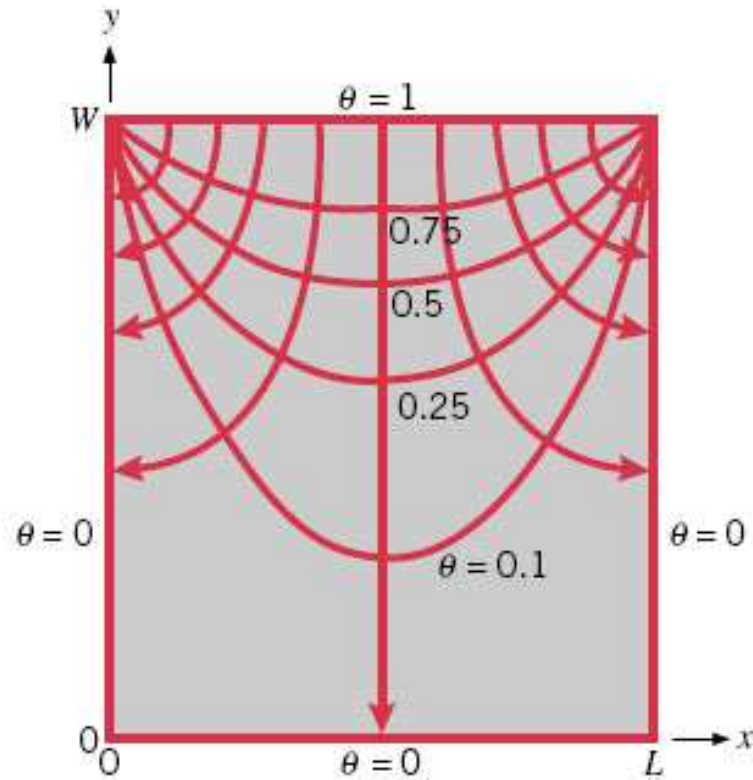
- O fluxo de calor em cada posição x, y é determinado por:

$$q'' = i q_x'' + j q_y''$$

$$q_x'' = -k(dT/dx)$$

$$q_y'' = -k(dT/dy)$$

ISOTERMAS E LINHAS DE FLUXO DE CALOR PARA A CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL EM PLACA RETANGULAR



4.3 O FATOR DE FORMA DA CONDUÇÃO E A TAXA DE CONDUÇÃO DE CALOR ADIMENSIONAL

- Alguns problemas bidimensionais e tridimensionais de transferência de calor em **regime estacionário** podem ser analisados rapidamente através do **fator de forma** S . Nesses casos, a taxa de transferência de calor é representada por:

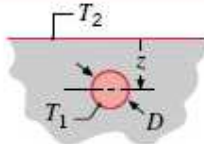
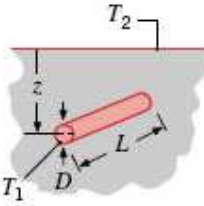
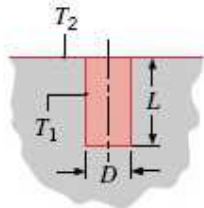
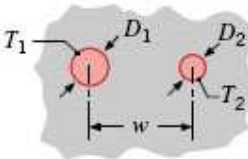
$$q = Sk\Delta T_{1-2}$$

- Uma **resistência térmica condutiva bidimensional** pode ser representada como:

$$R_{t,cond(2D)} = \frac{1}{Sk}$$

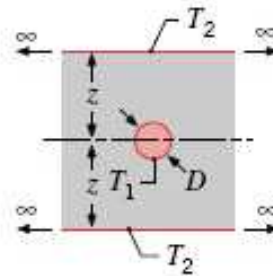
FATORES DE FORMA DA CONDUÇÃO E TAXAS DE CONDUÇÃO DE CALOR (11 casos)

(a) Shape factors [$q = Sk(T_1 - T_2)$]

System	Schematic	Restrictions	Shape Factor
Case 1 Isothermal sphere buried in a semi-infinite medium		$z > D/2$	$\frac{2\pi D}{1 - D/4z}$
Case 2 Horizontal isothermal cylinder of length L buried in a semi-infinite medium		$L \gg D$ $L \gg D$ $z > 3D/2$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$ $\frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
Case 3 Vertical cylinder in a semi-infinite medium		$L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$
Case 4 Conduction between two cylinders of length L in infinite medium		$L \gg D_1, D_2$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$

Case 5

Horizontal circular cylinder
of length L midway between
parallel planes of equal
length and infinite width

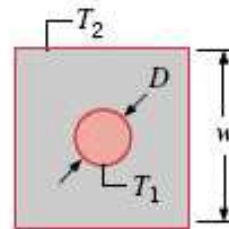


$$\begin{aligned} z &\gg D/2 \\ L &\gg z \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$$

Case 6

Circular cylinder of length L
centered in a square solid of equal length

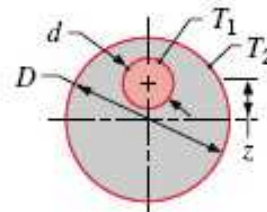


$$\begin{aligned} w &> D \\ L &\gg w \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi L}{\ln(1.08 w/D)}$$

Case 7

Eccentric circular
cylinder of length L
in a cylinder of
equal length

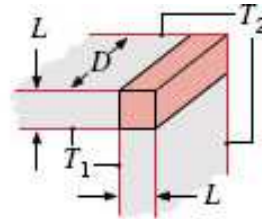


$$\begin{aligned} D &> d \\ L &\gg D \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$$

Case 8

Conduction through the edge of adjoining walls

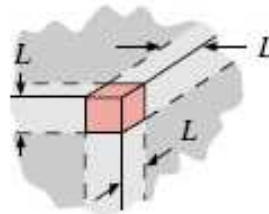


$$D > 5L$$

$$0.54D$$

Case 9

Conduction through corner of three walls with a temperature difference ΔT_{1-2} across the walls

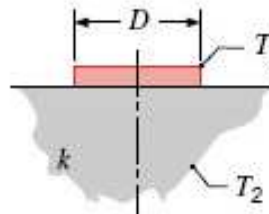


$$L \ll \text{length and width of wall}$$

$$0.15L$$

Case 10

Disk of diameter D and temperature T_1 on a semi-infinite medium of thermal conductivity k and temperature T_2

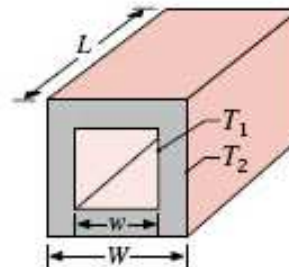


$$\text{None}$$

$$2D$$

Case 11

Square channel of length L



$$\frac{W}{w} < 1.4$$

$$\frac{2\pi L}{0.785 \ln(W/w)}$$

$$\frac{W}{w} > 1.4$$

$$\frac{2\pi L}{0.930 \ln(W/w) - 0.050}$$

$$L \gg W$$

- Para casos que envolvem meio infinito resultados úteis podem ser obtidos com a definição de um **comprimento característico**:

$$L_c = \left(\frac{A_s}{4\pi} \right)^{1/2}$$

- A taxa de transferência de calor é calculada em termos de uma **taxa de condução adimensional**:

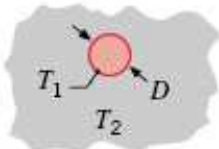
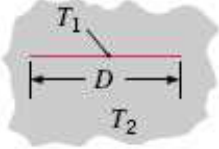
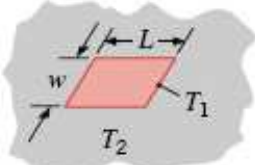
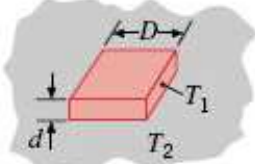
$$q_{re}^* = qL_c / kA_s (T_1 - T_2)$$

- Dessa forma a taxa de condução é:

$$q = q_{re}^* kA_s (T_1 - T_2) / L_c$$

FATORES DE FORMA DA CONDUÇÃO E TAXAS DE CONDUÇÃO DE CALOR ADIMENSIONAIS (11 casos)

(b) Dimensionless conduction heat rates [$q = q_{ss}^* k A_s (T_1 - T_2) / L_c$; $L_c \equiv (A_s / 4\pi)^{1/2}$]

System	Schematic	Active Area, A_s	q_{ss}^*										
Case 12 Isothermal sphere of diameter D and temperature T_1 in an infinite medium of temperature T_2		πD^2	1										
Case 13 Infinitely thin, isothermal disk of diameter D and temperature T_1 in an infinite medium of temperature T_2		$\frac{\pi D^2}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0.900$										
Case 14 Infinitely thin rectangle of length L , width w , and temperature T_1 in an infinite medium of temperature T_2		$2wL$	0.932										
Case 15 Cuboid shape of height d with a square footprint of width D and temperature T_1 in an infinite medium of temperature T_2		$2D^2 + 4Dd$	<table> <tr> <th>d/D</th> <th>q_{ss}^*</th> </tr> <tr> <td>0.1</td> <td>0.943</td> </tr> <tr> <td>1.0</td> <td>0.956</td> </tr> <tr> <td>2.0</td> <td>0.961</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>1.111</td> </tr> </table>	d/D	q_{ss}^*	0.1	0.943	1.0	0.956	2.0	0.961	10	1.111
d/D	q_{ss}^*												
0.1	0.943												
1.0	0.956												
2.0	0.961												
10	1.111												

- Para geometrias unidimensionais fatores de forma também podem ser definidos:

Parede plana: $S = \frac{A}{L}$

Parede cilíndrica: $S = \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)}$

Parede esférica: $S = \frac{4\pi r_1 r_2}{(r_2 - r_1)}$