



CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME ESTACIONÁRIO – PARTE 2

DISCIPLINA: TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA 1

PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

3.5 CONDUÇÃO COM GERAÇÃO DE ENERGIA TÉRMICA

- Em particular, **energia térmica está sendo gerada** devido à conversão de outra forma de energia.
- Um processo comum de geração de energia térmica é a conversão de energia elétrica em energia térmica em um meio que conduz corrente elétrica (aquecimento ôhmico, resistivo ou de Joule).
- Taxa na qual a energia é gerada em função da passagem de uma corrente I através de um meio com resistência elétrica R_e é:

$$\dot{E}_g = I^2 R_e$$

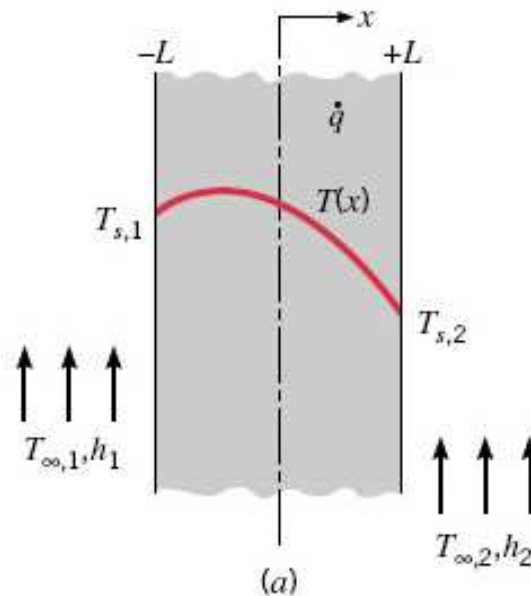
- Se a geração de potência ocorre de maneira uniforme ao longo de um volume V , a taxa volumétrica de geração de energia é:

$$\dot{q} = \frac{\dot{E}_g}{V} = \frac{I^2 R_e}{V}$$

- Outros exemplos de geração de energia térmica:
 - 1.Desaceleração e absorção de nêutrons num elemento combustível.
 - 2.Reações químicas exotérmicas (fonte de energia térmica).
 - 3.Reações químicas endotérmicas (sumidouro de energia térmica).
 - 4.Absorção de radiação no interior de um meio (revestimentos, blindagens térmicas, vasos de pressão, etc.).

3.5.1 A PAREDE PLANA

- Seja uma parede plana de espessura $2L$, com k e $\dot{q}$ constantes e com superfícies mantidas a $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$.



- Equação de difusão em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \overbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)}^{=0} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}^{=0} + \dot{q} = \overbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}^{=0}$$

- Para condução unidimensional em x , regime estacionário com geração interna de calor uniforme obtém-se:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{k}$$

- A **equação diferencial ordinária** anterior pode ser integrada duas vezes para se obter a **solução geral**:

$$\int \frac{d^2 T}{dx^2} dx = -\int \frac{\dot{q}}{k} dx \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k} x + C_1$$

$$\int \frac{dT}{dx} dx = -\int \frac{\dot{q}}{k} x dx + \int C_1 dx \Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + C_1 x + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de **condições de contorno de primeira espécie** em $x = -L$ e $x = L$, ou seja:

$$T(x = -L) = T_{s,1} \quad \text{e} \quad T(x = L) = T_{s,2}$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2L} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a **solução particular** para a **distribuição de temperaturas na parede**:

$$T(x) = \frac{\dot{q}L}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2} \frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

- A taxa de transferência de calor pode ser obtida através da **Lei de Fourier**:

$$q(x) = -kA_x \frac{dT}{dx} = -kA_x \left(-\frac{\dot{q}}{k} x + C_1 \right) = -kA_x \left(-\frac{\dot{q}}{k} x + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2L} \right)$$

$$q(x) = \left[\dot{q}x - \frac{k}{2L} (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] A_x$$

- O fluxo de calor $q''(x)$ é obtido dividindo $q(x)$ por A_x , ou seja:

$$q''(x) = \dot{q}x - \frac{k}{2L} (T_{s,2} - T_{s,1})$$

- Nota-se que a taxa de transferência de calor não é mais independente de x .

3.5.1.1 CONDIÇÕES SUPERFICIAIS ALTERNATIVAS

- FLUXO TÉRMICO NA SUPERFÍCIE UNIFORME:

$$x = -L: q_{s,1}'' = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=-L} = -k \left[-\frac{\dot{q}}{k}(-L) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2L} \right]$$

$$q_{s,1}'' = -\dot{q}L - \frac{k}{2L}(T_{s,2} - T_{s,1})$$

$$x = L: q_{s,2}'' = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = -k \left[-\frac{\dot{q}}{k}(L) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2L} \right]$$

$$q_{s,2}'' = \dot{q}L - \frac{k}{2L}(T_{s,2} - T_{s,1})$$

- COEFICIENTE DE TRANSPORTE E TEMPERATURA AMBIENTE ESPECIFICADAS:

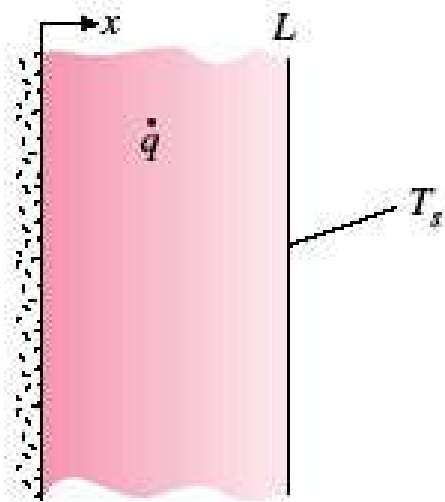
$$x = -L: h_1(T_{\infty,1} - T_{s,1}) = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=-L}$$

$$h_1(T_{\infty,1} - T_{s,1}) = -\dot{q}L - \frac{k}{2L}(T_{s,2} - T_{s,1})$$

$$x = L: h_2(T_{s,2} - T_{\infty,2}) = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L}$$

$$h_2(T_{s,2} - T_{\infty,2}) = \dot{q}L - \frac{k}{2L}(T_{s,2} - T_{s,1})$$

3.5.1.2 A PAREDE PLANA COM SUPERFÍCIE ADIABÁTICA



Solução geral:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k}x + C_1$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de **condições de contorno de segunda e primeira espécies**, respectivamente em $x = 0$ e $x = L$, ou seja:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

e

$$T(x=L) = T_s$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + T_s$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a **solução particular** para a **distribuição de temperaturas na parede**:

$$T(x) = \frac{\dot{q}L}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + T_s$$

- A taxa de transferência de calor pode ser obtida através da **Lei de Fourier**:

$$q(x) = -kA_x \frac{dT}{dx} = -kA_x \left(-\frac{\dot{q}}{k}x + C_1 \right) = -kA_x \left(-\frac{\dot{q}}{k}x + 0 \right)$$

$$q(x) = \dot{q}x A_x$$

- O fluxo de calor $q''(x)$ é obtido dividindo $q(x)$ por A_x , ou seja:

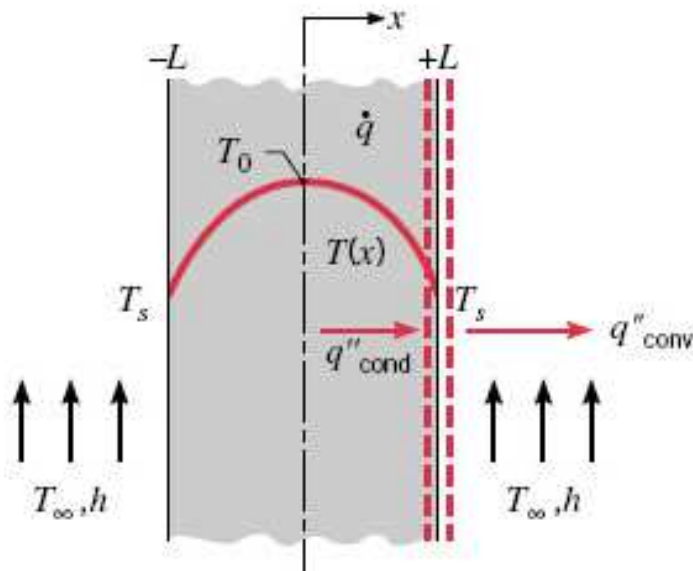
$$q''(x) = \dot{q}$$

- COEFICIENTE DE TRANSPORTE E TEMPERATURA AMBIENTE ESPECIFICADAS EM $x = L$:

$$x = L: q''(x = L) = h(T_s - T_\infty) \Rightarrow \dot{q}L = h(T_s - T_\infty)$$

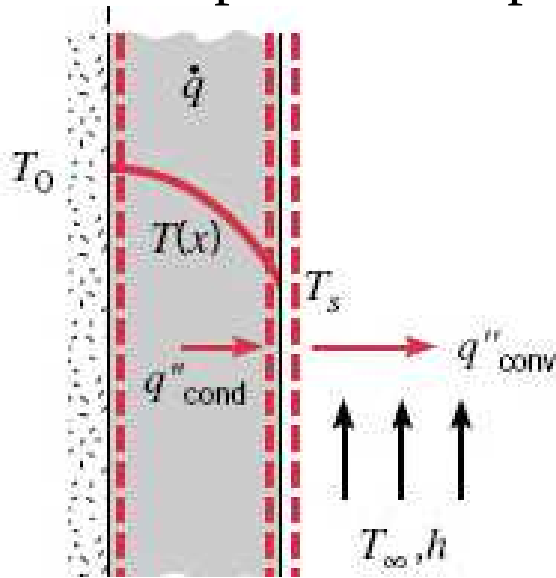
- No caso especial em que $T_{s,1} = T_{s,2} = T_s$ a **distribuição de temperatura é simétrica** com relação ao plano central:

$$T(x) = \frac{\dot{q}L}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2} \frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2} \Rightarrow T(x) = \frac{\dot{q}L}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + T_s$$



$$T_{\max} = T(x = 0) = T_0 = \frac{\dot{q}L}{2k} + T_s$$

- No plano de simetria o gradiente de temperatura é nulo, ou seja, $(dT/dx)_{x=0} = 0$.
- Assim, **não há transferência de calor cruzando esse plano** e ele pode ser representado por uma **superfície adiabática**.

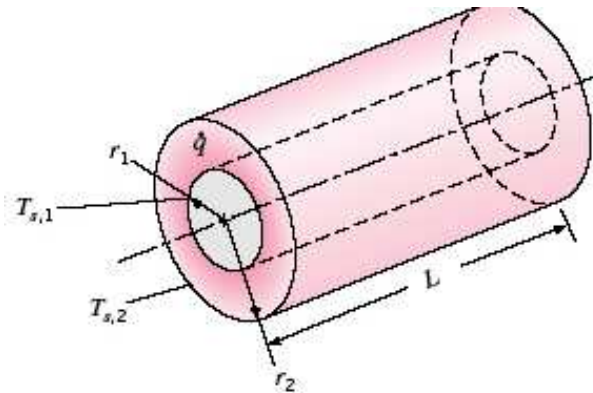


$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

- Os resultados anteriores se aplicam para paredes planas que têm uma de suas superfícies ($x = 0$) **perfeitamente isolada**, enquanto a outra superfície ($x = L$) é mantida a uma **temperatura fixa** T_s .

3.5.2 CASCA CILÍNDRICA

- Seja um cilindro oco de comprimento L , com k e $\dot{q}$ constantes e com superfícies mantidas a $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$ respectivamente em r_1 e r_2 .



- Equação de difusão em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \overbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)}^{=0} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}^{=0} + \dot{q} = \overbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}^{=0}$$

- Para condução unidimensional em r , regime estacionário com geração interna de calor uniforme obtém-se:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{\dot{q}r}{k}$$

- A equação diferencial ordinária anterior pode ser integrada duas vezes para se obter a solução geral:

$$\int \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr = - \int \frac{\dot{q}r}{k} dr \Rightarrow \frac{dT}{dr} = - \frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{C_1}{r}$$

$$\int \frac{dT}{dr} dr = - \int \frac{\dot{q}r}{2k} dr + \int \frac{C_1}{r} dr \Rightarrow T(r) = - \frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de **condições de contorno de primeira espécie** em $r = r_1$ e $r = r_2$, ou seja:

$$T(r = r_1) = T_{s,1} \quad \text{e} \quad T(r = r_2) = T_{s,2}$$

- Substituindo as condições de contorno na solução geral obtém-se:

$$C_1 = \frac{1}{\ln(r_2/r_1)} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]$$

$$C_2 = T_{s,2} + \frac{\dot{q}r_2^2}{4k} - \frac{\ln r_2}{\ln(r_2/r_1)} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a **solução particular** para a **distribuição de temperaturas na parede**:

$$T(r) = T_{s,2} + \frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right) - \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}$$

- A taxa de transferência de calor é obtida pela lei de Fourier:

$$q(r) = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL) \left\{ -\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{C_1}{r} \right\}$$

$$q(r) = -k(2\pi rL) \left\{ -\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{1}{r \ln(r_2/r_1)} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \right\}$$

$$q(r) = \dot{q}\pi L r^2 - \frac{2\pi L k}{\ln(r_2/r_1)} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]$$

- O fluxo de calor $q''(r)$ é obtido dividindo $q(r)$ por $A_r = 2\pi rL$:

$$q''(r) = \frac{\dot{q}r}{2} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r \ln(r_2/r_1)}$$

- Nota-se que a taxa de transferência de calor não é mais independente de r .

3.5.2.1 CONDIÇÕES SUPERFICIAIS ALTERNATIVAS

- FLUXO TÉRMICO NA SUPERFÍCIE UNIFORME:

$$r = r_1: q_{s,1}'' = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1} = -k \left\{ -\frac{\dot{q}r_1}{2k} + \frac{1}{r_1 \ln(r_2/r_1)} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \right\}$$

$$q_{s,1}'' = \frac{\dot{q}r_1}{2} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r_1 \ln(r_2/r_1)}$$

$$r = r_2: q_{s,2}'' = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_2} = -k \left\{ -\frac{\dot{q}r_2}{2k} + \frac{1}{r_2 \ln(r_2/r_1)} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \right\}$$

$$q_{s,2}'' = \frac{\dot{q}r_2}{2} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r_2 \ln(r_2/r_1)}$$

- COEFICIENTE DE TRANSPORTE E TEMPERATURA AMBIENTE ESPECIFICADAS:

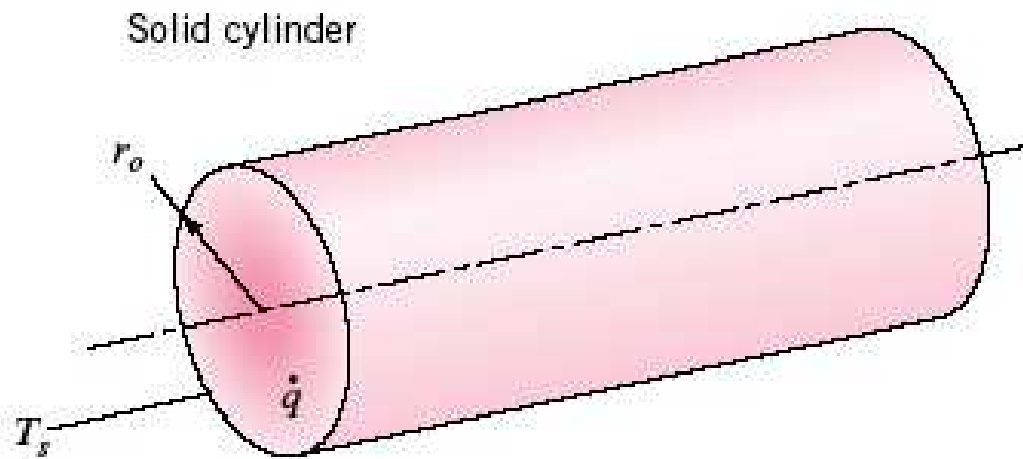
$$r = r_1: h_1(T_{\infty,1} - T_{s,1}) = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1}$$

$$h_1(T_{\infty,1} - T_{s,1}) = \frac{\dot{q}r_1}{2} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r_1 \ln(r_2/r_1)}$$

$$r = r_2: h_2(T_{s,2} - T_{\infty,2}) = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_2}$$

$$h_2(T_{s,2} - T_{\infty,2}) = \frac{\dot{q}r_2}{2} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r_2 \ln(r_2/r_1)}$$

3.5.2.2 O CILINDRO SÓLIDO



Solução geral:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{C_1}{r}$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de **condições de contorno de segunda e primeira espécies**, respectivamente em $r = 0$ e $r = r_o$, ou seja:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

e

$$T(r = r_o) = T_s$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\dot{q}r_o^2}{4k} + T_s$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a **solução particular** para a **distribuição de temperaturas no cilindro**:

$$T(r) = \frac{\dot{q}r_o^2}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{r_o^2} \right) + T_s$$

- A taxa de transferência de calor pode ser obtida pela **Lei de Fourier**:

$$q(r) = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL) \left(-\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{C_1}{r} \right) = -k(2\pi rL) \left(-\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{0}{r} \right)$$

$$q(r) = \dot{q}\pi L r^2$$

- O fluxo de calor $q_r''(r)$ é obtido dividindo $q(r)$ por $A_r = 2\pi rL$, ou seja:

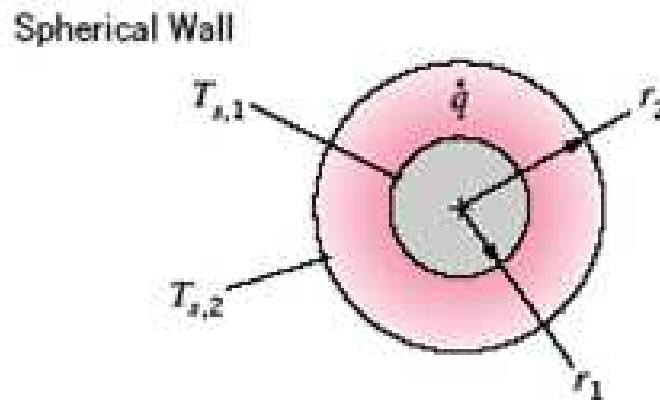
$$q''(r) = \frac{\dot{q}r}{2}$$

- COEFICIENTE DE TRANSPORTE E TEMPERATURA AMBIENTE ESPECIFICADAS EM $r = r_o$:

$$r = r_o: q''(r = r_o) = h(T_s - T_\infty) \Rightarrow \frac{\dot{q} r_o}{2} = h(T_s - T_\infty)$$

3.5.3 CASCA ESFÉRICA

- Seja uma esfera oca, com k e $\dot{q}$ constantes e com superfícies mantidas a $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$ respectivamente em r_1 e r_2 .



- Equação de difusão em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \overbrace{\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)}^{=0} + \overbrace{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}^{=0} + \dot{q} = \overbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}^{=0}$$

- Para condução unidimensional em r , regime estacionário com geração interna de calor uniforme obtém-se:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{\dot{q} r^2}{k}$$

- A equação diferencial ordinária anterior pode ser integrada duas vezes para se obter a solução geral:

$$\int \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) dr = - \int \frac{\dot{q} r^2}{k} dr \Rightarrow \frac{dT}{dr} = - \frac{\dot{q} r}{3k} + C_1 r^{-2}$$

$$\int \frac{dT}{dr} dr = - \int \frac{\dot{q} r}{3k} dr + \int C_1 r^{-2} dr \Rightarrow T(r) = - \frac{\dot{q} r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de **condições de contorno de primeira espécie** em $r = r_1$ e $r = r_2$, ou seja:

$$T(r = r_1) = T_{s,1} \quad \text{e} \quad T(r = r_2) = T_{s,2}$$

- Substituindo as condições de contorno na solução geral obtém-se:

$$C_1 = \frac{1}{(1/r_1) - (1/r_2)} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]$$

$$C_2 = T_{s,2} + \frac{\dot{q}r_2^2}{6k} + \frac{1}{r_2[(1/r_1) - (1/r_2)]} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a **solução particular** para a **distribuição de temperaturas na esfera**:

$$T(r) = T_{s,2} + \frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right) - \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \frac{(1/r) - (1/r_2)}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

- A taxa de transferência de calor é obtida pela lei de Fourier:

$$q(r) = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2) \left\{ -\frac{\dot{q}r}{3k} + C_1 r^{-2} \right\}$$

$$q(r) = -k(4\pi r^2) \left\{ -\frac{\dot{q}r}{3k} + \frac{1}{r^2[(1/r_1) - (1/r_2)]} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \right\}$$

$$q(r) = \frac{\dot{q}4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{[(1/r_1) - (1/r_2)]}$$

- O fluxo de calor $q''(r)$ é obtido dividindo $q(r)$ por $A_r = 4\pi r^2$:

$$q''(r) = \frac{\dot{q}r}{3} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r^2[(1/r_1) - (1/r_2)]}$$

- Nota-se que a taxa de transferência de calor não é mais independente de r .

3.5.3.1 CONDIÇÕES SUPERFICIAIS ALTERNATIVAS

- FLUXO TÉRMICO NA SUPERFÍCIE UNIFORME:

$$r = r_1: q_{s,1}'' = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1} = -k \left\{ -\frac{\dot{q}r_1}{3k} + \frac{1}{r_1^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \right\}$$

$$q_{s,1}'' = \frac{\dot{q}r_1}{3} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r_1^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]}$$

$$r = r_2: q_{s,2}'' = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_2} = -k \left\{ -\frac{\dot{q}r_2}{3k} + \frac{1}{r_2^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \right\}$$

$$q_{s,2}'' = \frac{\dot{q}r_2}{3} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r_2^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]}$$

- COEFICIENTE DE TRANSPORTE E TEMPERATURA AMBIENTE ESPECIFICADAS:

$$r = r_1: h_1(T_{\infty,1} - T_{s,1}) = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1}$$

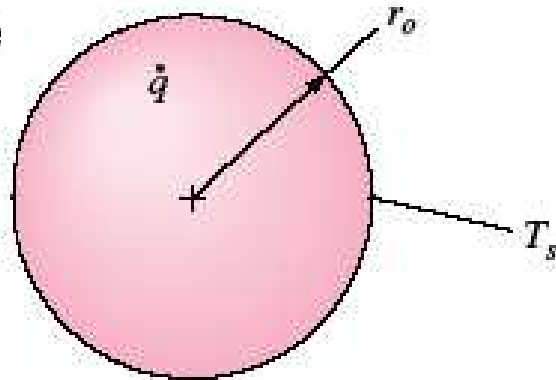
$$h_1(T_{\infty,1} - T_{s,1}) = \frac{\dot{q}r_1}{3} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r_1^2 \left[(1/r_1) - (1/r_2) \right]}$$

$$r = r_2: h_2(T_{s,2} - T_{\infty,2}) = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_2}$$

$$h_2(T_{s,2} - T_{\infty,2}) = \frac{\dot{q}r_2}{3} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r_2^2 \left[(1/r_1) - (1/r_2) \right]}$$

3.5.3.2 A ESFERA SÓLIDA

Solid sphere



Solução geral:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{3k} + C_1 r^{-2}$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de **condições de contorno de segunda e primeira espécies**, respectivamente em $r = 0$ e $r = r_o$, ou seja:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

e

$$T(r = r_o) = T_s$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\dot{q}r_o^2}{6k} + T_s$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a **solução particular** para a **distribuição de temperaturas na esfera**:

$$T(r) = \frac{\dot{q}r_o^2}{6k} \left(1 - \frac{r^2}{r_o^2} \right) + T_s$$

- A taxa de transferência de calor pode ser obtida pela **lei de Fourier**:

$$q(r) = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2) \left(-\frac{\dot{q}r}{3k} + \frac{C_1}{r^2} \right) = -k(4\pi r^2) \left(-\frac{\dot{q}r}{3k} + \frac{0}{r^2} \right)$$

$$q(r) = \frac{\dot{q}4\pi r^3}{3}$$

- O fluxo de calor $q''(r)$ é obtido dividindo $q(r)$ por $A_r = 4\pi r^2$, ou seja:

$$q''(r) = \frac{\dot{q}r}{3}$$

- COEFICIENTE DE TRANSPORTE E TEMPERATURAS ESPECIFICADAS EM $r = r_o$:

$$r = r_o: q''(r = r_o) = h(T_s - T_\infty) \Rightarrow \frac{\dot{q}r_o}{3} = h(T_s - T_\infty)$$

3.5.4 APLICAÇÕES DO CONCEITO DE RESISTÊNCIA

- Como a taxa de transferência de calor não é uma constante independente da coordenada espacial, seria **incorreto** utilizar os conceitos de resistências condutivas.