



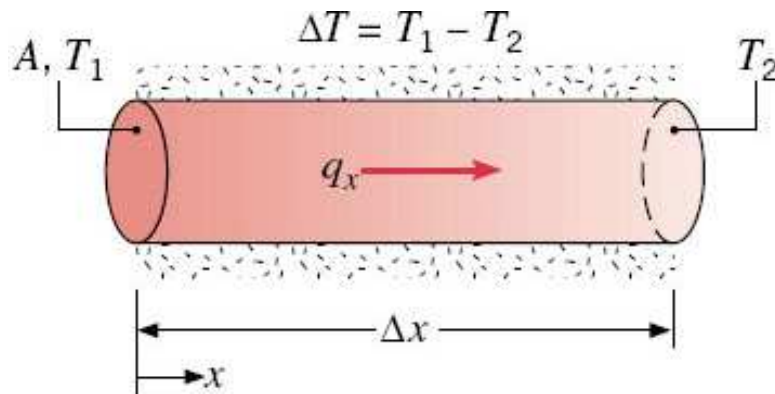
## **CAPÍTULO 2 – INTRODUÇÃO À CONDUÇÃO**

**DISCIPLINA: TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA 1**

**PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA**

## 2.1 A EQUAÇÃO DA TAXA DE CONDUÇÃO

- A lei de Fourier é baseada em **evidências experimentais**.
- De acordo com o experimento abaixo:



$$q_x \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

- Se mudarmos o material da barra, a proporcionalidade  $\propto$  permanece válida.

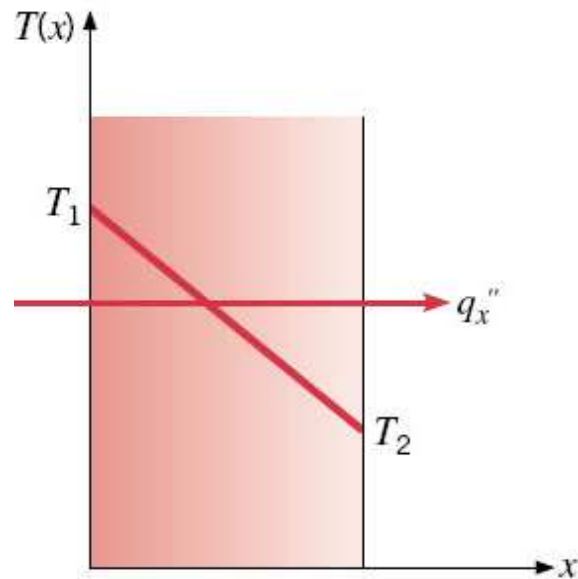
- Essa proporcionalidade pode ser convertida em uma igualdade pela introdução de um coeficiente que é uma **medida do comportamento do material**.
- Esse coeficiente é a **condutividade térmica**  $k$  (W/m.K).
- $k$  é uma medida da facilidade ou dificuldade em se conduzir calor através de um meio.
- Para isolantes,  $k \downarrow$ , enquanto para condutores  $k \uparrow$ .
- No limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , a **taxa de transferência de calor** é:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

- O **fluxo de calor** (fluxo térmico) é:

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx}$$

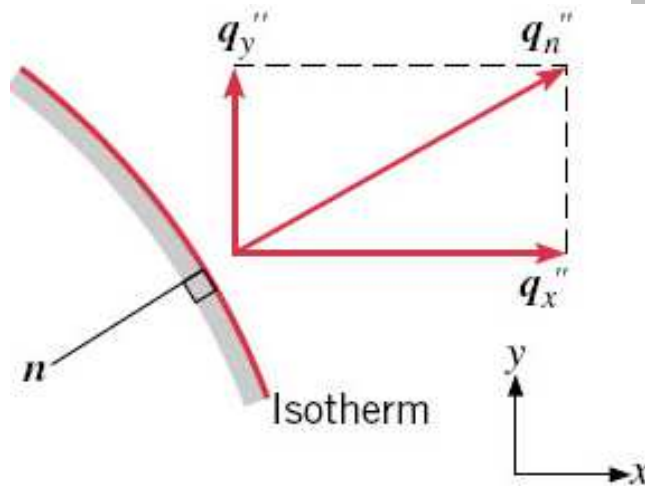
- $q_x''$  é uma **grandeza direcional**. Em particular, é **normal à área da seção transversal** (normal a uma isoterma).



- Como o **fluxo de vetor é vetorial** podemos escrever a lei de Fourier de uma forma mais geral utilizando o operador gradiente:

$$q'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial x} + j\frac{\partial T}{\partial y} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

- Uma forma alternativa da Lei de Fourier é  $q_n'' = -k\frac{\partial T}{\partial n}$



- $q_n''$  é o fluxo térmico em uma direção  $n$ , normal a uma isoterma.
- O vetor fluxo térmico pode ser expresso como:

$$\mathbf{q}'' = i q_x'' + j q_y'' + k q_z''$$

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

- As equações são válidas para **meio isotrópico**,  $k \neq k(x, y, z)$ .
- A lei de Fourier se aplica a sólidos, líquidos e gases.

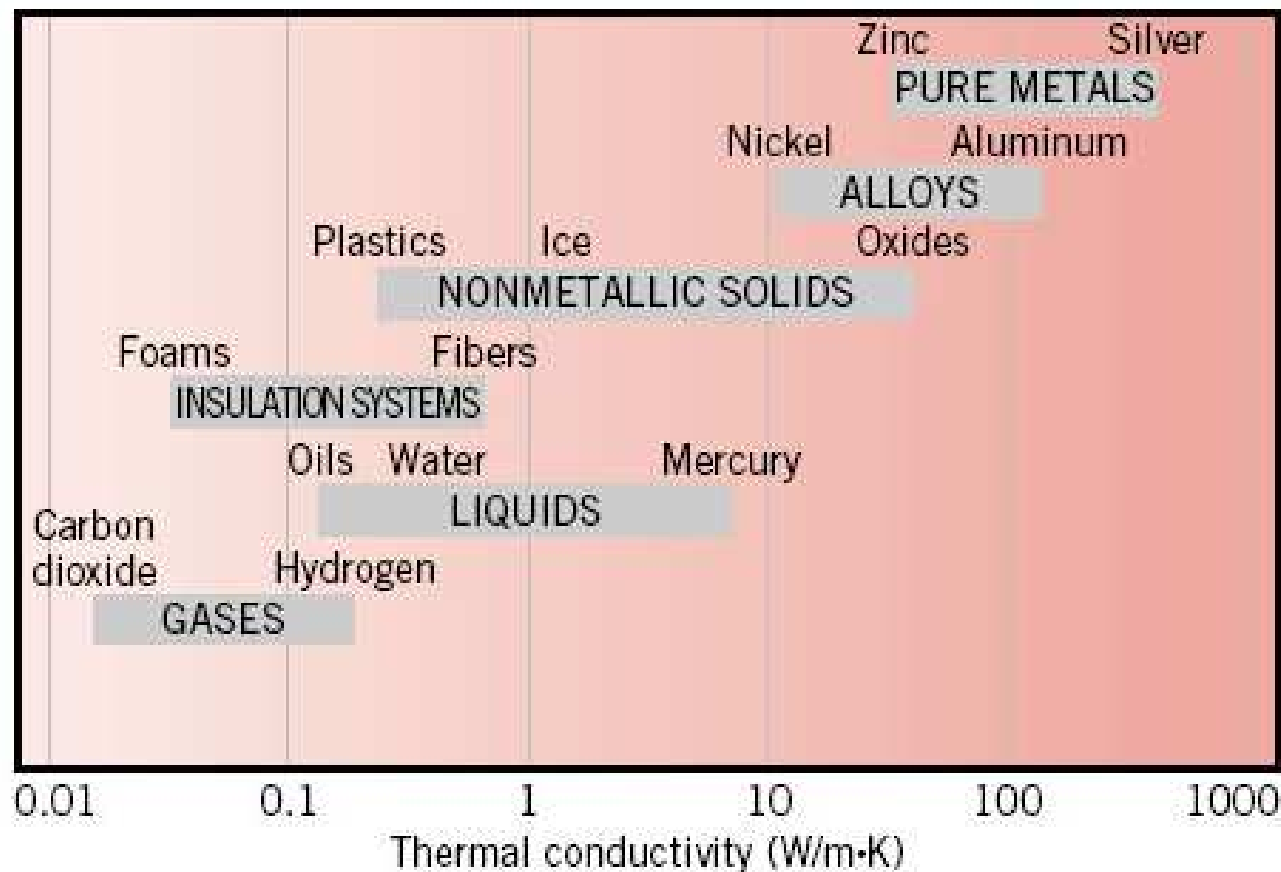
## 2.2 AS PROPRIEDADES TÉRMICAS DA MATÉRIA

- $k$  depende da estrutura física da matéria, atômica e molecular.

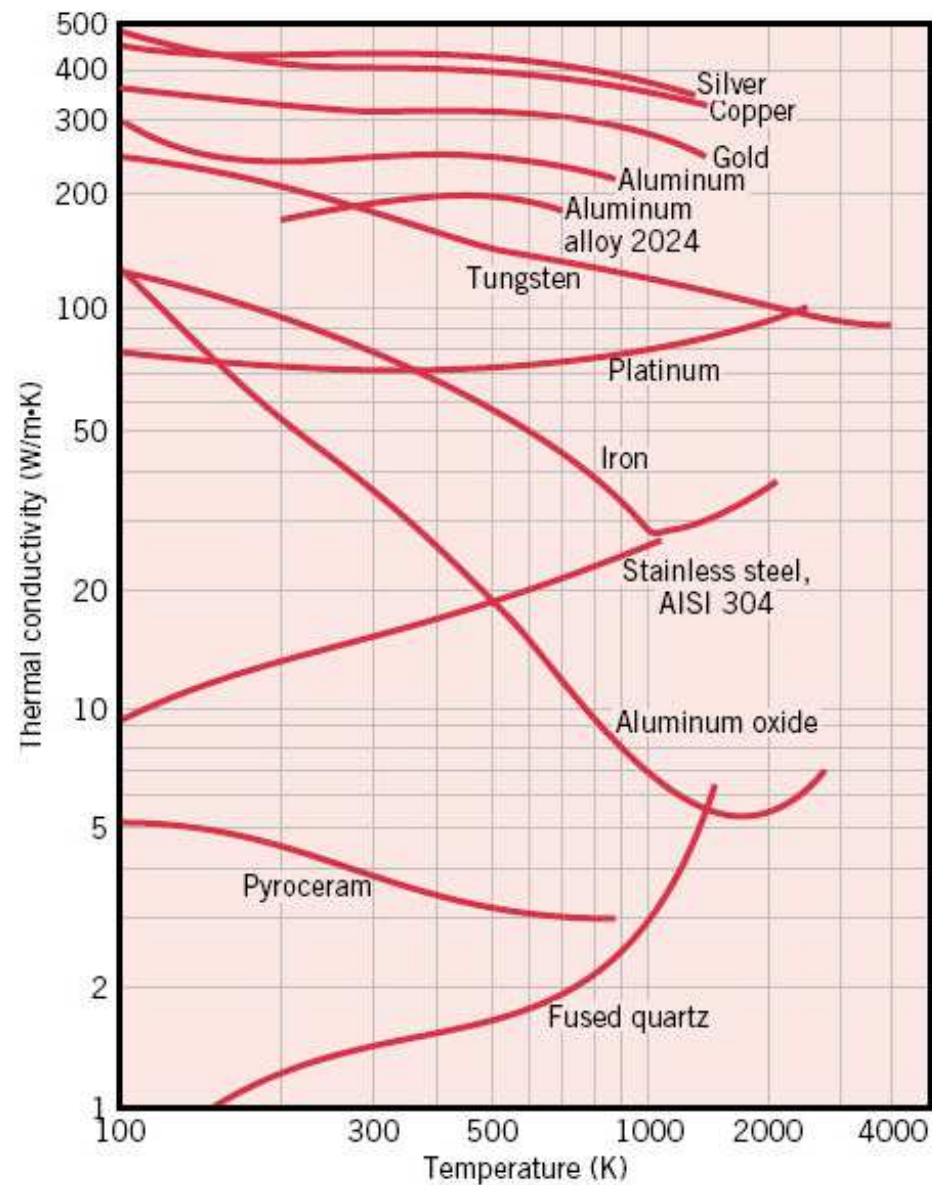
- $k$  é uma indicação da taxa na qual a energia é transferida pelo processo de difusão.

### 2.2.1 CONDUTIVIDADE TÉRMICA

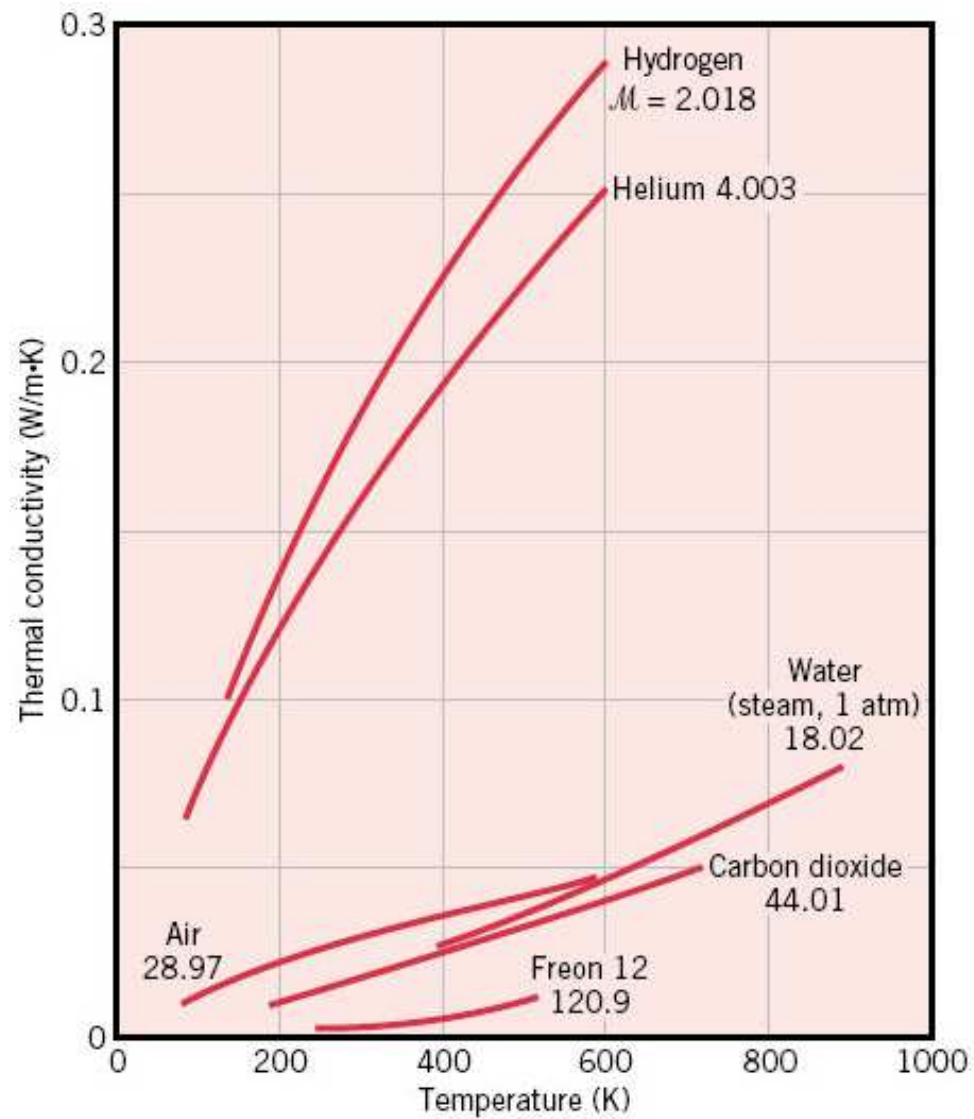
- Pela lei de Fourier,  $k_x$  é definida como:  $k_x = -\frac{q_x''}{(\partial T / \partial x)}$
- Definições similares surgem em  $y$  e  $z$ , ou seja,  $k_y$  e  $k_z$ .
- Para um material isotrópico,  $k$  é independente da direção da transferência, ou seja,  $k_x = k_y = k_z = k$ .
- Em geral,  $k_{\text{sólidos}} > k_{\text{líquidos}} > k_{\text{gases}}$  (espaçamento intermolecular).



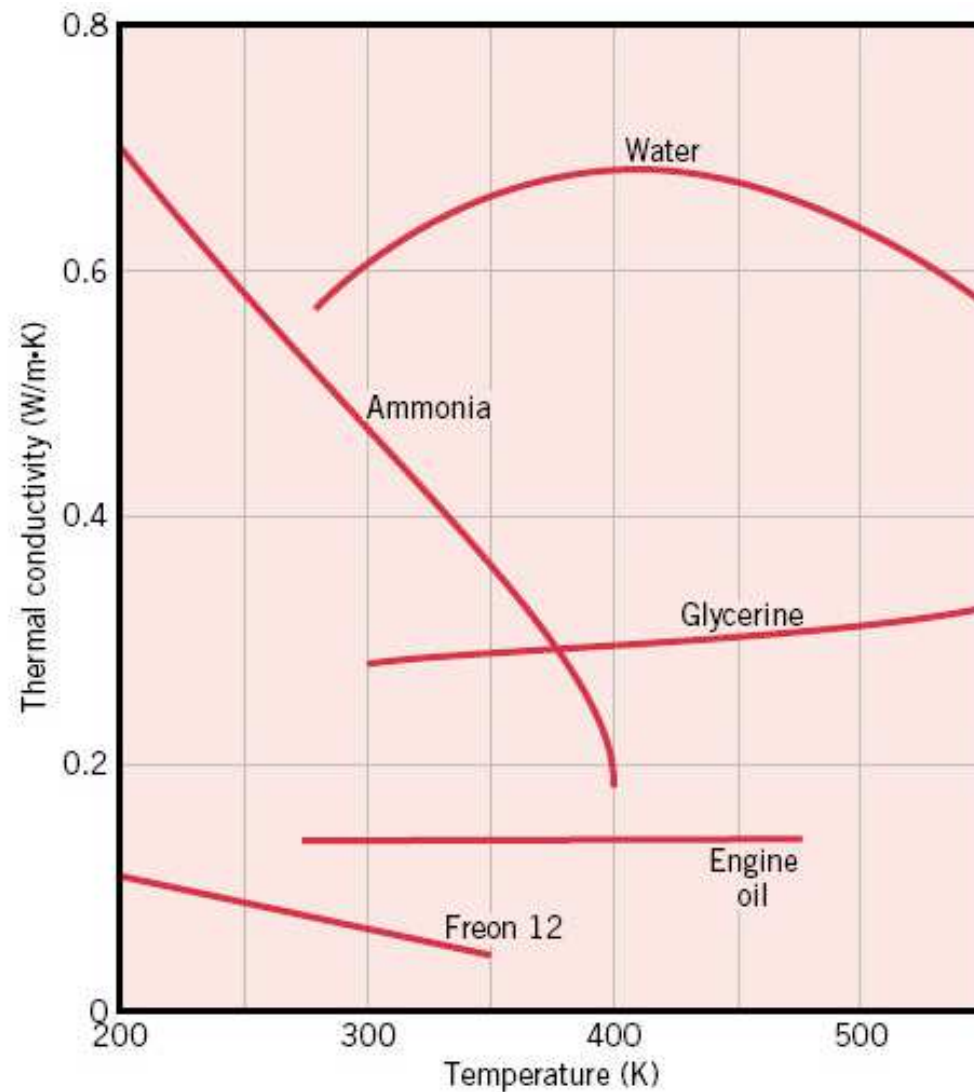
FAIXAS DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA DE VÁRIOS  
ESTADOS DA MATÉRIA A TEMPERATURAS E PRESSÕES  
NORMAIS



A DEPENDÊNCIA COM A  
TEMPERATURA DA  
CONDUTIVIDADE  
TÉRMICA DE SÓLIDOS  
SELECIONADOS



A DEPENDÊNCIA COM A  
TEMPERATURA DA  
CONDUTIVIDADE  
TÉRMICA DE GASES  
SELECIONADOS A  
PRESSÕES NORMAIS



A DEPENDÊNCIA COM A TEMPERATURA DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA DE LÍQUIDOS NÃO-METÁLICOS SELECIONADOS SOB CONDIÇÕES SATURADAS.

## 2.2.2 OUTRAS PROPRIEDADES RELEVANTES

- Propriedades de transporte:  $k, \nu$
- Propriedades termodinâmicas:  $\rho, c_p$
- Produto  $\rho c_p$  (J/m<sup>3</sup>.K): capacidade calorífica volumétrica, mede a **capacidade de uma material de armazenar energia térmica**.
- Sólidos e líquidos ( $\rho c_p > 1$  MJ/m<sup>3</sup>.K): **bons meios** para armazenar energia térmica.
- Gases ( $\rho c_p \approx 1$  MJ/m<sup>3</sup>.K): **pouco adequados** para armazenar energia térmica.

- **Difusividade térmica** ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) é a razão entre a condutividade térmica e a capacidade calorífica volumétrica:

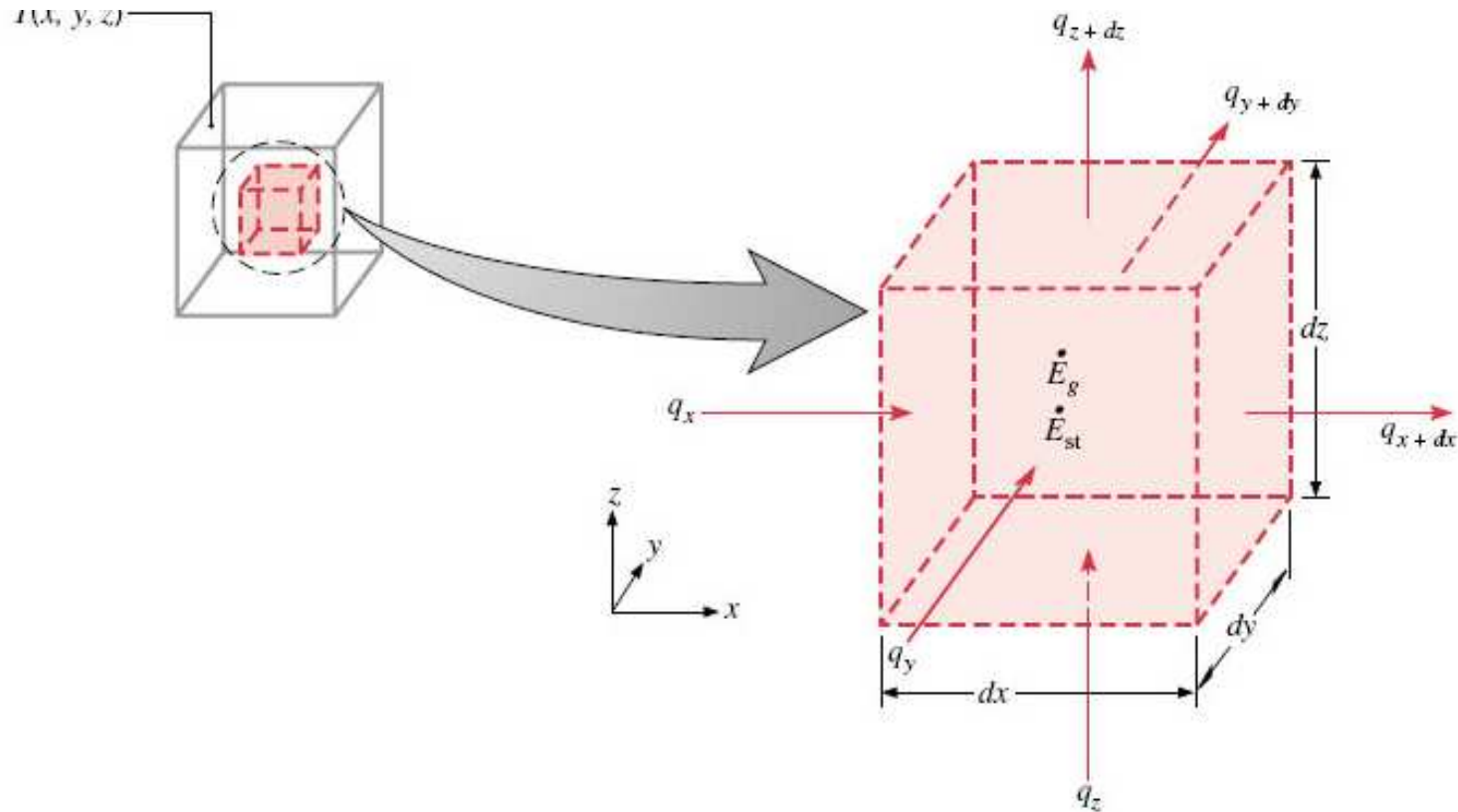
$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

- É uma medida da capacidade do material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la.
- $\alpha \uparrow$ : material **responde rapidamente** a mudanças nas condições térmicas a ele imposta.
- $\alpha \downarrow$ : material **responde lentamente** a mudanças nas condições térmicas a ele imposta.

## 2.3 A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE CALOR

- Objetivo: **determinar o campo de temperaturas** em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras. Com a distribuição de temperaturas, o **fluxo térmico por condução em qualquer ponto do meio ou na sua superfície** pode ser determinada pela lei de Fourier.
- A distribuição de temperatura pode ser determinada pela aplicação da exigência da **conservação da energia em um volume de controle diferencial**.
- São identificados os processos de transferência de energia relevantes e substituem-se as equações das taxas de transferência de calor apropriadas.

- Resultado: **equação diferencial** cuja solução, para condições de contorno especificadas, fornece a distribuição de temperaturas no meio.
- **Meio homogêneo**, com  $T(x, y, z)$  em coordenadas cartesianas para um volume de controle diferencial  $dx dy dz$ .
- Formulação em um **dado instante de tempo** com **somente condução através de cada uma das superfícies de controle**.
- As taxas de transferência de calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle em  $x$ ,  $y$  e  $z$  são  $q_x, q_y$  e  $q_z$ . Nas superfícies opostas, as taxas de transferência de calor por condução são expressas por série de Taylor.



VOLUME DE CONTROLE DIFERENCIAL  $dx dy dz$  PARA  
ANÁLISE DA CONDUÇÃO EM COORDENADAS  
CARTESIANAS.

- Conservação da energia:  $\dot{E}_{ent} - \dot{E}_{sai} + \dot{E}_g = \dot{E}_{acu}$

- Taxas de energia que **entram**:  $\dot{E}_{ent} = q_x + q_y + q_z$

$$q_x = -k(dydz)\frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k(dxdz)\frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k(dxdy)\frac{\partial T}{\partial z}$$

- Taxas de energia que **saem**:  $\dot{E}_{ent} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = -k(dydz)\frac{\partial T}{\partial x} - k(dxdydz)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy = -k(dxdz)\frac{\partial T}{\partial y} - k(dxdydz)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = -k(dx dy) \frac{\partial T}{\partial z} - k(dx dy dz) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

- Taxa de **geração** de energia térmica:

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz$$

- Taxa de variação da energia interna térmica **acumulada** (sensível):

$$\dot{E}_{acu} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

- O termo  $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$  é a **taxa de variação com o tempo da energia sensível (térmica) do meio, por unidade de volume.**

- Substituindo os termos na equação da conservação da energia, e dividindo o resultado por  $dx dy dz$  obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

- A expressão acima pode fornecer  $T(x, y, z, t)$  e expressa **conservação da energia**.
- Cada uma das três primeiras parcelas do lado esquerdo representa o **fluxo líquido de calor por condução para o interior do volume de controle**.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = q_x'' - q_{x+dx}''$$

- Postulado: **em qualquer ponto do meio, a taxa líquida de transferência de energia por condução para o interior de um volume unitário somado à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica acumulada no interior deste volume.**
- Caso especial - para  $k$  constante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Caso especial – regime estacionário:

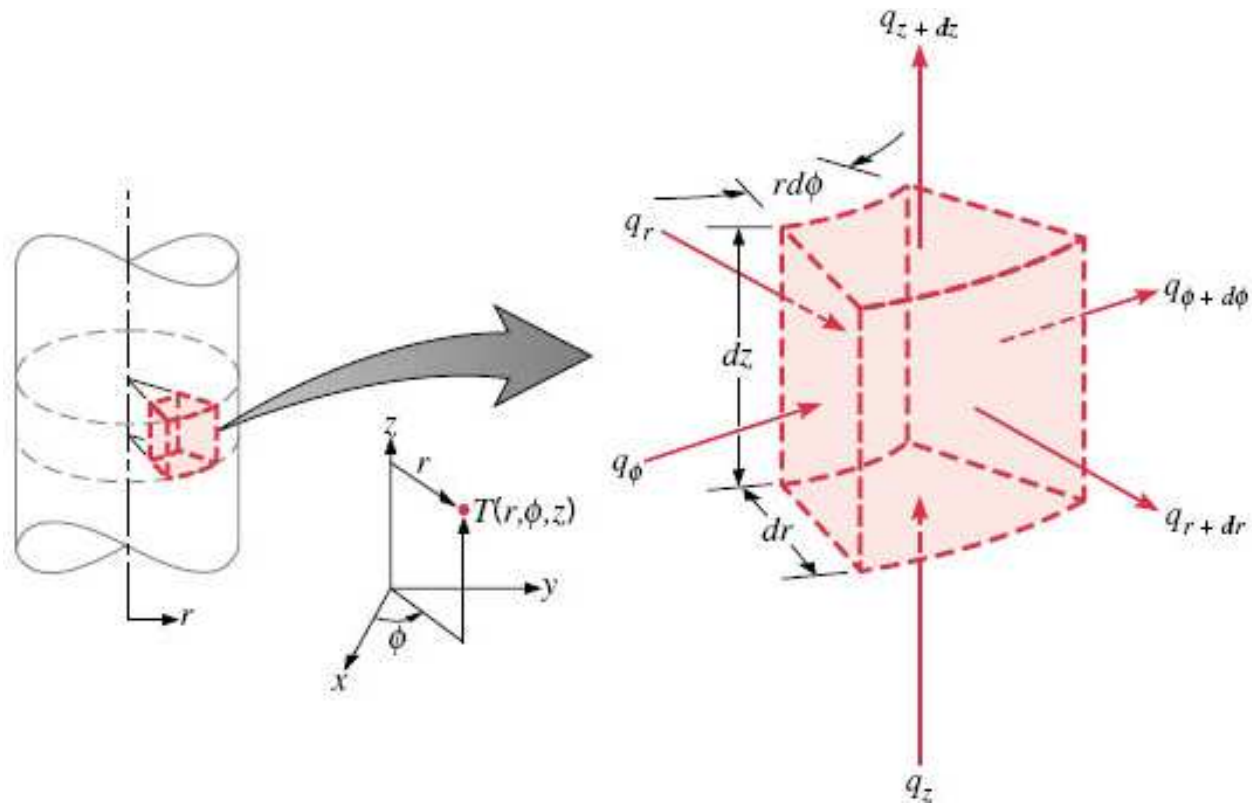
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0$$

- Caso especial – regime estacionário, condução unidimensional em  $x$ , sem geração de energia térmica:

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

- A importante desse resultado é que, em condições de condução unidimensional, em regime estacionário, sem geração de energia, o **fluxo térmico é uma constante** ( $dq_x''/dx = 0$ ).
- Equação do calor em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



VOLUME DE CONTROLE DIFERENCIAL  $dr.r d\phi.dz$ , PARA ANÁLISE DA CONDUÇÃO EM COORDENADAS CILÍNDRICAS  $(r, \phi, z)$  – DIREÇÕES RADIAL, CIRCUNFERENCIAL E AXIAL.

- Vetor fluxo térmico em coordenadas cilíndricas:

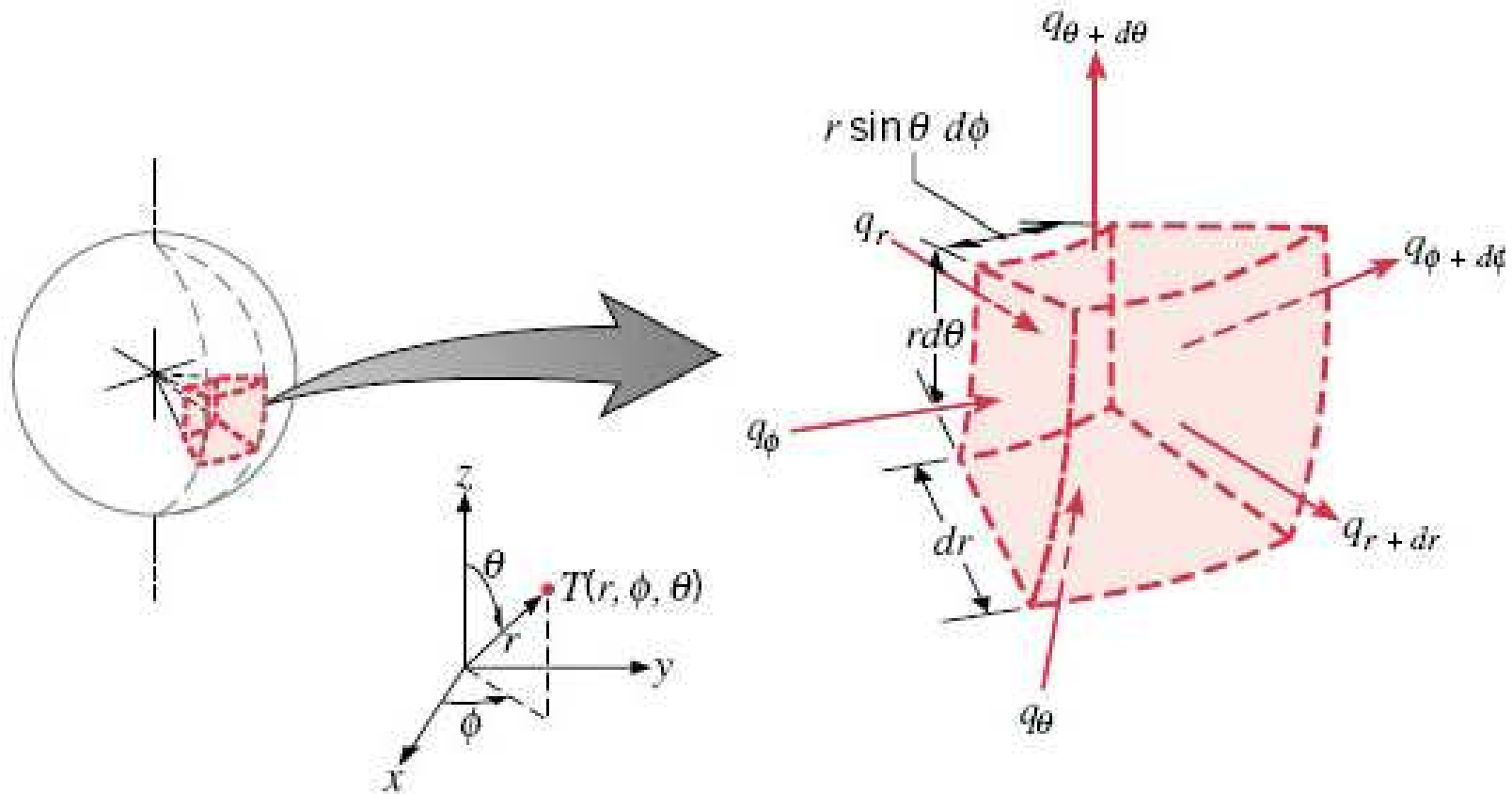
$$\mathbf{q}'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

- Componentes do vetor fluxo térmico em coordenadas cilíndricas:

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\phi = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} \quad q_z'' = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

- Equação do calor em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



VOLUME DE CONTROLE DIFERENCIAL  $dr \cdot r \sin \theta d\phi \cdot rd\theta$ , PARA ANÁLISE DA CONDUÇÃO EM COORDENADAS ESFÉRICAS  $(r, \phi, \theta)$  – DIREÇÕES RADIAL, POLAR E AZIMUTAL.

- Vetor fluxo térmico em coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{q}'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + k\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)$$

- Componentes do vetor fluxo térmico em coordenadas esféricas:

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\theta'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}$$

## 2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO E INICIAL

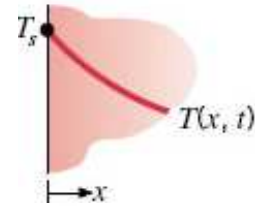
- Para determinar a **distribuição de temperaturas em um meio**, é necessário resolver a forma apropriada da equação do calor.

- Tal solução depende das condições físicas existentes nas **fronteiras do meio**, e, se a situação variar com o tempo, a solução também depende das condições existentes no meio em algum **instante inicial**.
- Para as condições nas fronteiras (condições de contorno), existem diversas possibilidades expressas matematicamente.
- A equação do calor é de **segunda ordem em relação às coordenadas espaciais**: **duas condições de contorno devem ser fornecidas para cada coordenada espacial**.
- A equação do calor é de **primeira ordem com relação ao tempo**: **apenas uma condição (condição inicial) deve ser especificada**.

## CONDIÇÕES DE CONTORNO NA SUPERFÍCIE ( $x = 0$ )

### 1. Temperatura da superfície constante

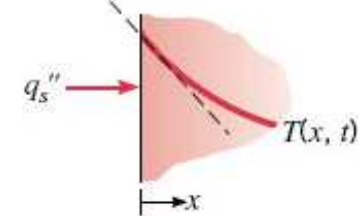
$$T(0, t) = T_s$$



### 2. Fluxo térmico na superfície constante

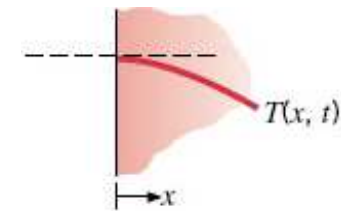
#### a) Fluxo térmico diferente de zero

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=0} = q_s''$$



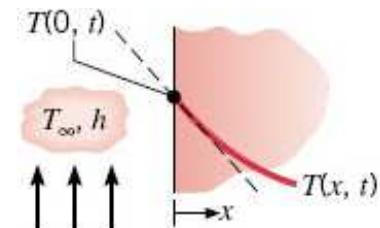
#### b) Superfície isolada termicamente

$$\frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=0} = 0$$



### 3. Condição de convecção na superfície

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$



- Condição 1 – **Primeira espécie ou de Dirichlet**: aproximada quando a superfície está em contato com um sólido em fusão ou com um líquido em ebulição.
- Condição 2 – **Segunda espécie ou de Neumann**: pode ser obtida através da fixação de um aquecedor elétrico na forma de uma fina película à superfície.
- Condição 3 – **Terceira espécie ou de Robin**: corresponde à existência de aquecimento (ou resfriamento) por convecção.