



## **CAPÍTULO 5 – CONDUÇÃO TRANSIENTE – PARTE 2**

**DISCIPLINA: TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA 1**

**PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA**

## 5.7 O SÓLIDO SEMI-INFINITO

- Corpo que se estende até o infinito em todas as direções, exceto uma **superfície identificável**.
- Se uma mudança de condições for imposta a essa superfície, ocorrerá condução transiente no interior do sólido.
- A **equação do calor** para o **sólido semi-infinito** é:

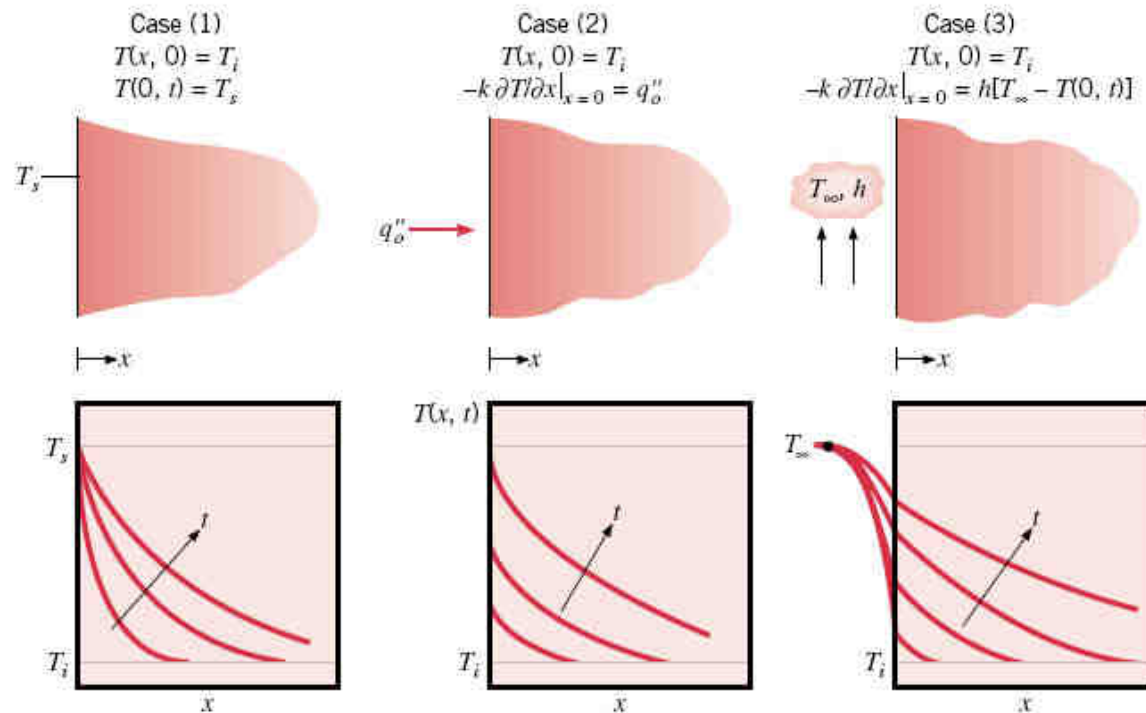
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- A **condição inicial** é dada por:  $T(x,0) = T_i$

- A condição de contorno no interior do sólido tem a forma:

$$T(x \rightarrow \infty, t) = T_i$$

- A segunda condição de contorno pode ter três formas:



- Soluções analíticas podem ser obtidas para **três condições na superfície**, impostas instantaneamente em  $t = 0$ .
- CASO 1 – **Temperatura na superfície constante**:  $T(0, t) = T_s$

$$\frac{T(x, t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

$$q_s''(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

- CASO 2 – **Fluxo térmico na superfície constante**:  $q_s'' = q_o''$

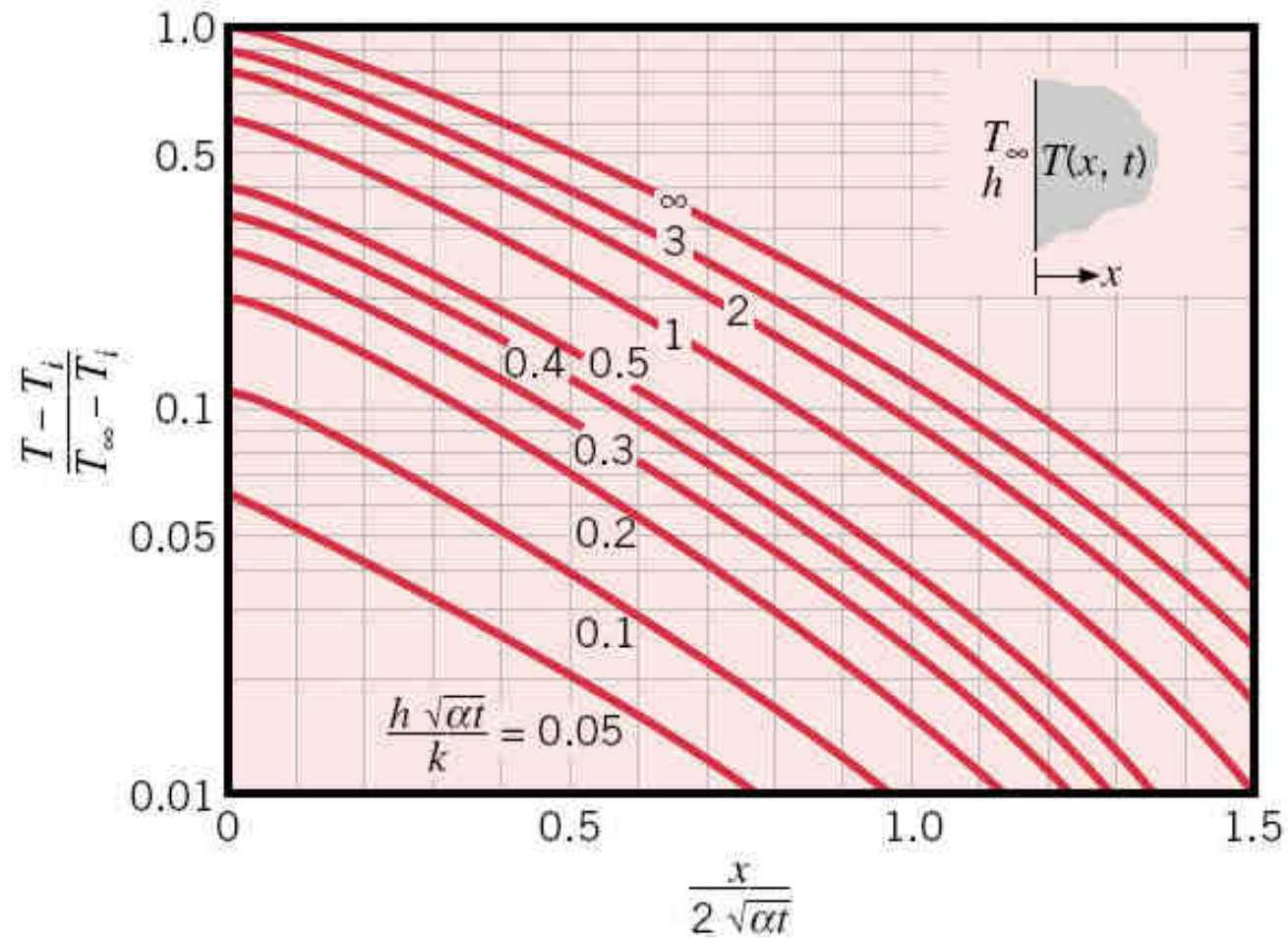
$$T(x, t) - T_i = \frac{2q_o''(\alpha t / \pi)^{1/2}}{k} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{q_o'' x}{k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

- CASO 3 – Convecção na superfície:  $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_{\infty} - T(0, t)]$

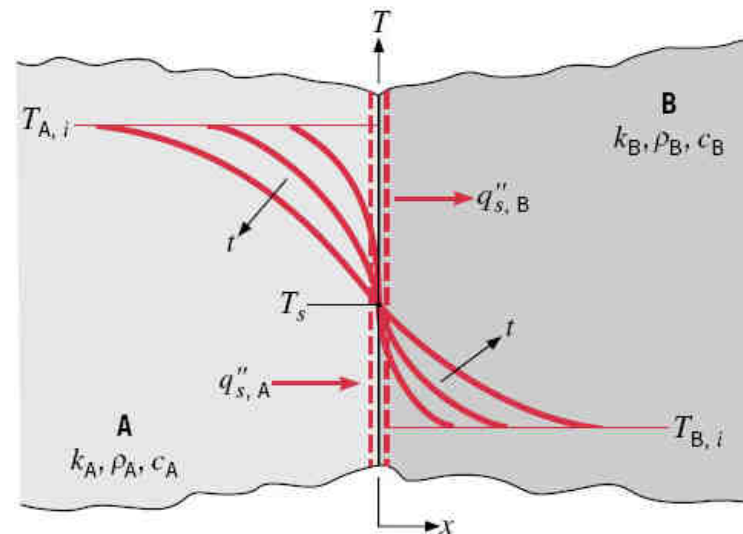
$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_{\infty} - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \left[ \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) \right] \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right) \right]$$

$$q_s''(t) = h[T_{\infty} - T_s(t)]$$

- $\operatorname{erf}(w)$  é a função erro de Gauss e  $\operatorname{erfc}(w) = 1 - \operatorname{erf}(w)$  é a função erro complementar de Gauss.
- Valores de  $\operatorname{erf}(w)$  estão tabelados no Apêndice B.2.
- Históricos de temperaturas em um sólido semi-infinito com convecção na superfície podem ser visualizados abaixo:



- Um caso de interesse envolve o contato térmico entre dois sólidos semi-infinitos, inicialmente a  $T_{A,i}$  e  $T_{B,i}$ .



- No momento do contato, as superfícies assumem o valor de  $T_s$  na qual  $T_{B,i} < T_s < T_{A,i}$ . A **temperatura superficial de equilíbrio** pode ser obtida por um balanço de energia na superfície entre os sólidos semi-infinitos:

$$q''_{s,A} = q''_{s,B} \Rightarrow -\frac{k_A(T_s - T_{A,i})}{(\pi\alpha_A t)^{1/2}} = \frac{k_B(T_s - T_{B,i})}{(\pi\alpha_B t)^{1/2}} \Rightarrow T_s = \frac{(k\rho c)_A^{1/2} T_{A,i} + (k\rho c)_B^{1/2} T_{B,i}}{(k\rho c)_A^{1/2} + (k\rho c)_B^{1/2}}$$

## Função Erro de Gauss

| w    | erf w   | w    | erf w   | w    | erf w   |
|------|---------|------|---------|------|---------|
| 0.00 | 0.00000 | 0.36 | 0.38933 | 1.04 | 0.85865 |
| 0.02 | 0.02256 | 0.38 | 0.40901 | 1.08 | 0.87333 |
| 0.04 | 0.04511 | 0.40 | 0.42839 | 1.12 | 0.88679 |
| 0.06 | 0.06762 | 0.44 | 0.46622 | 1.16 | 0.89910 |
| 0.08 | 0.09008 | 0.48 | 0.50275 | 1.20 | 0.91031 |
| 0.10 | 0.11246 | 0.52 | 0.53790 | 1.30 | 0.93401 |
| 0.12 | 0.13476 | 0.56 | 0.57162 | 1.40 | 0.95228 |
| 0.14 | 0.15695 | 0.60 | 0.60386 | 1.50 | 0.96611 |
| 0.16 | 0.17901 | 0.64 | 0.63459 | 1.60 | 0.97635 |
| 0.18 | 0.20094 | 0.68 | 0.66378 | 1.70 | 0.98379 |
| 0.20 | 0.22270 | 0.72 | 0.69143 | 1.80 | 0.98909 |
| 0.22 | 0.24430 | 0.76 | 0.71754 | 1.90 | 0.99279 |
| 0.24 | 0.26570 | 0.80 | 0.74210 | 2.00 | 0.99532 |
| 0.26 | 0.28690 | 0.84 | 0.76514 | 2.20 | 0.99814 |
| 0.28 | 0.30788 | 0.88 | 0.78669 | 2.40 | 0.99931 |
| 0.30 | 0.32863 | 0.92 | 0.80677 | 2.60 | 0.99976 |
| 0.32 | 0.34913 | 0.96 | 0.82542 | 2.80 | 0.99992 |
| 0.34 | 0.36936 | 1.00 | 0.84270 | 3.00 | 0.99998 |

- A função erro de Gauss é definida pela relação:

$$\operatorname{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-v^2} dv$$

- A solução para o CASO 1 pode ser obtida utilizando a **variável de similaridade**  $\eta$  na qual a equação do calor, que é uma **equação diferencial parcial** é **convertida** em uma **equação diferencial ordinária**.
- A idéia da variável de similaridade é que **independente dos valores** de  $x$  e  $t$  a temperatura pode ser representada como **uma única função** de  $\eta$ .
- No caso do sólido semi-infinito, essa técnica é válida somente para o CASO 1. Para os CASOS 2 e 3 a técnica da **Transformada de Laplace** pode ser utilizada.
- A variável de similaridade no CASO 1 é: 
$$\eta = \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}}$$

- Problema original do CASO 1:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad T(x,0) = T_i \quad T(x \rightarrow \infty, t) = T_i \quad T(0,t) = T_s$$

- Obtenção das derivadas da E.D.P. utilizando a variável  $\eta$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}} \right] \frac{dT}{d\eta} = \frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}} \frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}} \frac{dT}{d\eta} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}} \right] = \frac{1}{4\alpha t} \frac{d^2 T}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}} \right] \frac{dT}{d\eta} = -\frac{1}{2t} \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}} \frac{dT}{d\eta} = -\frac{\eta}{2t} \frac{dT}{d\eta}$$

- Substituindo as derivadas  $\partial^2 T / \partial x^2$  e  $\partial T / \partial \eta$  na E.D.P. original obtém-se:

$$\frac{1}{4\alpha t} \frac{d^2 T}{d\eta^2} = -\frac{\eta}{2\alpha t} \frac{dT}{d\eta} \Rightarrow \frac{d^2 T}{d\eta^2} = -2\eta \frac{dT}{d\eta}$$

- As condições de contorno tornam-se:

$$T(x \rightarrow \infty, t) = T_i \Rightarrow T(\eta \rightarrow \infty) = T_i$$

$$T(0, t) = T_s \Rightarrow T(\eta = 0) = T_s$$

- A forma de  $T(\eta)$  é obtida pela **separação de variáveis** da E.D.O.:

$$\frac{d(dT/d\eta)}{(dT/d\eta)} = -2\eta d\eta$$

- Integrando, tem-se que:

$$\ln(dT/d\eta) = -\eta^2 + C_1' \Rightarrow \frac{dT}{d\eta} = C_1 \exp(-\eta^2)$$

- Integrando uma segunda vez obtemos:

$$T = C_1 \int_0^\eta \exp(-u^2) du + C_2$$

- Utilizando as condições de contorno obtém-se que:

$$C_1 = \frac{2(T_i - T_s)}{\pi^{1/2}} \quad C_2 = T_s$$

- A distribuição de temperaturas pode ser representada por:

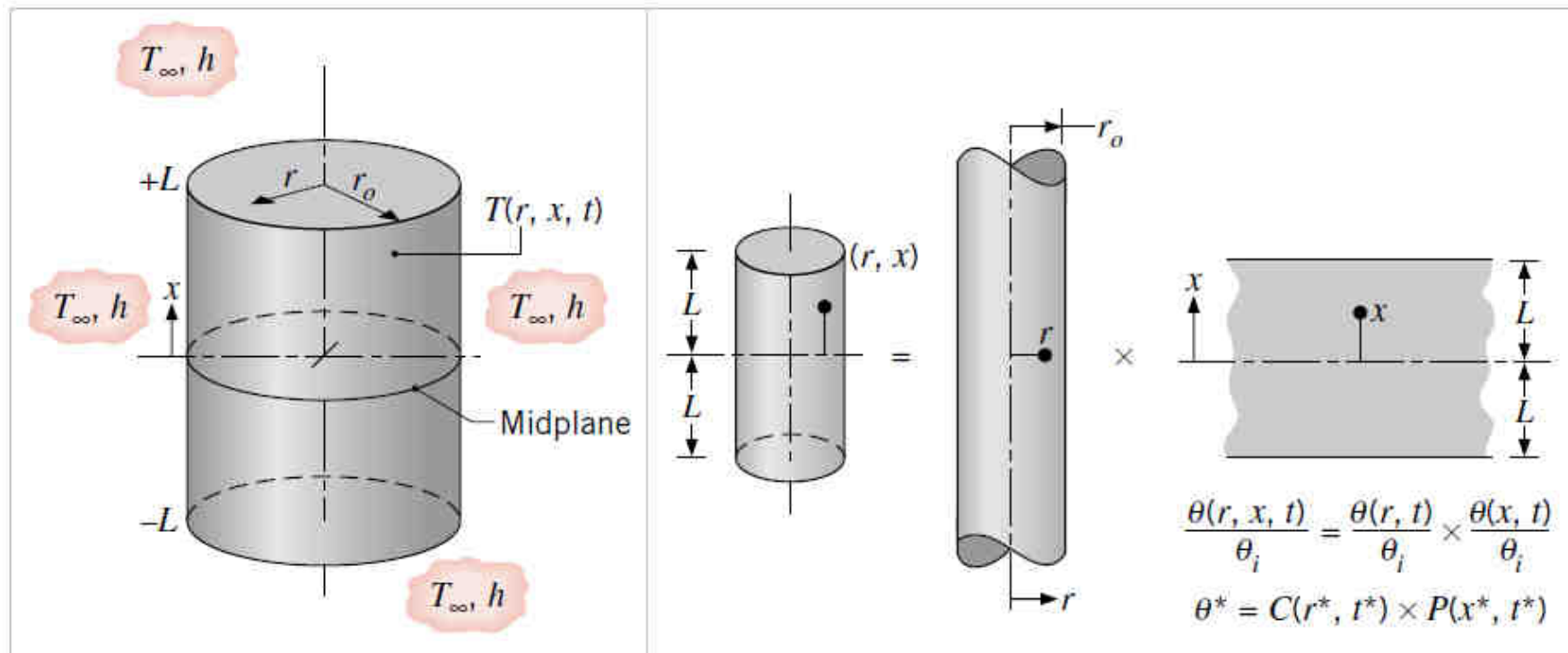
$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \left(2/\pi^{1/2}\right) \int_0^\eta \exp(-u^2) du = \operatorname{erf} \eta \Rightarrow \frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf} \left[ \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}} \right]$$

- O **fluxo de calor superficial** é obtido pela lei de Fourier em  $x = 0$ :

$$q_s'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k(T_i - T_s) \frac{d(\operatorname{erf} \eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{\eta=0} \Rightarrow q_s'' = \frac{k(T_s - T_i)}{(\pi\alpha t)^{1/2}}$$

## 5.8 FEITOS MULTIDIMENSIONAIS

- Problemas transientes são freqüentemente encontrados em situações bidimensionais e tridimensionais.
- A solução de tais problemas pode ser obtida a partir da combinação das soluções transientes unidimensionais para parede plana, cilindro infinito e sólido semi-infinito.
- Seja o problema bidimensional transiente abaixo: um cilindro curto (comprimento e diâmetro comparáveis) inicialmente a  $T_i$  subitamente imerso em fluido com  $T_\infty \neq T_i$ .
- A temperatura no interior do cilindro dependerá de  $r$ ,  $x$  e  $t$ .



- Para **propriedades constantes** e **sem geração de energia**, a forma bidimensional da equação do calor em coordenadas cilíndricas  $(r, z)$ , substituindo  $z$  por  $x$ , é:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

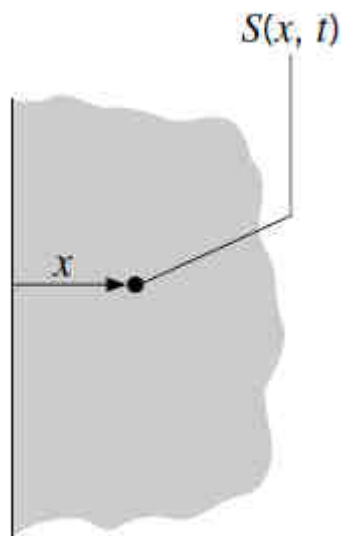
- Espera-se que a solução para a **distribuição de temperaturas** no cilindro seja na forma  $T(r, x, t)$  e a solução para o problema de **condução bidimensional** no cilindro de raio  $r_o$  e comprimento  $2L$  pode ser escrita pela composição da solução para um cilindro infinito de raio  $r_o$  e da solução para parede plana de espessura  $2L$ :

$$\frac{T(r, x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \left. \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right|_{\text{Cilindro Infinito}} \times \left. \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right|_{\text{Parede Plana}}$$

- A expressão acima pode ser reescrita como:

$$\frac{\theta(r, x, t)}{\theta_i} = \frac{\theta(r, t)}{\theta_i} \Big|_{\text{Cilindro Infinito}} \times \frac{\theta(x, t)}{\theta_i} \Big|_{\text{Parede Plana}} \Rightarrow \theta^* = C(r^*, t^*) \times P(x^*, t^*)$$

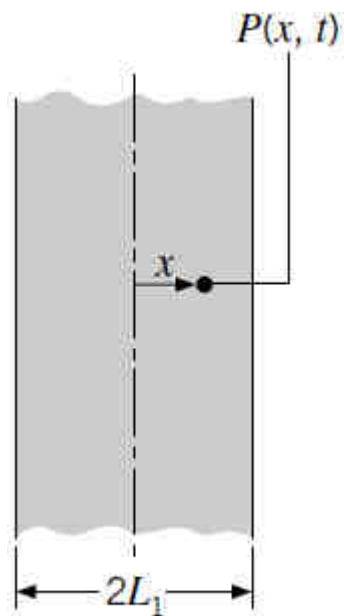
- Para  $Fo > 0,2$  as soluções transientes unidimensionais para **parede plana** e **cilindro infinito** podem ser utilizadas com o primeiro termo da série infinita.
- Nas figuras abaixo podem ser visualizadas **geometrias multidimensionais** na qual a solução geral pode ser obtida utilizando o **produto de soluções unidimensionais**.
- A coordenada  $x$  para o **sólido semi-infinito** é medida a **partir da superfície** e para a **parede plana** ela é medida a **partir do plano médio**.



(a) Semi-infinite solid

$$S(x, t) = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Sólido} \\ \text{semi-infinito} \end{array} \right.$$

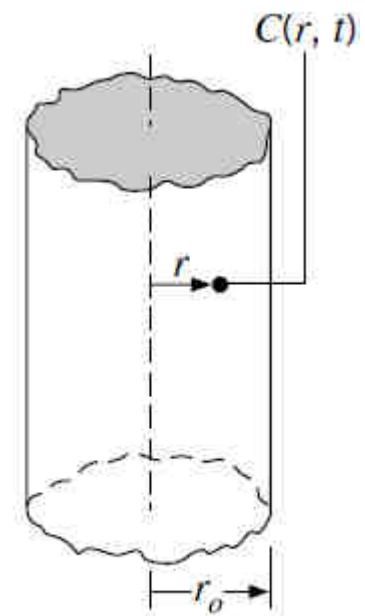
$$S(x, t) = \frac{\theta(x, t)}{\theta_i} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Sólido} \\ \text{semi-infinito} \end{array} \right.$$



(b) Plane wall

$$P(x, t) = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Parede} \\ \text{plana} \end{array} \right.$$

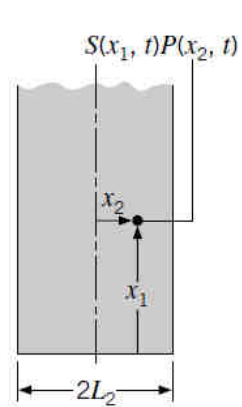
$$P(x, t) = \frac{\theta(x, t)}{\theta_i} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Parede} \\ \text{plana} \end{array} \right.$$



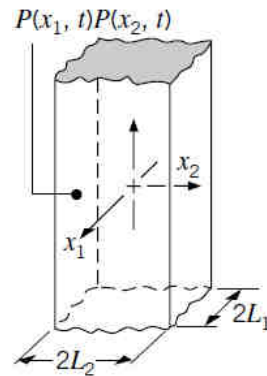
(c) Infinite cylinder

$$C(r, t) = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Cilindro} \\ \text{infinito} \end{array} \right.$$

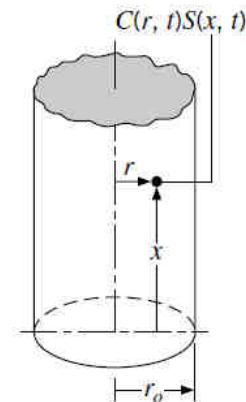
$$C(r, t) = \frac{\theta(r, t)}{\theta_i} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Cilindro} \\ \text{infinito} \end{array} \right.$$



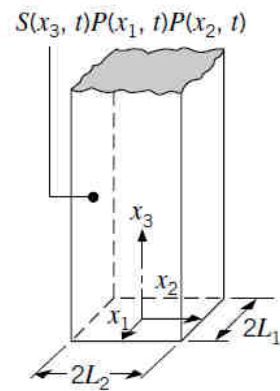
(d) Semi-infinite plate



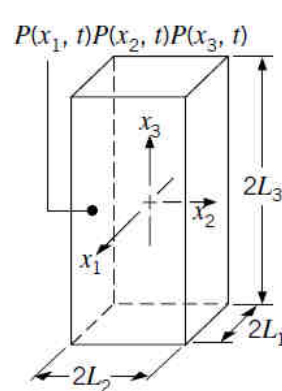
(e) Infinite rectangular bar



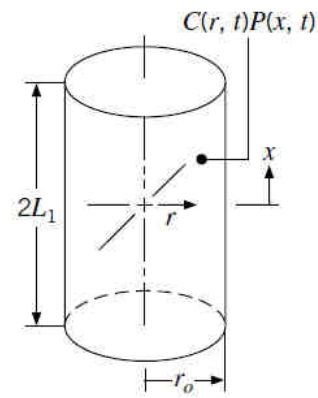
(f) Semi-infinite cylinder



(g) Semi-infinite rectangular bar



(h) Rectangular parallelepiped



(i) Short cylinder

## Soluções para sistemas multidimensionais

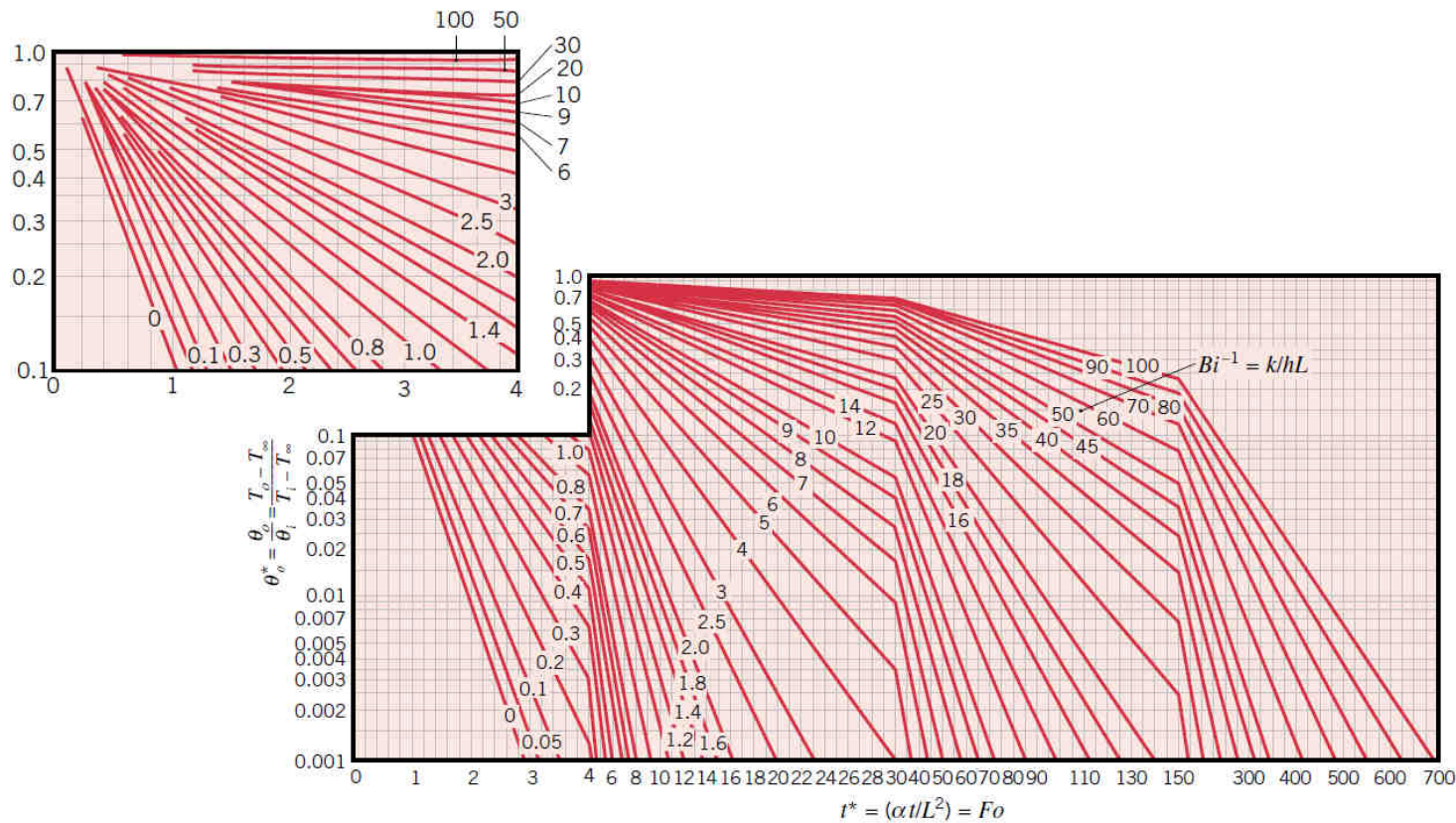
- Uma versão modificada da solução produto também pode ser usada para determinar a transferência de calor total transiente a partir de ou para uma geometria multidimensional, utilizando os valores unidimensionais, conforme mostrou Langston em 1982.
- Para uma **geometria 2D** formada por geometrias 1D 1 e 2:

$$\left(\frac{Q}{Q_o}\right)_{2D} = \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_1\right]$$

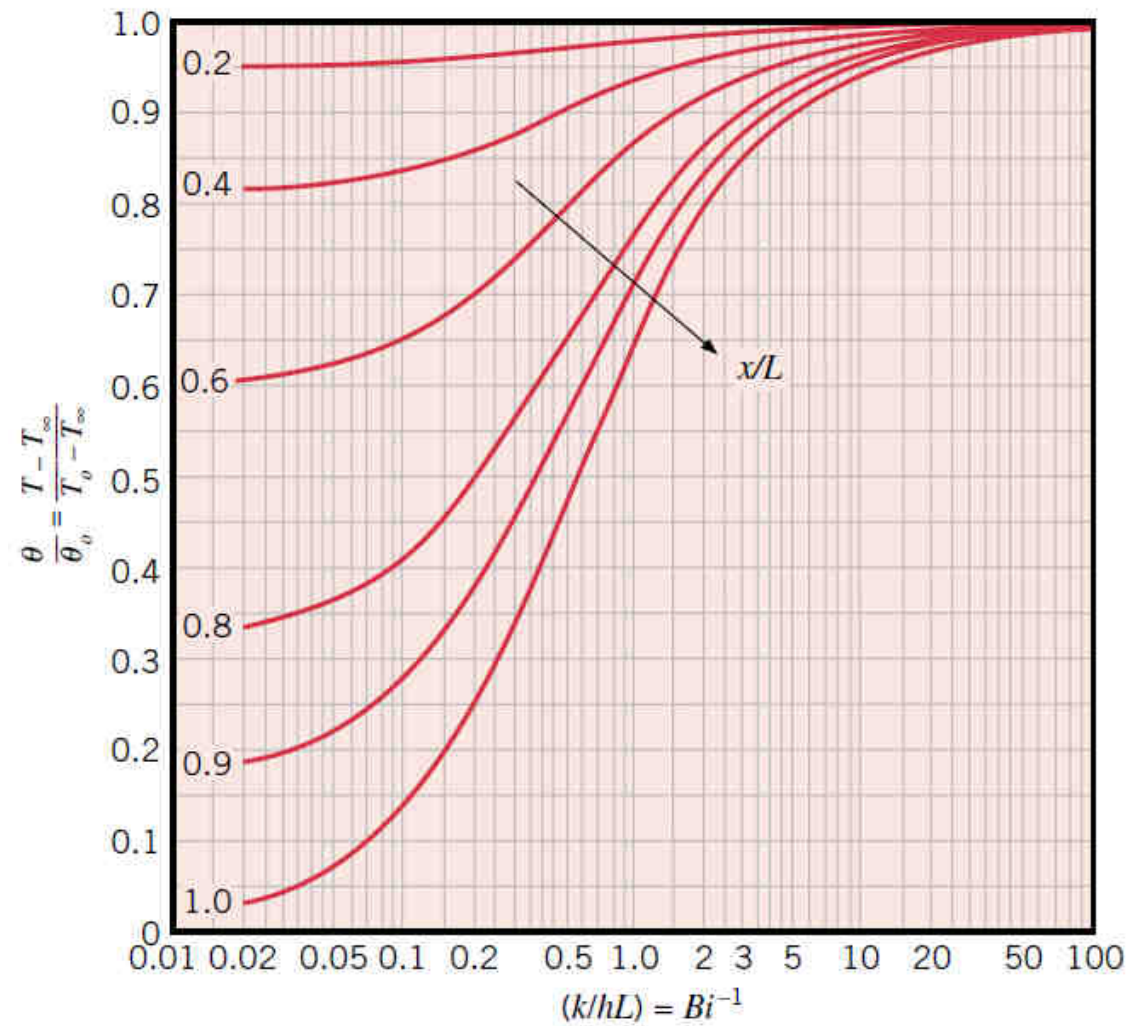
- Para uma **geometria 3D** formada por geometrias 1D 1, 2 e 3:

$$\left(\frac{Q}{Q_o}\right)_{3D} = \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_1\right] + \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_3 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_1\right] \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_2\right]$$

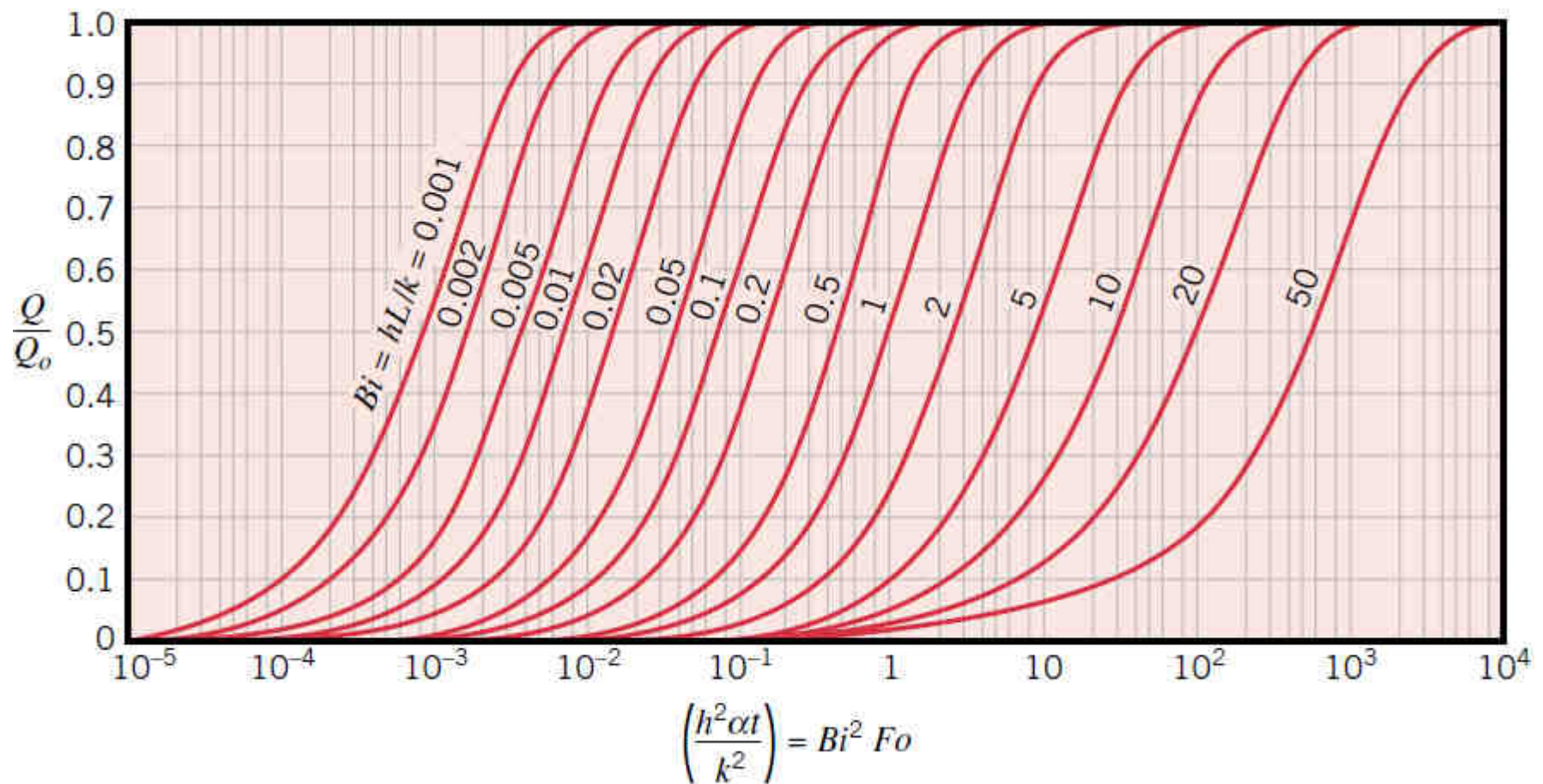
## 5.9 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DA CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE – CARTAS DE HEISLER



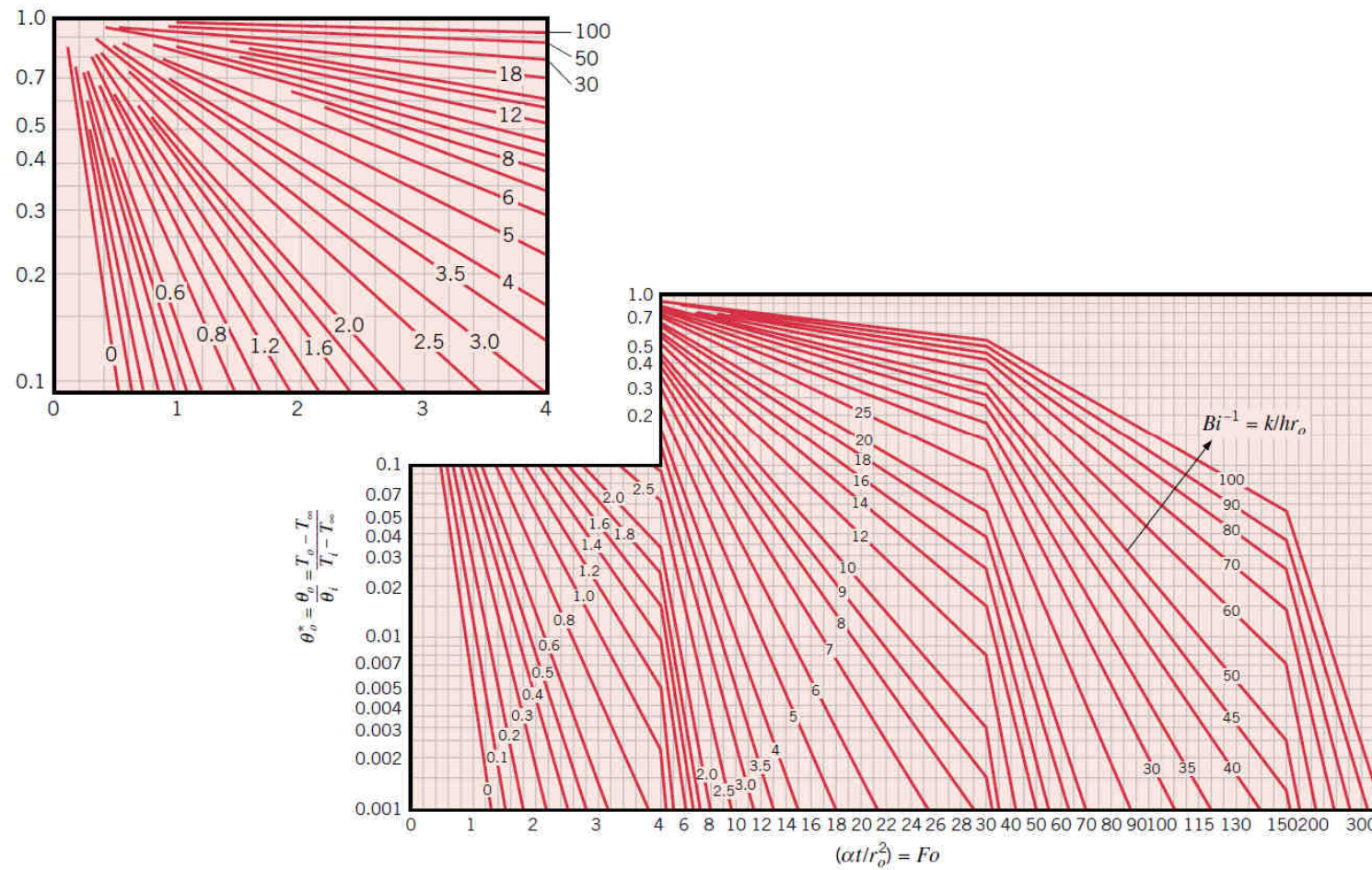
Temperatura no plano central como uma função do tempo para uma parede plana de espessura  $2L$ .



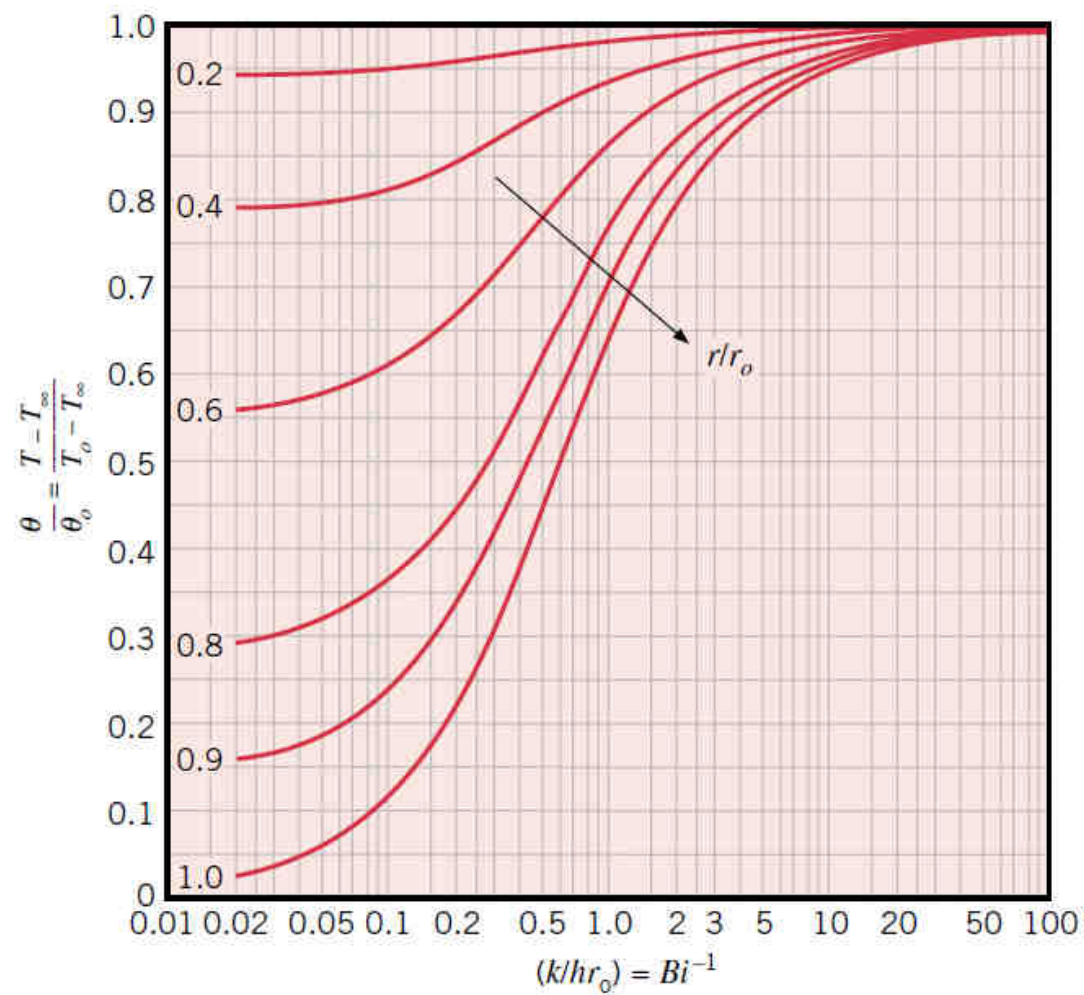
Distribuição de temperatura em uma parede plana de espessura  $2L$ .



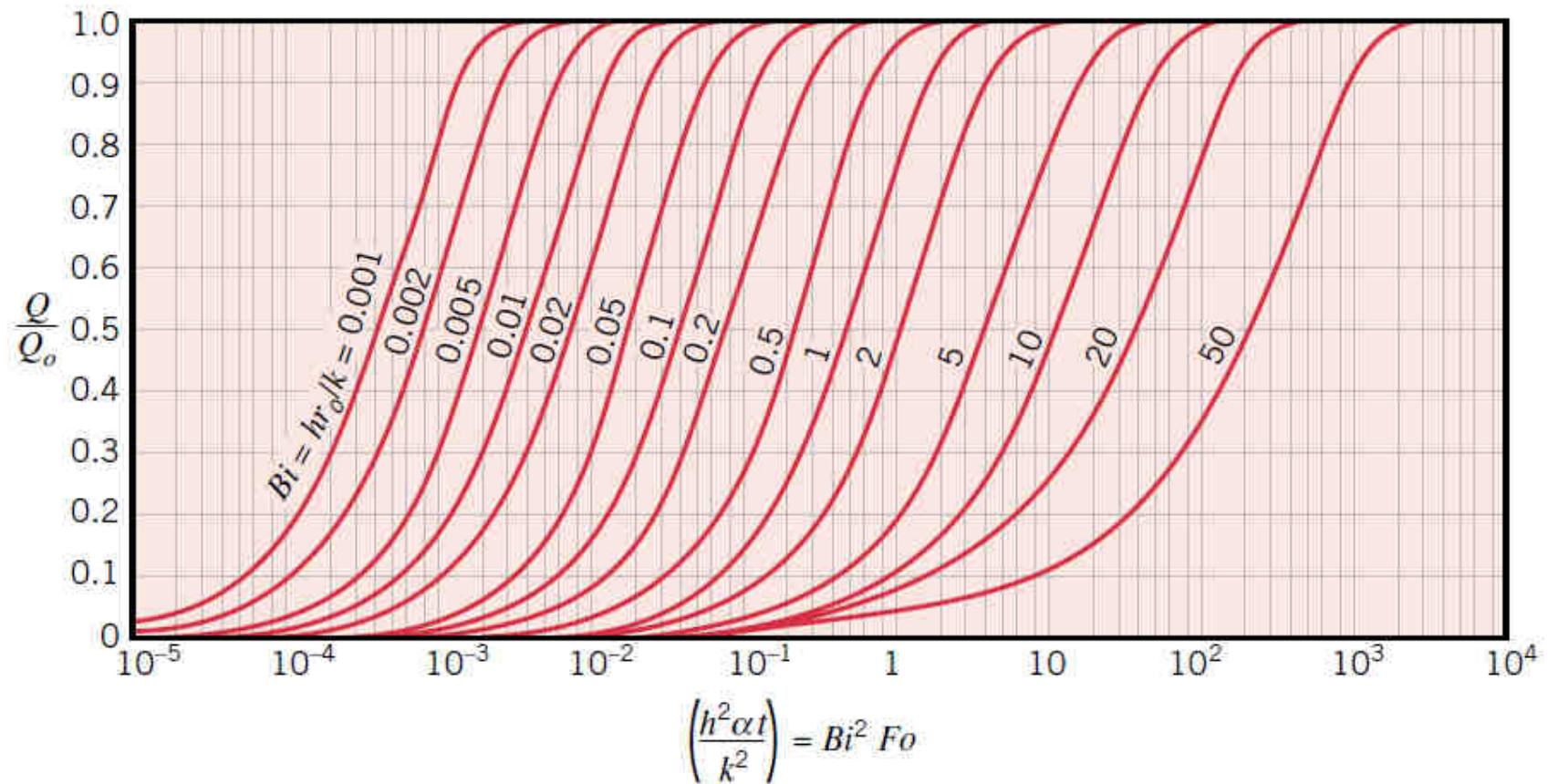
Energia transferida em função do tempo para uma parede plana de espessura  $2L$ .



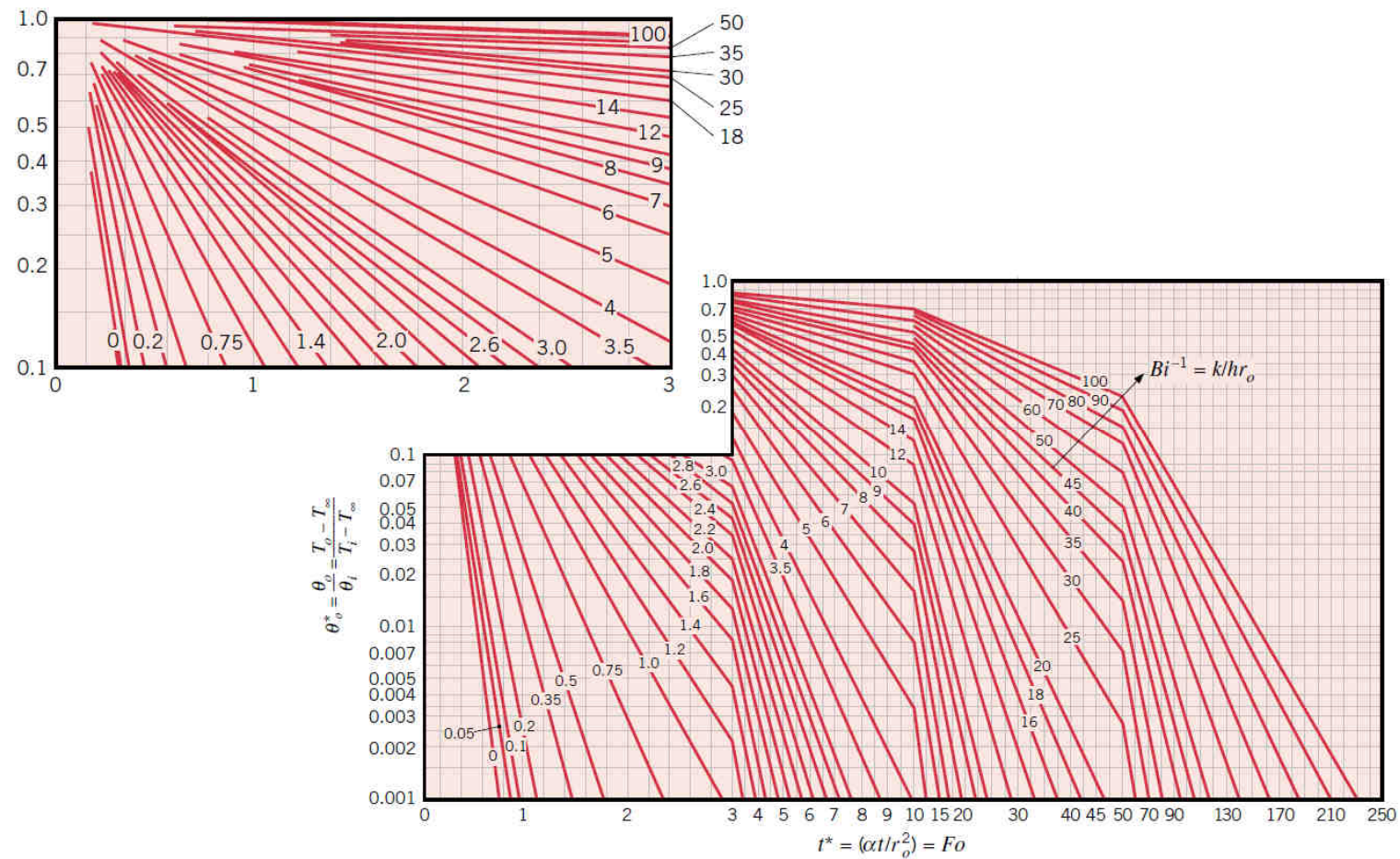
Temperatura no centro como uma função do tempo para um cilindro infinito de raio  $r_o$ .



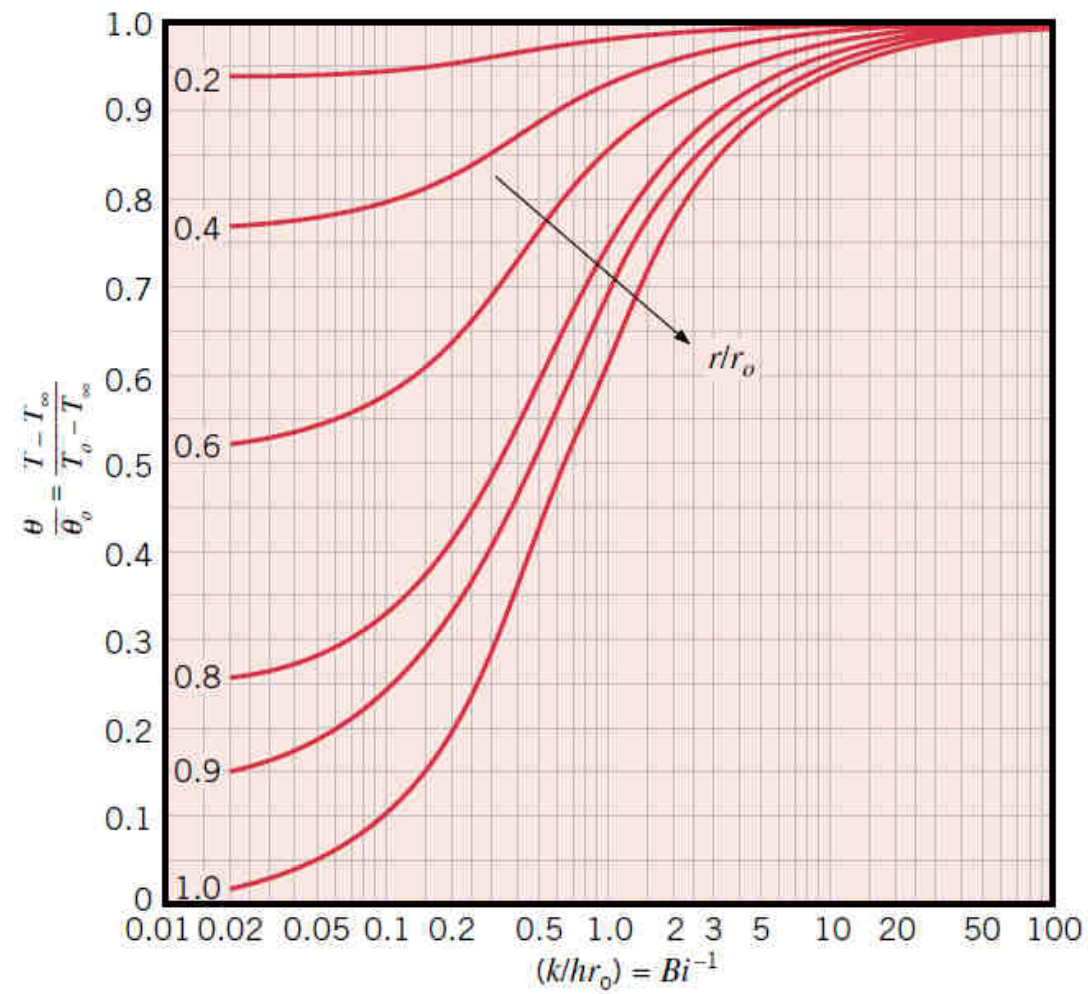
Distribuição de temperatura em um cilindro infinito de raio  $r_0$ .



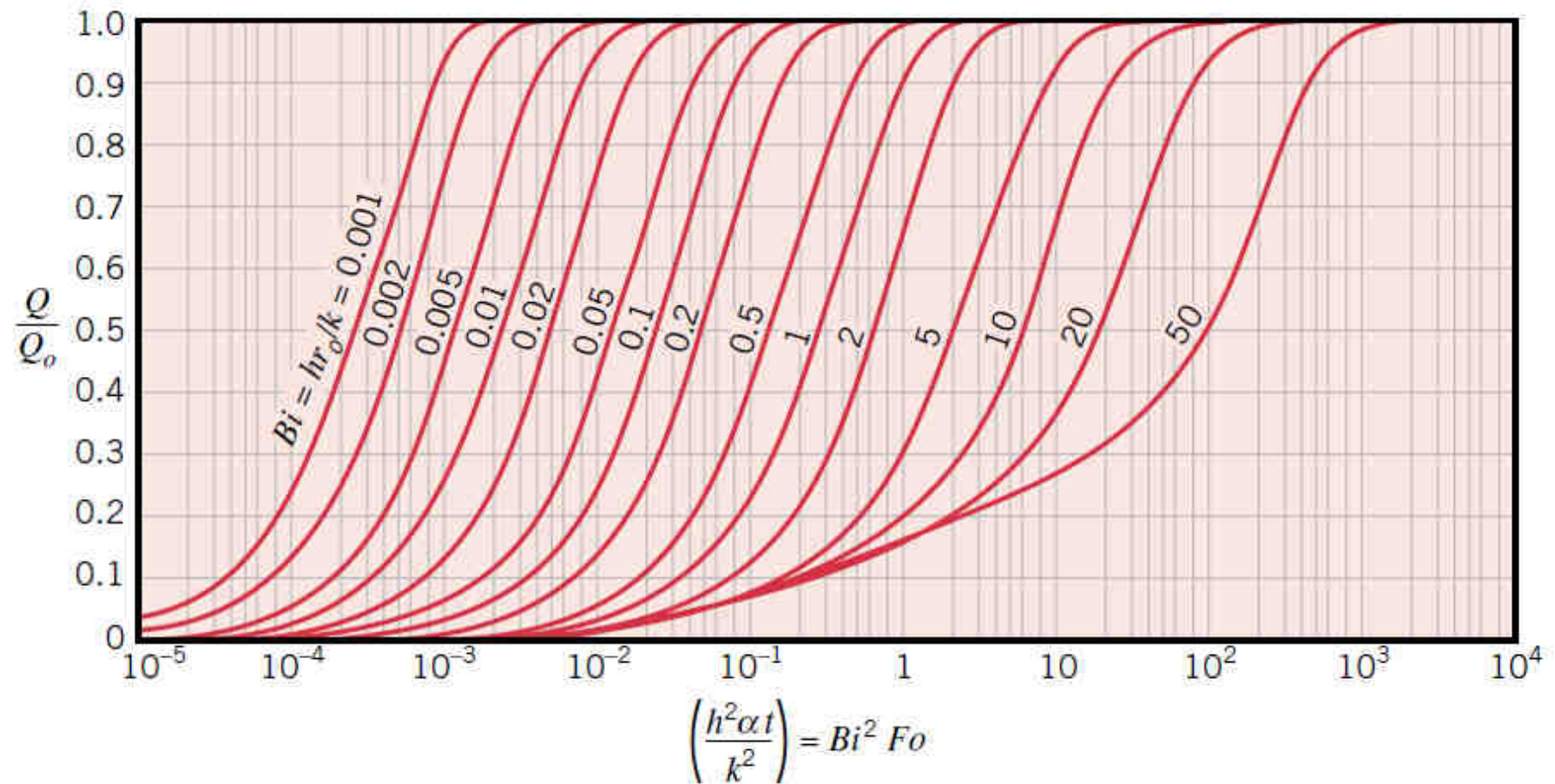
Energia transferida em função do tempo para um cilindro infinito de raio  $r_o$ .



Temperatura no centro como uma função do tempo para uma esfera de raio  $r_o$ .



Distribuição de temperatura em uma esfera de raio  $r_0$ .



Energia transferida em função do tempo para uma esfera de raio  $r_o$ .