



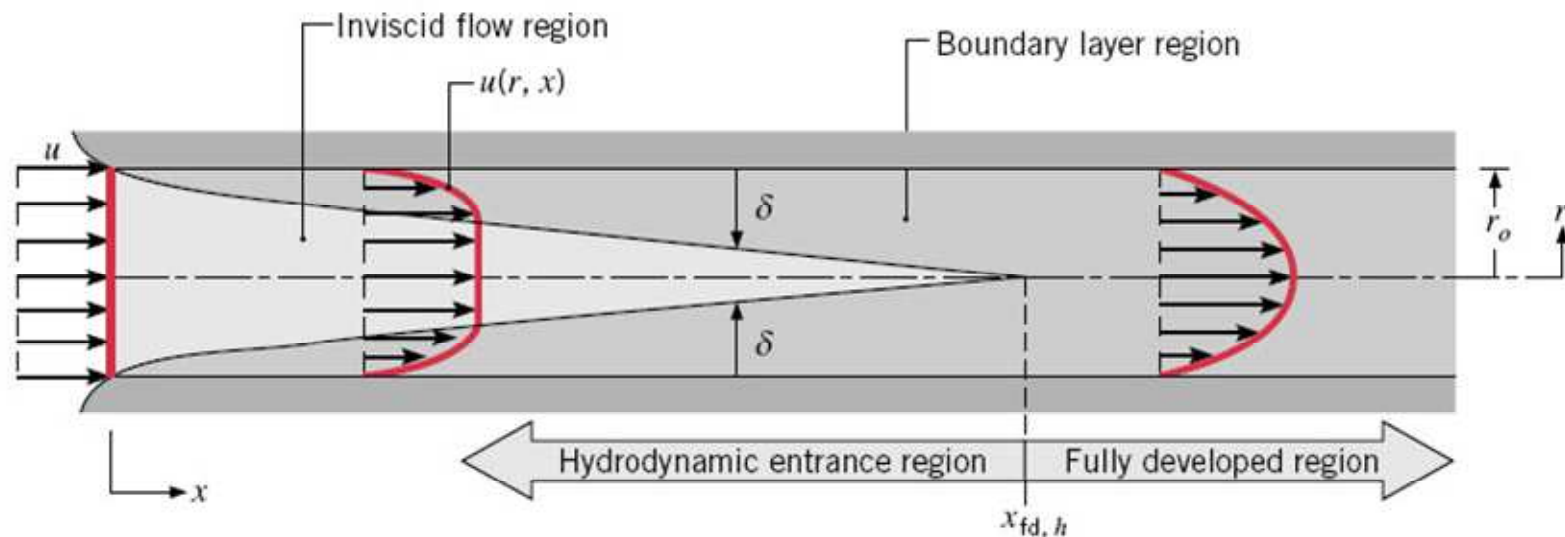
CAPÍTULO 3 – ESCOAMENTO INTERNO

Prof. Dr. Santiago del Rio Oliveira

3.1 CONSIDERAÇÕES FLUIDODINÂMICAS

- Para escoamento interno deve-se verificar se o mesmo é **laminar** ou **turbulento** e a existência de regiões de **entrada** e de **escoamento plenamente desenvolvidas**

3.1.1 Condições de escoamento



- Escoamento **laminar** em um tubo **circular** de raio r_o com o fluido entrando no tubo com **velocidade uniforme** u

- Quando o fluido entra em **contato com a superfície**, surgem **efeitos viscosos**, e uma **camada limite** se desenvolve com o aumento de x
- A região de **escoamento invíscido** diminui com o aumento de x e termina com a **mistura da camada limite na linha de centro**
- Após a mistura, **efeitos viscosos se tornam dominantes** e o perfil de velocidade **não varia** com o aumento de x
- Diz-se que o escoamento é **plenamente desenvolvido** e a distância da entrada na qual essa condição é alcançada é o **comprimento de entrada hidrodinâmico**,
 $x_{fd,h}$
- Para **escoamento laminar** em um **tubo circular** o perfil de velocidade plenamente desenvolvido é **parabólico**
- Para **escoamento turbulento**, o perfil é **plano** devido à mistura turbulenta radial

- A **extensão da região de entrada** depende se o escoamento é laminar ou turbulento
- O número de Reynolds para escoamento em um tubo circular é $Re_D = \frac{\rho u_m D}{\mu}$
- O número de **Reynolds crítico** para surgimento da turbulência é $Re_{D,c} \approx 2300$
- Para **escoamento laminar**, o comprimento de entrada é $\left(\frac{x_{fd,h}}{D}\right)_{\text{lam}} \approx 0,05 Re_D$
- Para **escoamento turbulento**, o comprimento de entrada pode ser obtido por:

$$10 \leq \left(\frac{x_{fd,h}}{D}\right)_{\text{turb}} \leq 60$$

3.1.2 A velocidade média

- Como a **velocidade varia** sobre a seção transversal, é necessário trabalhar com uma **velocidade média** u_m tal que a **vazão em massa** $\dot{m}$ através do duto é:

$$\dot{m} = \rho u_m A_c$$

- Para **escoamento incompressível permanente** em um tubo de **área de seção transversal uniforme**, $\dot{m}$ e u_m são **constantes** e **independentes** de x
- Para escoamento em um tubo circular $A_c = \pi D^2/4$ e o número de Reynolds pode ser reescrito em função da **vazão mássica** como:

$$\text{Re}_D = \rho u_m \frac{D}{\mu} = \frac{\dot{m}}{A_c} \frac{D}{\mu} = \frac{\dot{m}}{\frac{\pi D^2}{4}} \frac{D}{\mu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu}$$

- A vazão em massa pode ser obtida **integrando o fluxo de massa** (ρu) sobre A_c :

$$\dot{m} = \int_{A_c} \rho u(r, x) dA_c$$

- Combinando $\dot{m} = \rho u_m A_c$ e $\dot{m} = \int_{A_c} \rho u(r, x) dA_c$ obtém-se $u_m = \frac{\int_{A_c} \rho u(r, x) dA_c}{\rho A_c}$

- Substituindo $A_c = \pi r_o^2$ e $dA_c = 2\pi r dr$ obtém-se:

$$u_m = \frac{\int_{A_c} \rho u(r, x) 2\pi r dr}{\rho \pi r_o^2} = \frac{2\pi \rho}{\rho \pi r_o^2} \int_0^{r_o} u(r, x) r dr = \frac{2}{r_o^2} \int_0^{r_o} u(r, x) r dr$$

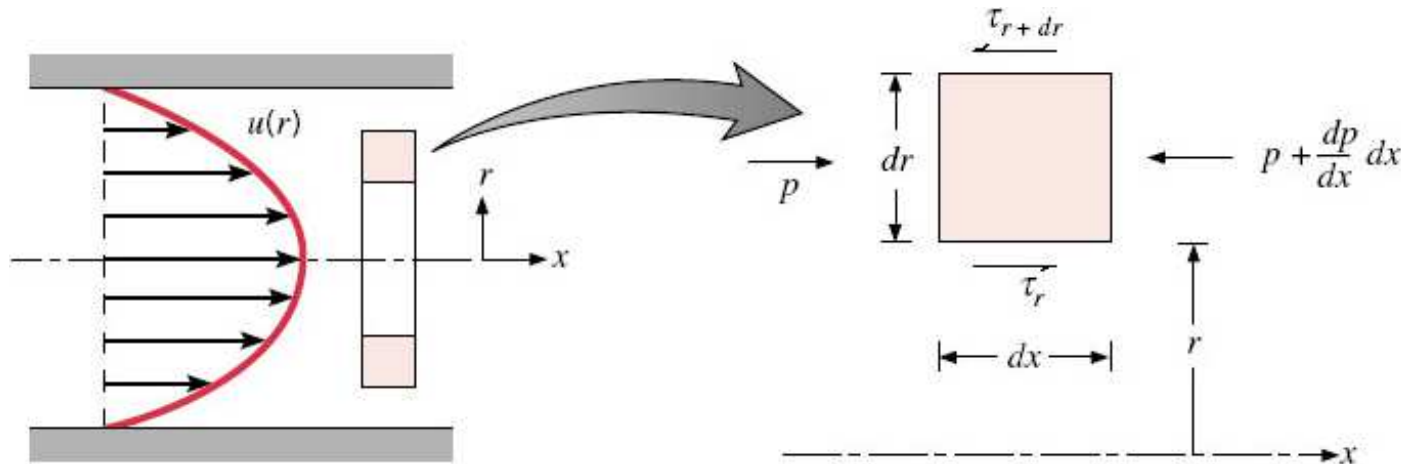
- Essa expressão pode ser utilizada para determinar u_m em **qualquer posição do eixo x** conhecendo $u(r)$ nessa posição

3.1.3 Perfil de velocidade na região plenamente desenvolvida

- Para escoamento laminar de um fluido incompressível com propriedades constantes na região plenamente desenvolvida de um tubo circular tem-se:

$$v = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

- Dessa forma, a velocidade axial é função de r e $u(x, r) = u(r)$



- A forma apropriada de $u(r)$ pode ser obtida através de um balanço entre **forças de cisalhamento** e de **pressão** num elemento de volume diferencial em forma de anel de raio r , espessura dr e comprimento dx . Não há **aceleração** uma vez que o escoamento é **estacionário e desenvolvido**, o que resulta em:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow (2\pi r dr p)_x - (2\pi r dr p)_{x+dx} + (2\pi r dx \tau)_r - (2\pi r dx \tau)_{r+dr} = 0$$

- A equação acima indica que no escoamento completamente desenvolvido em um tubo horizontal, as **forças viscosas e de pressão se contrabalançam**. Dividindo por $2\pi r dr dx$ obtém-se:

$$r \frac{p_{x+dx} - p_x}{dx} + \frac{(r\tau)_{r+dr} - (r\tau)_r}{dr} = 0$$

- Tomando o limite quando $dr, dx \rightarrow 0$ obtém-se:

$$-\frac{d}{dr}(r\tau) = r \frac{dp}{dx}$$

- Com a **lei de Newton da viscosidade** $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$ a equação acima torna-se:

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dx}$$

- Como $\frac{dp}{dx}$ não depende de r pode-se **integrar a equação acima duas vezes**:

$$r \frac{du}{dr} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{r^2}{2} + C_1 \quad \text{e} \quad u(r) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$$

- As constantes de integração podem ser obtidas pelas condições de **ausência de deslizamento na superfície do tubo** e a **simetria radial em torno da linha de centro**, ou seja:

$$u(r = r_o) = 0 \text{ e } \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

- O perfil de velocidade plenamente desenvolvido é **parabólico** e $dp/dx < 0$:

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) r_o^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right]$$

- Com a expressão de $u(r)$ a **velocidade média** pode ser obtida:

$$u_m = \frac{2}{r_o^2} \int_0^{r_o} \left\{ -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) r_o^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right] \right\} r dr \Rightarrow u_m = -\frac{r_o^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}$$

- u_m pode ser calculado pela vazão mássica e dp/dx pela equação acima

- Substituindo esse resultado na equação $u(r) = -\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)r_o^2\left[1-\left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right]$ tem-se:

$$\frac{u(r)}{u_m} = 2\left[1-\left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right]$$

3.1.4 Gradiente de pressão e fator de atrito no escoamento plenamente desenvolvido

- Para o engenheiro é importante determinar a **queda de pressão necessária** para manter um escoamento interno porque esse parâmetro determina as **necessidades de potência** da bomba ou ventilador
- **Fator de atrito de Moody** ou fator de atrito de Darcy: $f = \frac{-(dp/dx)D}{\rho u_m^2/2}$

- **Coeficiente de atrito** ou fator de atrito de Fanning: $C_f = \frac{\tau_s}{\rho u_m^2/2}$

- A relação entre essas expressões pode ser obtida sabendo que $\tau_s = -\mu \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=r_o}$

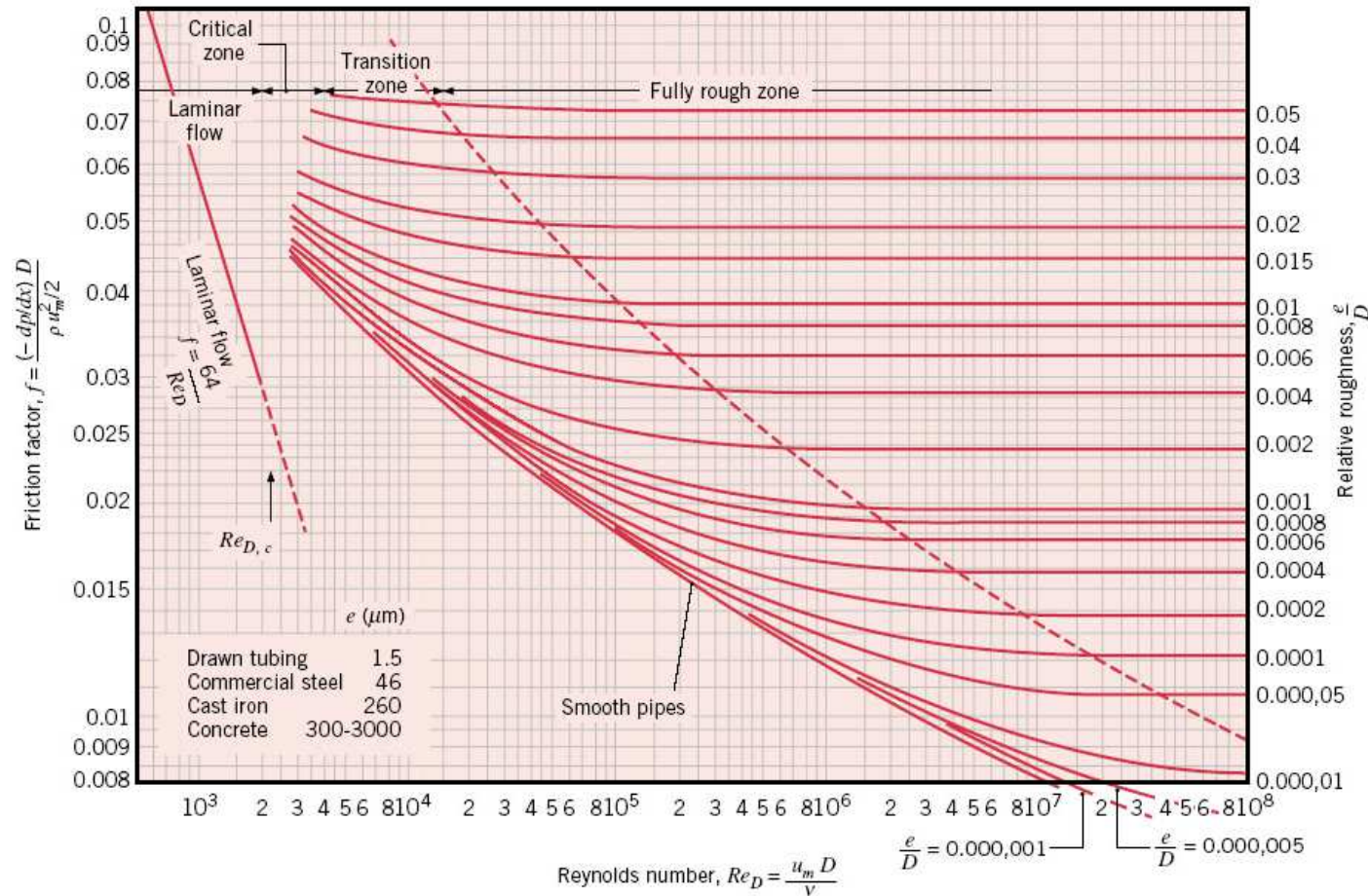
$$C_f = \frac{f}{4}$$

- Substituindo $Re_D = \frac{\rho u_m D}{\mu}$ e $u_m = -\frac{r_o^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}$ em $f = \frac{-(dp/dx)D}{\rho u_m^2/2}$ obtém-se para **escoamento laminar completamente desenvolvido**:

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

- Em **escoamento turbulento completamente desenvolvido** a análise é complexa.

- Nesse caso, o fator de atrito depende do **número de Reynolds** e da **rugosidade da superfície** do tubo. Fatores de atrito para uma ampla faixa do número de Reynolds podem ser vistos no **diagrama de Moody**



- Para uma **superfície lisa** pode-se utilizar as seguintes correlações:

$$\begin{aligned} f &= 0,316 \text{Re}_D^{-1/4} & \text{Re}_D &\leq 2 \times 10^4 \\ f &= 0,184 \text{Re}_D^{-1/5} & \text{Re}_D &\geq 2 \times 10^4 \end{aligned}$$

- Para ampla faixa de Reynolds pode ser utilizada a **correlação de Petukhov**:

$$f = (0,790 \ln \text{Re}_D - 1,64)^{-2} \quad 3000 \leq \text{Re}_D \leq 5 \times 10^6$$

- Deve ser observado que f e dp/dx é uma **constante** na região plenamente desenvolvida
- A queda de pressão $\Delta p = p_1 - p_2$ associada ao **escoamento plenamente desenvolvido** a partir da posição axial x_1 para x_2 pode ser calculada como:

$$\Delta p = -\int_{p_1}^{p_2} dp = f \frac{\rho u_m^2}{2D} \int_{x_1}^{x_2} dx = f \frac{\rho u_m^2}{2D} (x_2 - x_1)$$

- A **potência necessária** de bombas e ventiladores para **superar a resistência ao escoamento** associada a essa **queda de pressão** é calculada como:

$$P = (\Delta p)\dot{V} = (\Delta p)\frac{\dot{m}}{\rho}$$