



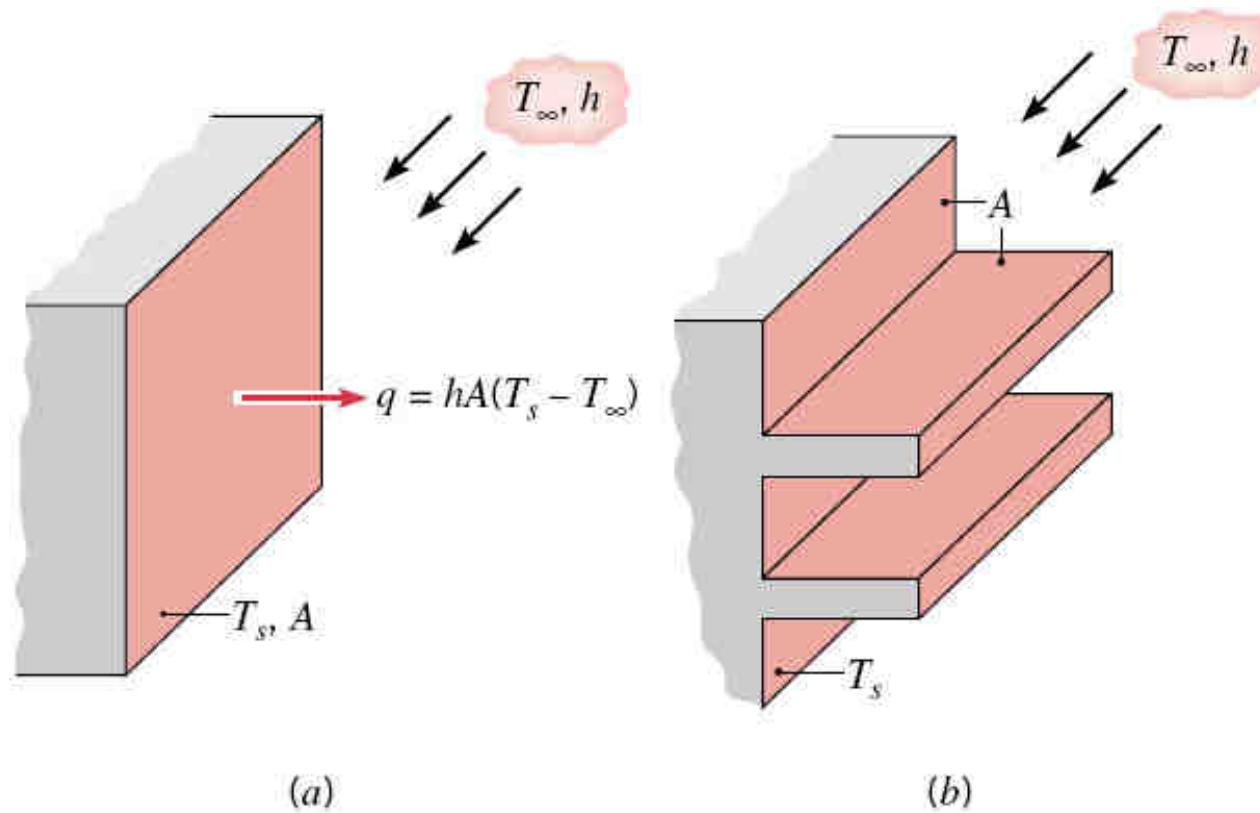
CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME ESTACIONÁRIO – PARTE 3

DISCIPLINA: TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA 1

PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

3.6 TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SUPERFÍCIES ESTENDIDAS

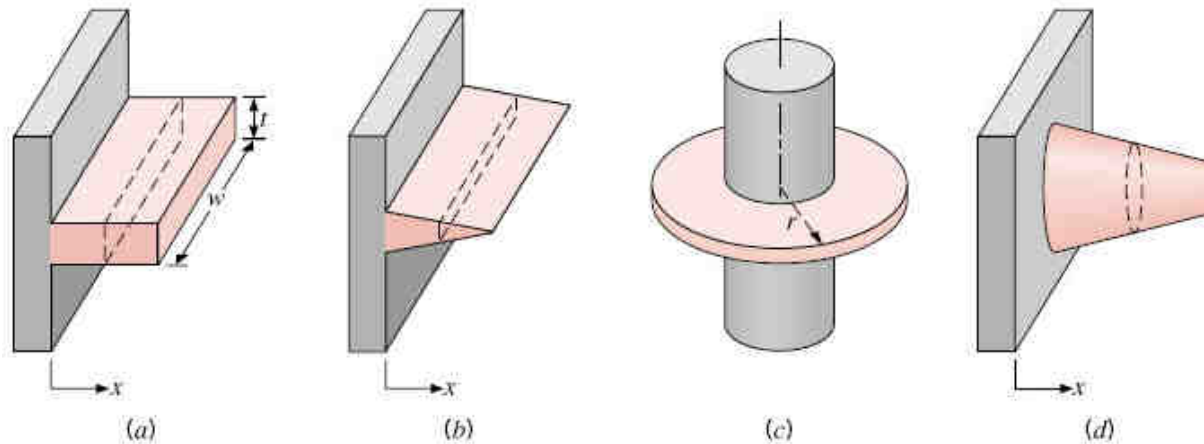
- **SUPERFÍCIE ESTENDIDA**: termo usado para descrever condução no interior de um sólido e convecção nas fronteiras do sólido.
- Embora existam diversas situações que envolvam o efeito combinado condução/radiação, a aplicação mais comum é aquela onde uma superfície estendida é utilizada para **AUMENTAR A TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR ENTRE UM SÓLIDO E UM FLUIDO ADJACENTE**.
- Tal superfície estendida é chamada de **ALETA**.



- Para **aumentar** q mantendo T_s fixo têm-se as alternativas:
 1. **Aumentar** h (às vezes insuficiente e/ou de custo elevado).
 2. **Diminuir** T_∞ (na maioria dos casos impraticável).

3. Aumentar A (aumento da área de convecção).

- A terceira opção é amplamente utilizada com o emprego de **aletas que se estendem da parede para o interior do fluido adjacente**.
- Na prática, a utilização de aletas implica em uma **resistência térmica adicional** que influencia o nível de melhora da taxa de transferência de calor.
- Dessa forma, existe uma **distribuição de temperaturas na aleta**, desde sua base até sua extremidade.
- Para minimizar a variação de temperatura ao longo da aleta, a **resistência térmica deveria ser a menor possível**, o que pode ser conseguido com **materiais de elevada condutividade térmica**.



- Aletas planas são superfícies estendidas fixas em parede plana.

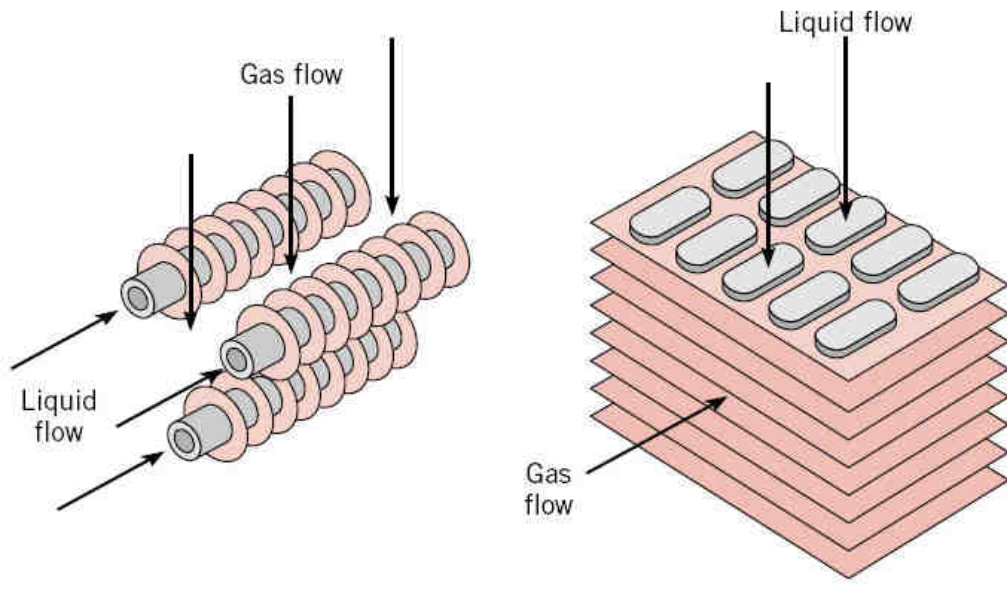
(a) Aleta plana com área de seção transversal uniforme

(b) Aleta plana com área de seção transversal variável

(d) Aleta plana com área de seção transversal uniforme (piniforme)

- Aletas anulares são superfícies estendidas fixas em parede circunferencial.

(c) Aleta anular



TROCADORES DE CALOR COM TUBOS ALETADOS TÍPICOS

- A **seleção de aletas** depende de alguns fatores tais como:
 1. Espaço disponível
 2. Peso
 3. Fabricação e custo
 4. Extensão na qual as aletas reduzem o coeficiente convectivo
 5. Queda de pressão associada ao escoamento sobre as aletas



Resfriamento de processadores



Dissipadores de calor



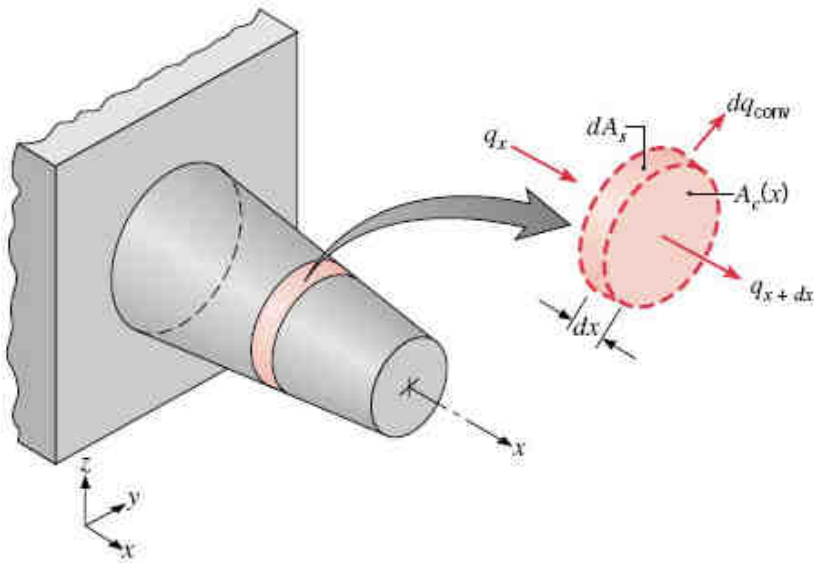
Tubos aletados



Cabeçote de automóveis

3.6.1 UMA ANÁLISE GERAL DA CONDUÇÃO

- Os objetivos de uma análise geral de condução são:
 1. Determinar o **campo de temperaturas** na aleta
 2. Determinar a **taxa de transferência de calor** na aleta
- 3. Verificar a **melhoria na taxa de transferência de calor** com as aletas



- Condução unidimensional em x
 - Regime estacionário
 - k da aleta constante
 - Radiação desprezível na superfície
- Sem efeitos de geração de calor
 - h uniforme ao longo da superfície

- Da **conservação da energia** num volume de controle diferencial:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = \dot{E}_{acu} \Rightarrow q_x = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

- Da **lei de Fourier** em x :

$$q_x = -kA_{tr} \frac{dT}{dx}$$

- Da **série de Taylor** para expressar a lei de Fourier em $x + dx$:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx = -kA_{tr} \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left(A_{tr} \frac{dT}{dx} \right) dx$$

- Da **lei de Newton** do resfriamento para a convecção:

$$dq_{conv} = h dA_s (T - T_\infty)$$

- Substituindo q_x , q_{x+dx} e dq_{conv} no balanço de energia obtém-se:

$$-kA_{tr} \frac{dT}{dx} = -kA_{tr} \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left(A_{tr} \frac{dT}{dx} \right) dx + h dA_s (T - T_\infty)$$

- Simplificando e dividindo por kdx obtém-se a **EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA UMA SUPERFÍCIE ESTENDIDA**:

$$\frac{d}{dx} \left(A_{tr} \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} (T - T_\infty) = 0$$

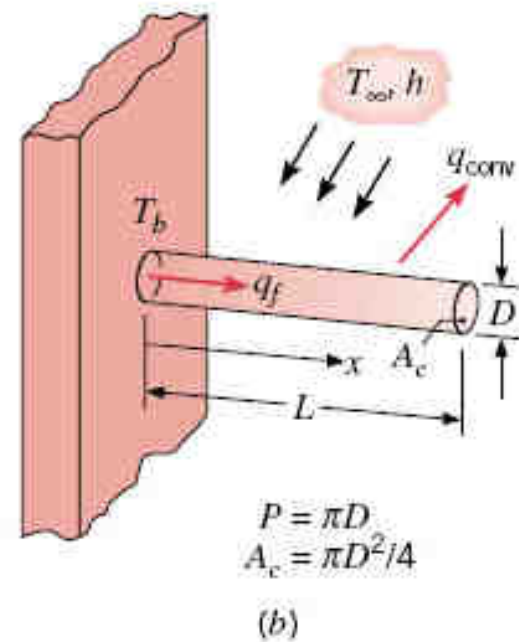
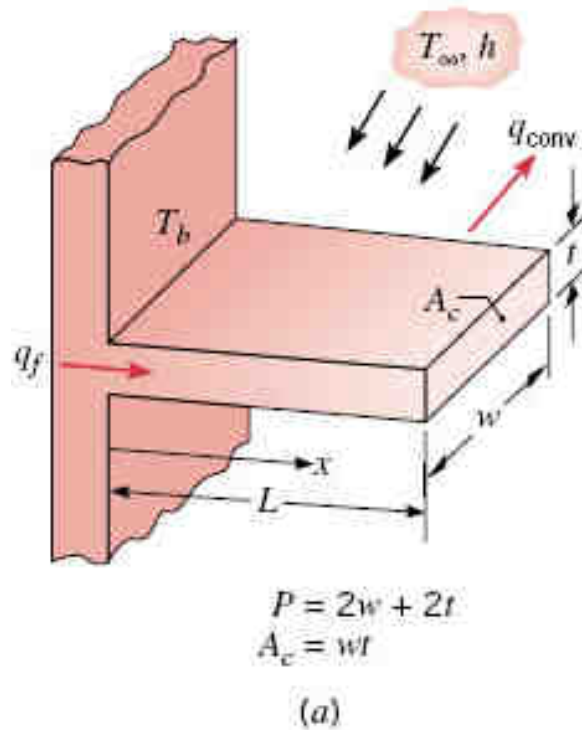
- Utilizando a derivada do produto no primeiro termo à esquerda da equação anterior e rearranjando obtém-se uma **FORMA ALTERNATIVA DA EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA UMA SUPERFÍCIE ESTENDIDA**:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_{tr}} \frac{dA_{tr}}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_{tr}} \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0$$

- A equação anterior pode ser resolvida, com condições de contorno apropriadas, para se determinar $T(x)$ ao longo da aleta.
- Deve ser notado que a equação anterior pode ser utilizada tanto para **aletas de seção transversal uniforme** ($dA_{tr}/dx = 0$) quanto para **aletas de seção transversal não-uniforme** ($dA_{tr}/dx \neq 0$).

3.6.2 ALETAS COM ÁREA DE SEÇÃO TRANSVERSAL UNIFORME

- Para aletas planas retangulares e piniformes de seção transversal uniforme ($dA_{tr}/dx = 0$):



- **Figura** (a): desconsiderando área da extremidade no cálculo de A_s

$$A_{tr} = wt \quad P = 2w + 2t \quad A_s = 2xt + 2xw = (2w + 2t)x = Px \quad \frac{dA_s}{dx} = P$$

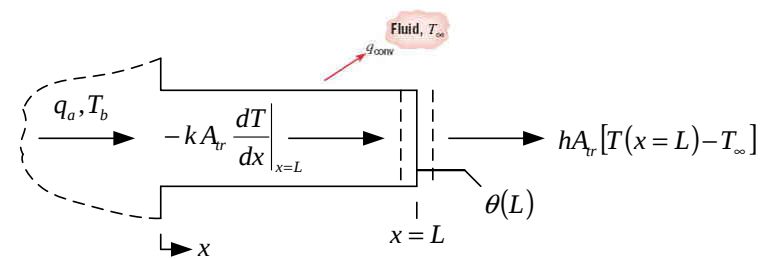
- **Figura** (b): desconsiderando área da extremidade no cálculo de A_s

$$A_{tr} = \frac{\pi D^2}{4} \quad P = \pi D \quad A_s = \pi Dx = Px \quad \frac{dA_s}{dx} = P$$

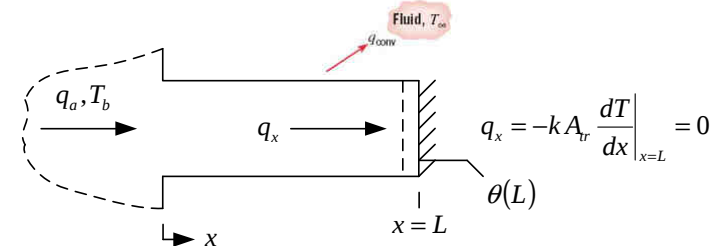
- Assim, com $dA_{tr}/dx = 0$ e $dA_s/dx = P$ a equação da energia para superfícies estendidas se torna:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_{tr}}(T - T_\infty) = 0$$

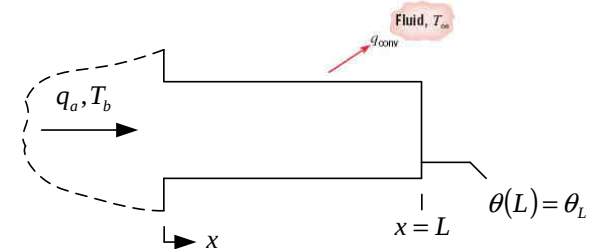
Caso A
(Transferência de calor por convecção)



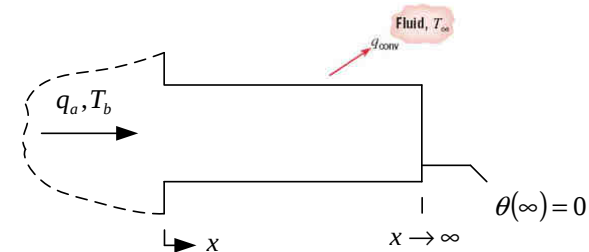
Caso B
(Adiabática)



Caso C
(Temperatura especificada)



Caso D
(Aleta infinita)



Caso	Condição na base ($x = 0$)	Condição na extremidade ($x = L$)
A	$T(x = 0) = T_b$	Transferência de calor por convecção: $-k A_{tr} \left. \frac{dT}{dx} \right _{x=L} = h A_{tr} [T(x = L) - T_\infty]$
B	$T(x = 0) = T_b$	Adiabática: $\left. \frac{dT}{dx} \right _{x=L} = 0$
C	$T(x = 0) = T_b$	Temperatura especificada: $T(x = L) = T_L$
D	$T(x = 0) = T_b$	Aleta infinita ($L \rightarrow \infty$): $T(x = L) - T_\infty \rightarrow 0$

- Para simplificar o processo de solução introduz-se a variável **excesso de temperatura**, definida como:

$$\theta(x) = T(x) - T_{\infty}$$

- Com T_{∞} constante tem-se que:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d\theta}{dx} + \overbrace{\frac{dT_{\infty}}{dx}}^{=0} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{d\theta}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

- Fazendo $m^2 = \frac{hP}{kA_{tr}}$, onde m é chamado de **parâmetro da aleta**, com unidade $[m^{-1}]$ no SI, a equação diferencial da aleta torna-se:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

- Além disso, tem-se que:

$$\theta(x=0) = T(x=0) - T_\infty = T_b - T_\infty = \theta_b$$

$$\theta(x=L) = T(x=L) - T_\infty = T_L - T_\infty = \theta_L$$

- Dessa forma, o problema da aleta consiste na solução da equação diferencial ordinária $\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$ sujeita às condições de contorno indicadas pelos casos A, B, C e D, conforme tabela anterior. Modificando a tabela com variável $\theta(x)$ obtém-se:

Caso	Condição na base ($x = 0$)	Condição na extremidade ($x = L$)
A	$\theta(x = 0) = \theta_b$	Transferência de calor por convecção: $-k A_{tr} \left. \frac{d\theta}{dx} \right _{x=L} = h A_{tr} \theta(x = L)$
B	$\theta(x = 0) = \theta_b$	Adiabática: $\left. \frac{d\theta}{dx} \right _{x=L} = 0$
C	$\theta(x = 0) = \theta_b$	Temperatura especificada: $\theta(x = L) = \theta_L$
D	$\theta(x = 0) = \theta_b$	Aleta infinita ($L \rightarrow \infty$): $\theta_L \rightarrow 0$

- A solução geral da equação diferencial da aleta, de segunda ordem, linear e homogênea, com coeficientes constantes é:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

- A solução para cada caso consiste em se obter as constantes C_1 e C_2 , a distribuição de temperaturas na aleta $\theta(x)$ e a taxa de transferência de calor da aleta q_a .
- Por questão de simplicidade será mostrado aqui o procedimento de solução para o caso D.
- Aplicando a condição de contorno na base:

$$\theta(x=0) = C_1 e^{m \cdot 0} + C_2 e^{-m \cdot 0} = \theta_b \Rightarrow C_2 = \theta_b - C_1$$

- Aplicando a condição de contorno na extremidade:

$$\theta(x=\infty) = C_1 e^{m \cdot \infty} + C_2 e^{-m \cdot \infty} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

- Dessa forma, $C_2 = \theta_b$ e a solução particular torna-se:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} = e^{-mx}$$

- A taxa de transferência de calor pode ser obtida aplicando a **lei de Fourier na base da aleta**:

$$q_a = -kA_{tr} \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -kA_{tr} \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = -kA_{tr} \frac{d}{dx} (\theta_b e^{-mx}) \Big|_{x=0} = -kA_{tr} \theta_b \frac{d}{dx} (e^{-mx}) \Big|_{x=0}$$

$$q_a = -kA_{tr} \theta_b (-me^{-mx}) \Big|_{x=0} = kA_{tr} \theta_b m = kA_{tr} \theta_b \sqrt{\frac{hP}{kA_{tr}}} \Rightarrow q_a = \sqrt{hPkA_{tr}} \theta_b$$

- Resultados para $\theta(x)/\theta_b$ e q_a podem ser obtidos para os demais casos utilizando o mesmo procedimento.
- Esses resultados podem ser visualizados na tabela abaixo.
- Deve ser notado que $\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty}$ para qualquer caso e que $M = \sqrt{hPkA_{tr}} \theta_b$ (a unidade é W no SI) para qualquer caso.

TABLE 3.4 Temperature distribution and heat loss for fins of uniform cross section

Case	Tip Condition ($x = L$)	Temperature Distribution θ/θ_b	Fin Heat Transfer Rate q_f
A	Convection heat transfer: $h\theta(L) = -kd\theta/dx _{x=L}$	$\frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$ (3.70)	$M \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$ (3.72)
B	Adiabatic $d\theta/dx _{x=L} = 0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$ (3.75)	$M \tanh mL$ (3.76)
C	Prescribed temperature: $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$ (3.77)	$M \frac{(\cosh mL - \theta_L/\theta_b)}{\sinh mL}$ (3.78)
D	Infinite fin ($L \rightarrow \infty$): $\theta(L) = 0$	e^{-mx} (3.79)	M (3.80)
$\theta \equiv T - T_\infty$ $\theta_b \equiv \theta(0) = T_b - T_\infty$ $m^2 \equiv hP/kA_c$ $M \equiv \sqrt{hPkA_c} \theta_b$			

- Na tabela acima nota-se a presença de funções hiperbólicas, cujas definições e valores tabelados encontram-se na tabela abaixo:

x	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	x	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$
0.00	0.0000	1.0000	0.00000	2.00	3.6269	3.7622	0.96403
0.10	0.1002	1.0050	0.09967	2.10	4.0219	4.1443	0.97045
0.20	0.2013	1.0201	0.19738	2.20	4.4571	4.5679	0.97574
0.30	0.3045	1.0453	0.29131	2.30	4.9370	5.0372	0.98010
0.40	0.4108	1.0811	0.37995	2.40	5.4662	5.5569	0.98367
0.50	0.5211	1.1276	0.46212	2.50	6.0502	6.1323	0.98661
0.60	0.6367	1.1855	0.53705	2.60	6.6947	6.7690	0.98903
0.70	0.7586	1.2552	0.60437	2.70	7.4063	7.4735	0.99101
0.80	0.8881	1.3374	0.66404	2.80	8.1919	8.2527	0.99263
0.90	1.0265	1.4331	0.71630	2.90	9.0596	9.1146	0.99396
1.00	1.1752	1.5431	0.76159	3.00	10.018	10.068	0.99505
1.10	1.3356	1.6685	0.80050	3.50	16.543	16.573	0.99818
1.20	1.5095	1.8107	0.83365	4.00	27.290	27.308	0.99933
1.30	1.6984	1.9709	0.86172	4.50	45.003	45.014	0.99975
1.40	1.9043	2.1509	0.88535	5.00	74.203	74.210	0.99991
1.50	2.1293	2.3524	0.90515	6.00	201.71	201.72	0.99999
1.60	2.3756	2.5775	0.92167	7.00	548.32	548.32	1.0000
1.70	2.6456	2.8283	0.93541	8.00	1490.5	1490.5	1.0000
1.80	2.9422	3.1075	0.94681	9.00	4051.5	4051.5	1.0000
1.90	3.2682	3.4177	0.95624	10.000	11013	11013	1.0000

- As funções hiperbólicas são definidas pelas seguintes relações:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- As derivadas e integrais de funções hiperbólicas são:

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = (\cosh u) \frac{du}{dx}$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = (\sinh u) \frac{du}{dx}$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} u) = \left(\frac{1}{\cosh^2 u} \right) \frac{du}{dx}$$

$$\int \operatorname{tgh} x dx = \ln(\cosh x) + C$$

- Uma forma alternativa para se determinar a taxa de transferência de calor na aleta q_a é utilizar a **conservação de energia na aleta**:

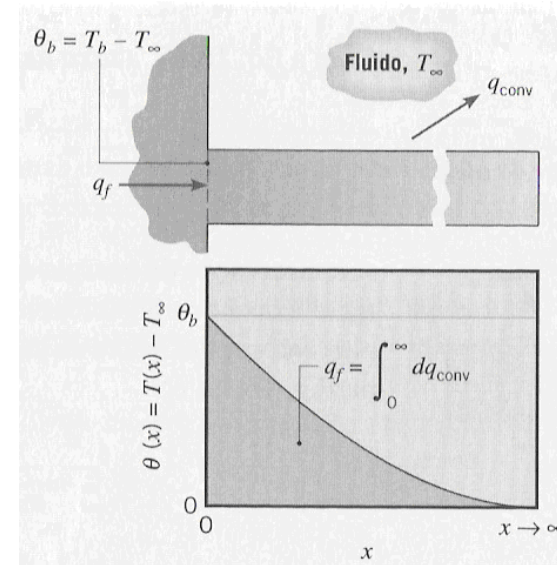
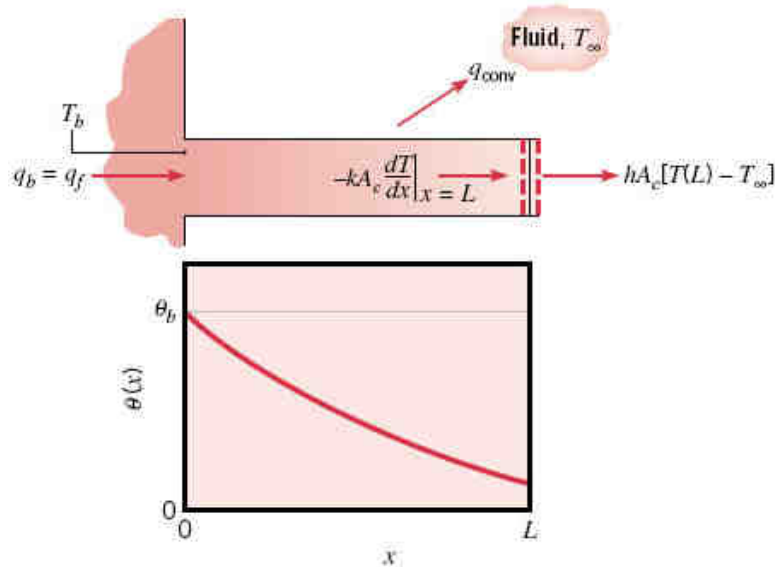
$$\left(\begin{array}{c} \text{Taxa na qual o calor é} \\ \text{transferido por convecção} \\ \text{da superfície da aleta} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Taxa condutiva através} \\ \text{da base da aleta} \end{array} \right)$$

- Conseqüentemente, a **formulação alternativa** para q_a é:

$$q_a = \int_{A_a} h[T(x) - T_\infty] dA_s = \int_{A_a} h\theta(x) dA_s$$

- Expressões de q_a para os quatro casos podem ser obtidas substituindo expressões de $\theta(x)$ e posterior integração.

- Na figura abaixo pode ser visto o perfil de temperaturas para uma aleta plana de seção transversal uniforme com extremidade com convecção e aleta infinita:



- Nota-se que o valor do **gradiente de temperatura diminui com o aumento de x** . Essa tendência é uma consequência da redução na transferência de calor por condução com o aumento de x , devido à contínua perda de calor por convecção na superfície da aleta.

3.6.3 DESEMPENHO DE ALETAS

- **Efetividade da aleta:** *razão entre a taxa de transferência de calor da aleta e a taxa de transferência de calor sem a aleta.*

$$\varepsilon_a = \frac{q_a}{hA_{tr,b}(T_b - T_\infty)} = \frac{q_a}{hA_{tr,b}\theta_b}$$

- $A_{tr,b}$ é a área da seção transversal da aleta na sua base.
- O uso de aleta é justificado para $\varepsilon_a \geq 2$.
- Para qualquer uma das **quatro condições na extremidade na aleta** pode-se então determinar o valor de ε_a .

- Por exemplo, para o caso D (aleta infinita):

$$\varepsilon_a = \frac{q_a}{hA_{tr,b}\theta_b} = \frac{M}{hA_{tr,b}\theta_b} = \frac{\sqrt{hPkA_{tr}}\theta_b}{hA_{tr}\theta_b} = \left(\frac{kP}{hA_{tr}}\right)^{1/2}$$

- Desses resultados podem-se inferir algumas tendências:

1. ε_a aumenta com o aumento de k (ligas de alumínio e cobre)
 2. ε_a aumenta com o aumento de P/A_{tr} (aletas finas)
 3. A utilização de aletas justifica-se em casos de baixo h (o fluido é gás e/ou um processo de convecção natural)
- Se for desejado que $\varepsilon_a > 2$ obtém-se a exigência que $(kP/hA_{tr}) > 4$.

- O desempenho de aletas também pode ser quantificado através de uma **resistência térmica de cada aleta**:

$$R_{t,a} = \frac{T(x=0) - T_{\infty}}{q_a} = \frac{T_b - T_{\infty}}{q_a} = \frac{\theta_b}{q_a}$$

- A resistência convectiva da base exposta é:

$$R_{t,b} = \frac{1}{hA_{tr,b}}$$

- Dividindo $R_{t,b}$ por $R_{t,a}$ obtém-se:

$$\frac{R_{t,b}}{R_{t,a}} = \frac{q_a}{hA_{tr,b}\theta_b} = \varepsilon_a$$

- A efetividade de uma aleta pode ser interpretada como uma **razão entre resistências térmicas**. Dessa forma, para aumentar ε_a é necessário reduzir $R_{t,a}$.
- **Eficiência da aleta**: *razão entre a taxa de transferência de calor real da aleta e a taxa máxima de transferência de calor da aleta.*
- A taxa máxima na qual uma aleta poderia dissipar energia é a **taxa de transferência de calor que existiria se toda a superfície da aleta estivesse na temperatura da base**.
- Entretanto, como toda aleta possui uma resistência condutiva não-nula, há necessariamente um gradiente de temperatura ao longo da aleta e a condição anterior é uma **idealização**.

$$\eta_a = \frac{q_a}{q_{\max}} = \frac{q_a}{hA_a[T(x=0) - T_\infty]} = \frac{q_a}{hA_a(T_b - T_\infty)} = \frac{q_a}{hA_a\theta_b}$$

- A_a é a área superficial total da aleta: $A_a = A_s + A_{\text{extremidade}}$
- Por exemplo, para o caso B (extremidade adiabática):

$$\eta_a = \frac{q_a}{hA_a\theta_b} = \frac{\overbrace{MtghmL}^{=0 \text{ (ADIABÁTICA)}}}{h\left(A_s + \overbrace{A_{\text{extremidade}}}\right)\theta_b} = \frac{MtghmL}{hPL\theta_b} = \frac{tghmL}{mL}$$

- Para uma aleta com convecção na extremidade (CASO A), a expressão para a eficiência da aleta η_a seria complexa.

- Nesse caso, pode-se utilizar o resultado para o caso B desde que se utilize um comprimento corrigido L_c , baseado na hipótese de equivalência entre a transferência de calor na extremidade da aleta real, com convecção na extremidade, e a transferência de calor em uma aleta hipotética, mais longa e com a extremidade adiabática.

$$L_c = L + (t/2) \quad (\text{aleta retangular})$$

$$L_c = L + (D/4) \quad (\text{aleta piniforme})$$

- Assim, com convecção na extremidade, a taxa de transferência de calor pode ser aproximada por:

$$q_a = MtghmL_c$$

- A eficiência correspondente é dada por:

$$\eta_a = \frac{tghmL_c}{mL_c}$$

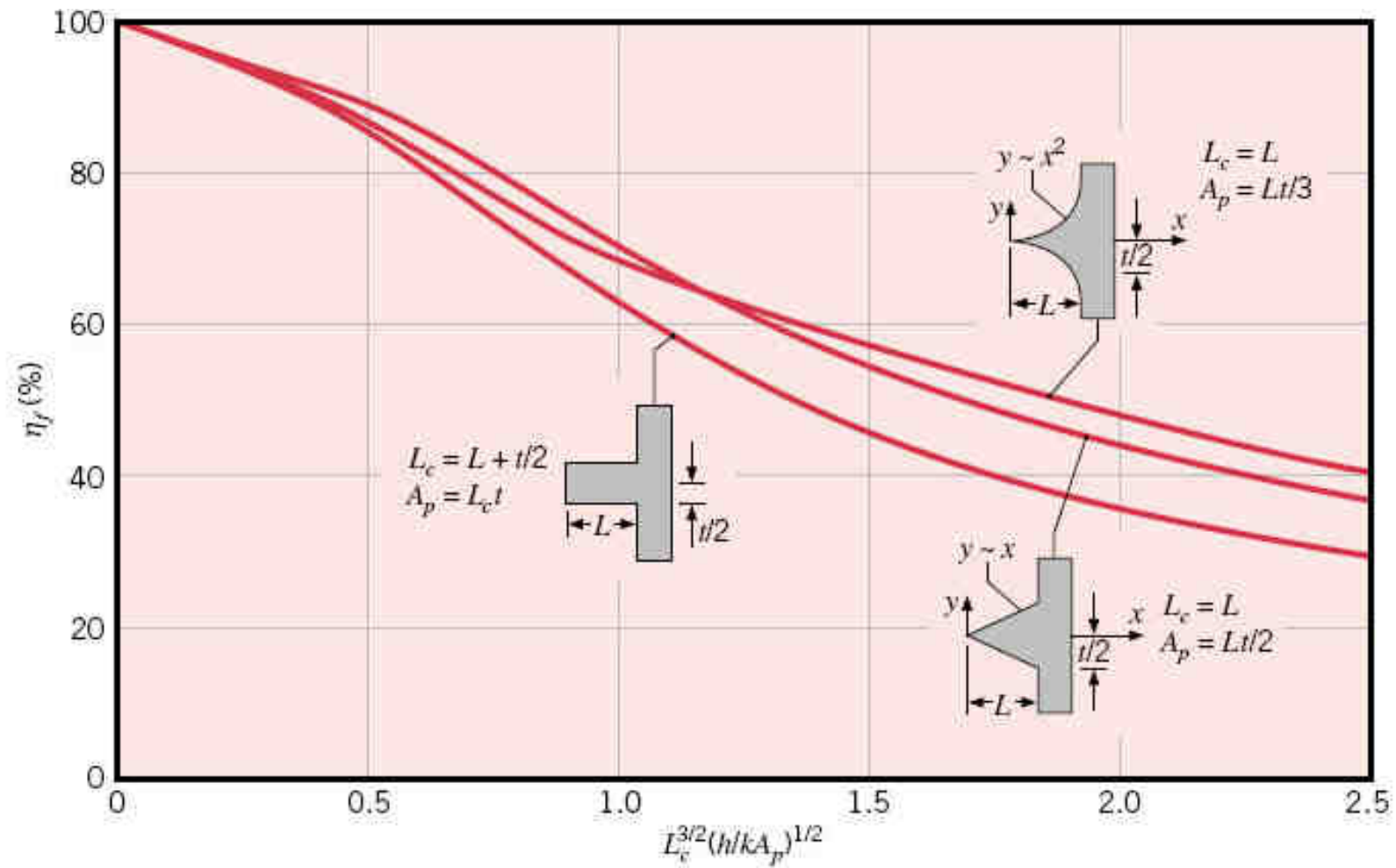
- A aproximação do comprimento corrigido tem **erro desprezível** quando (ht/k) ou $(hD/2k) \leq 0,0625$.
- Se a largura de uma aleta retangular é muito maior que sua espessura ($w \gg t$), seu perímetro é aproximado por $P = 2w$ e:

$$mL_c = \left(\frac{hP}{kA_{tr}} \right)^{1/2} L_c = \left(\frac{2hw}{kwt} \right)^{1/2} L_c = \left(\frac{2h}{kt} \right)^{1/2} L_c$$

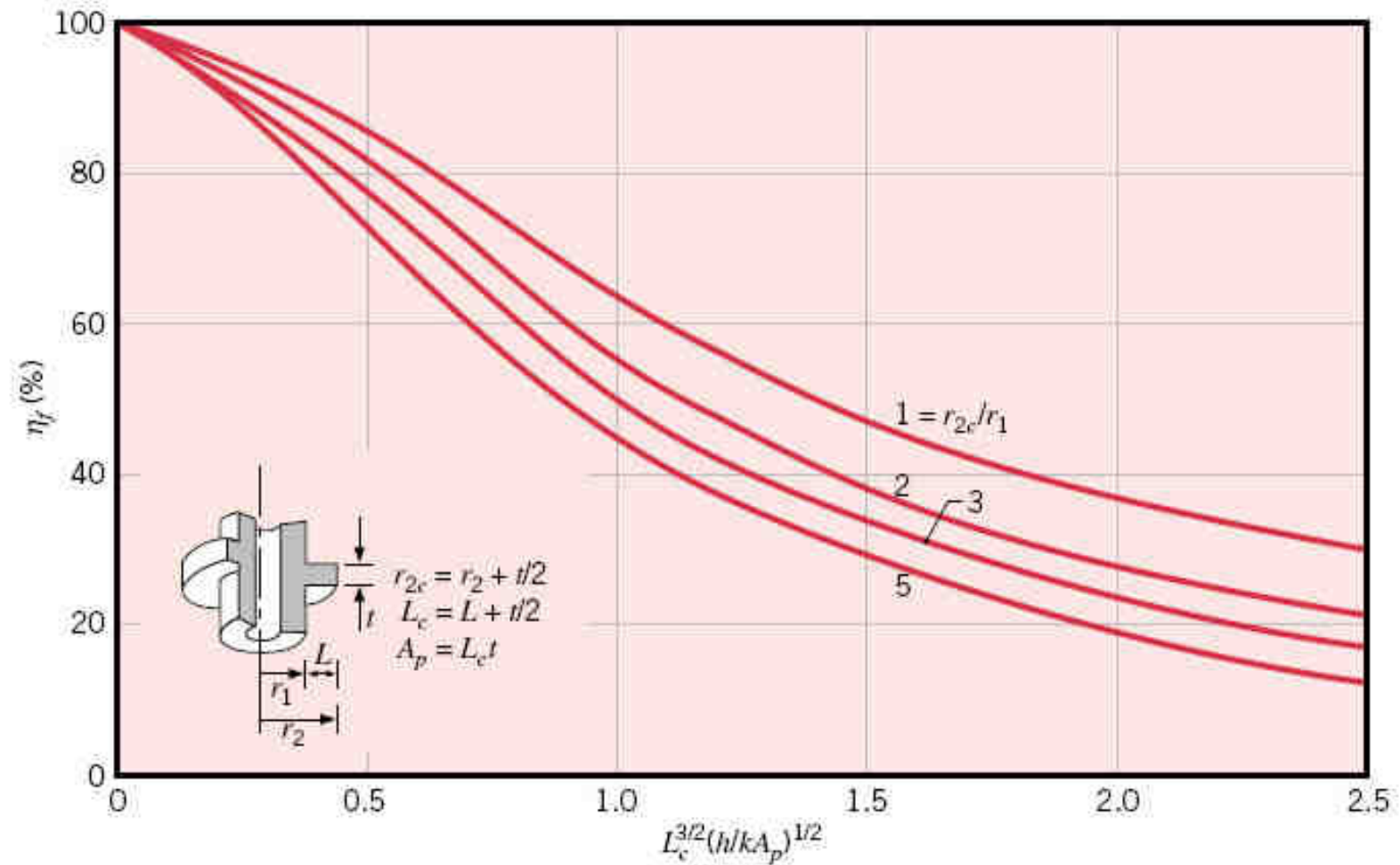
- Multiplicando o numerador e o denominador por $L_c^{1/2}$ e introduzindo uma área corrigida de perfil $A_p = L_c t$ obtém-se:

$$mL_c = \left(\frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} L_c^{3/2}$$

- Dessa forma, de acordo com as duas figuras abaixo, a eficiência de uma aleta retangular com convecção na extremidade pode ser representada como uma função de $L_c^{3/2} (h/kA_p)^{1/2}$.



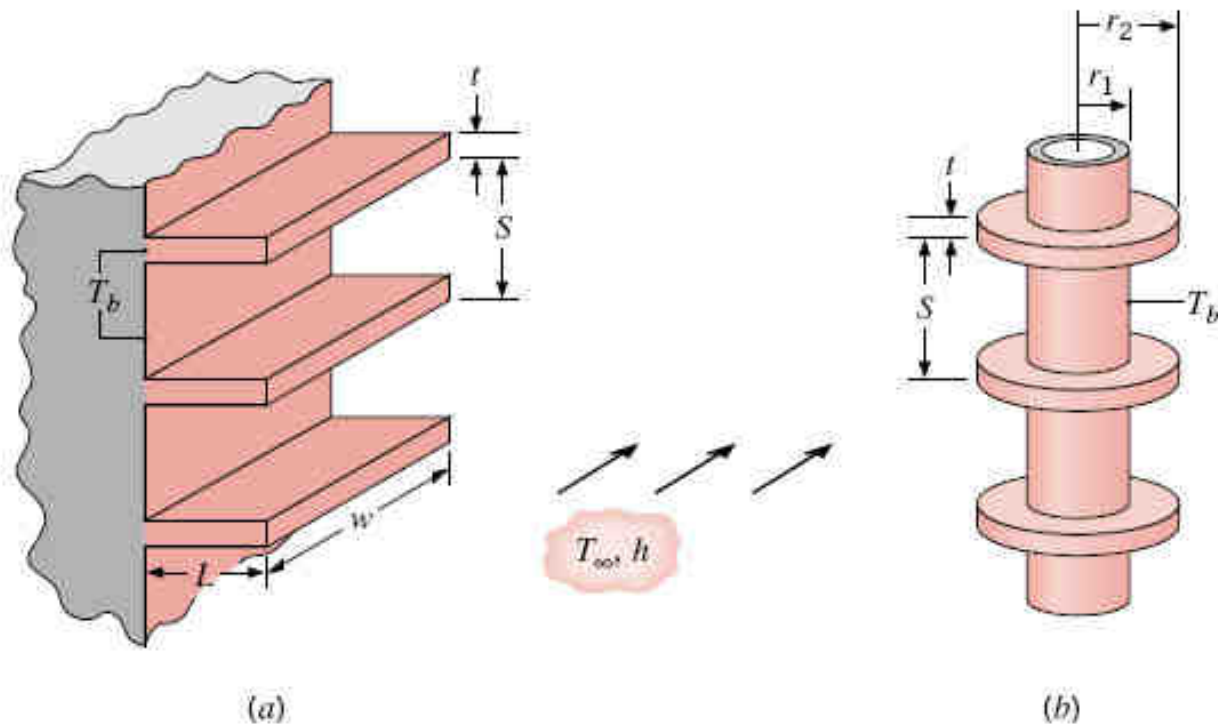
EFICIÊNCIA DE ALETAS PLANAS (PERFIS RETANGULAR, TRIANGULAR E PARABÓLICO).



EFICIÊNCIA DE ALETAS ANULARES DE PERFIL
RETANGULAR

3.6.4 EFICIÊNCIA GLOBAL DE SUPERFÍCIE

- Caracteriza um conjunto de aletas e a superfície base na qual ele está fixado.



(a) ALETAS RETANGULARES. (b) ALETAS ANULARES.

- S é o passo das aletas e a eficiência global é definida como:

$$\eta_o = \frac{q_t}{q_{\max}} = \frac{q_t}{hA_t [T(x=0) - T_\infty]} = \frac{q_t}{hA_t (T_b - T_\infty)} = \frac{q_t}{hA_t \theta_b}$$

- q_t é a taxa total de transferência de calor na área superficial A_t associada à área das aletas e a fração exposta da base. Para N aletas tem-se que:

$$A_t = NA_a + A_b$$

- A taxa máxima possível de transferência de calor ocorreria se toda a superfície da aleta, assim como a área exposta da base, fossem mantidas à temperatura T_b .

- A taxa total de transferência de calor por convecção das aletas e da superfície sem aletas pode ser representada por:

$$q_t = Nq_a + hA_b\theta_b = N\eta_a hA_a\theta_b + hA_b\theta_b$$

- Evidenciando h e substituindo $A_b = A_t - NA_a$ obtém-se:

$$q_t = h[N\eta_a A_a + (A_t - NA_a)]\theta_b = hA_t \left[1 - \frac{NA_a}{A_t} (1 - \eta_a) \right] \theta_b$$

- Substituindo a expressão anterior na eficiência global obtém-se:

$$\eta_o = \frac{hA_t \left[1 - \frac{NA_a}{A_t} (1 - \eta_a) \right] \theta_b}{hA_t \theta_b} \Rightarrow \eta_o = 1 - \frac{NA_a}{A_t} (1 - \eta_a)$$

- O desempenho do sistema também pode ser quantificado através de uma **resistência térmica do conjunto de aletas**:

$$R_{t,o} = \frac{T(x=0) - T_{\infty}}{q_t} = \frac{T_b - T_{\infty}}{q_t} = \frac{\theta_b}{q_t} = \frac{\theta_b}{\eta_o h A_t \theta_b} = \frac{1}{\eta_o h A_t}$$

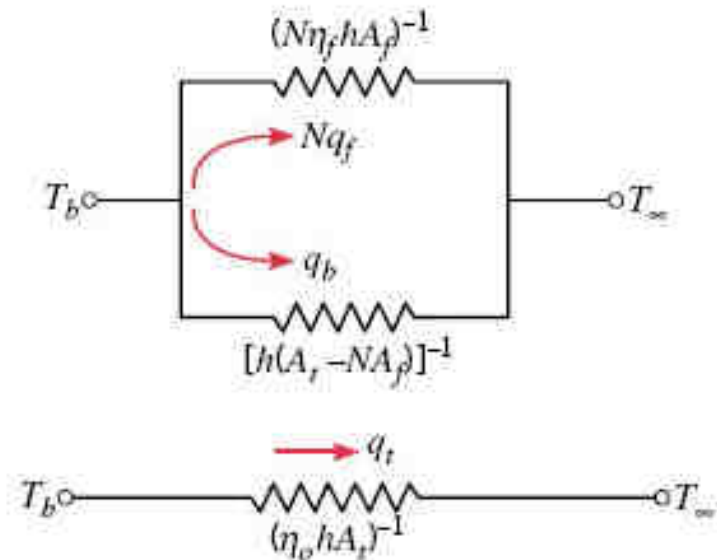
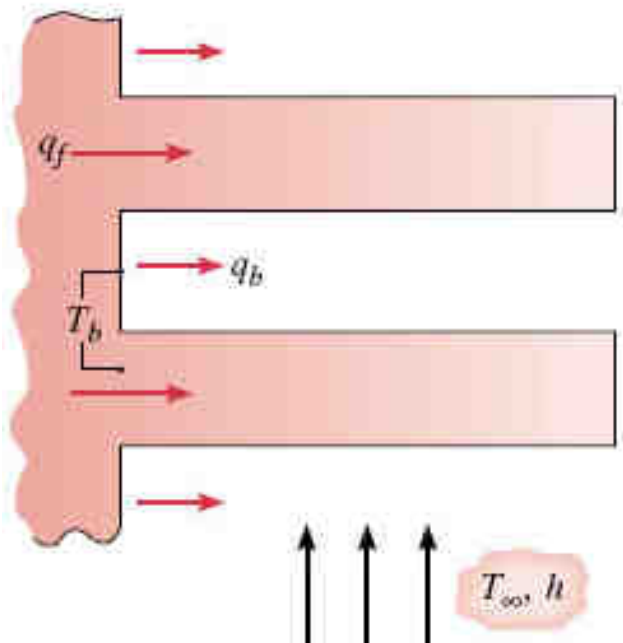
- $R_{t,o}$ é uma **resistência efetiva** que leva em conta as trajetórias do calor paralelas por condução/convecção nas aletas e por convecção na superfície exposta.
- Sabendo que as aletas estão em paralelo em um circuito térmico:

$$\frac{1}{R_{equivalente,a}} = \frac{1}{R_{t,a}} + \frac{1}{R_{t,a}} + \frac{1}{R_{t,a}} + \dots = \frac{N}{R_{t,a}} \Rightarrow R_{equivalente,a} = \frac{R_{t,a}}{N}$$

- Para um conjunto de aletas integradas a base tem-se:

$$R_b = \frac{1}{h(A_t - NA_a)}$$

$$R_{equivalente,a} = \frac{T_b - T_\infty}{q_a} = \frac{\theta_b}{\eta_a h A_a \theta_b} = \frac{1}{N \eta_a h A_a}$$



- Associando as duas resistências em paralelo obtém-se:

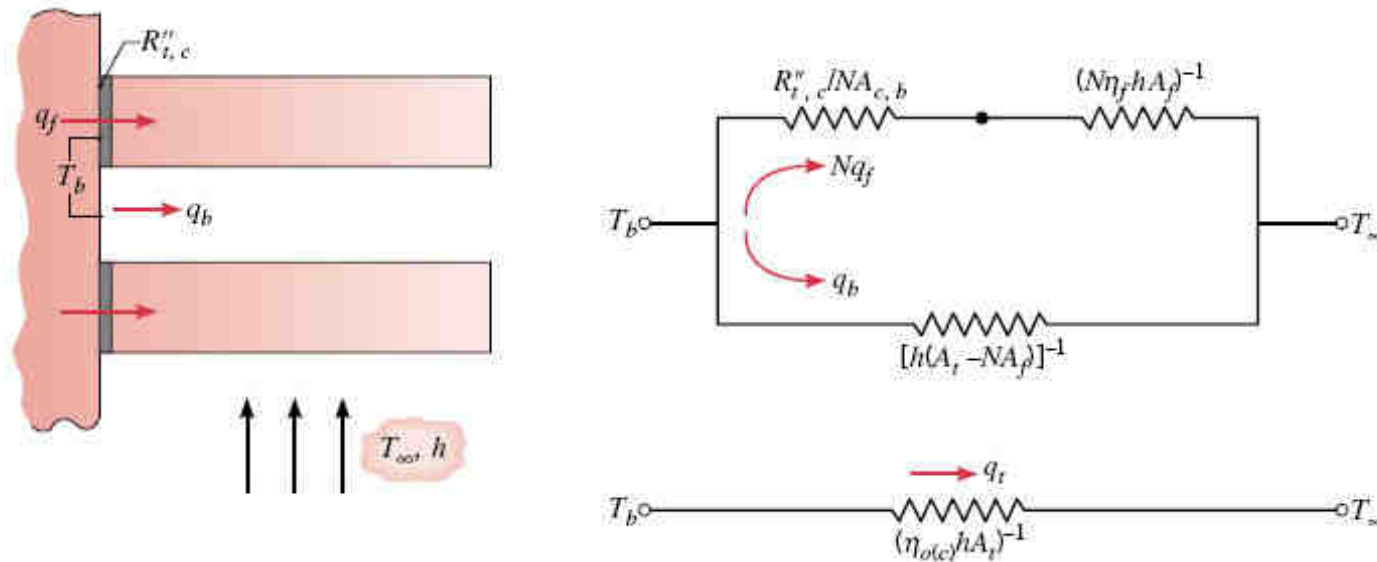
$$R_{t,o} = \frac{\frac{1}{h(A_t - NA_a)}}{\frac{1}{h(A_t - NA_a)} + \frac{1}{N\eta_a hA_a}} = \frac{1}{\eta_o hA_t}$$

- Para um conjunto de aletas fixadas por pressão em fendas usinadas sobre o material da parede surge uma **resistência térmica de contato** que pode **influenciar negativamente o desempenho térmico global do sistema**.
- Para um conjunto de aletas fixadas por pressão tem-se:

$$R_b = \frac{1}{h(A_t - NA_a)}$$

$$R_{t,c} = \frac{R''_{t,c}}{NA_{tr,b}}$$

$$R_{equivalente,a} = \frac{1}{N\eta_a hA_a}$$



- Uma resistência efetiva é ser obtida pela resistência de contato:

$$R_{t,o(c)} = \frac{\theta_b}{q_t} = \frac{1}{\eta_{o(c)} h A_t}$$

- Tal expressão é deduzida pela associação de resistências térmicas conforme figura anterior:

$$R_{t,o(c)} = \frac{\left(\frac{R_{t,c}''}{NA_{tr,b}} + \frac{1}{N\eta_a h A_a} \right) \left(\frac{1}{h(A_t - NA_a)} \right)}{\frac{R_{t,c}''}{NA_{tr,b}} + \frac{1}{N\eta_a h A_a} + \frac{1}{h(A_t - NA_a)}} = \frac{1}{\eta_{o(c)} h A_t}$$

- Mostra-se facilmente que a eficiência global da superfície é:

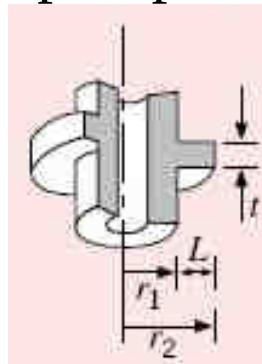
$$\eta_{o(c)} = 1 - \frac{NA_a}{A_t} \left(1 - \frac{\eta_a}{C_1} \right)$$

$$C_1 = 1 + \eta_a h A_a \left(R_{t,c}'' / A_{tr,b} \right)$$

- Na fabricação deve-se tomar cuidado para que $R_{t,c} \ll R_{t,a}$.

3.6.5 ALETAS COM ÁREA DE SEÇÃO TRANSVERSAL NÃO-UNIFORME

- Se a aleta possuir uma seção transversal não-uniforme seu comportamento térmico se torna mais complexo.
- As soluções não são mais na forma de funções exponenciais ou hiperbólicas simples.
- Por exemplo, para a aleta anular:



$$A_{tr} = 2\pi r t$$

$$A_s = 2\pi(r^2 - r_1^2) \text{ (dois lados)}$$

- Utilizando a solução geral com $x = r$ e utilizando A_{tr} e A_s tem-se:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{2h}{kt} (T - T_\infty) = 0$$

- Fazendo $m^2 = 2h/kt$ e $\theta = T - T_\infty$ obtém-se:

$$\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - m^2 \theta = 0$$

- A equação diferencial acima é uma **equação de Bessel modificada de ordem zero** e sua solução geral tem a forma:

$$\theta(r) = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

- I_0 e K_0 são funções de Bessel modificadas de ordem zero, de primeira e segunda espécies, respectivamente.
- Da mesma forma que nas aletas de seção transversal uniforme, as constantes C_1 e C_2 podem ser obtidas através das condições de contorno do problema, isto é, casos A, B, C e D.
- Por exemplo, para temperatura da base especificada, $\theta(r_1) = \theta_b$ e extremidade adiabática, $d\theta/dr|_{r=r_2} = 0$, as constantes C_1 e C_2 podem ser obtidas e a distribuição de temperaturas tem a forma:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{I_0(mr)K_1(mr_2) + K_0(mr)I_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}$$

- I_1 e K_1 são funções de Bessel modificadas de primeira ordem, de primeira e segunda espécies, respectivamente.
- A taxa de transferência de calor na base da aleta é:

$$q_a = -kA_{tr,b} \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} = -k(2\pi r_1 t) \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_1}$$

$$q_a = 2\pi k r_1 t \theta_b m \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{K_0(mr_1)I_1(mr_2) + I_0(mr_1)K_1(mr_2)}$$

- A eficiência da aleta se torna:

$$\eta_a = \frac{q_a}{h2\pi(r_2^2 - r_1^2)\theta_b} = \frac{2r_1}{m(r_2^2 - r_1^2)} \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{K_0(mr_1)I_1(mr_2) + I_0(mr_1)K_1(mr_2)}$$

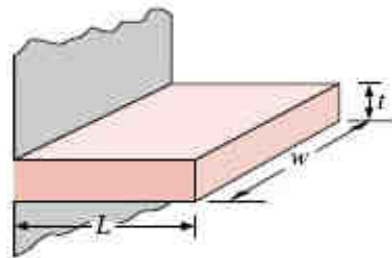
Straight Fins

Rectangular^a

$$A_f = 2wL_c$$

$$L_c = L + (t/2)$$

$$A_p = tL$$

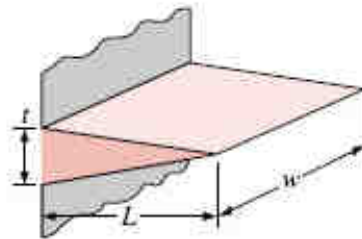


$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c} \quad (3.89)$$

Triangular^a

$$A_f = 2w[L^2 + (t/2)^2]^{1/2}$$

$$A_p = (t/2)L$$



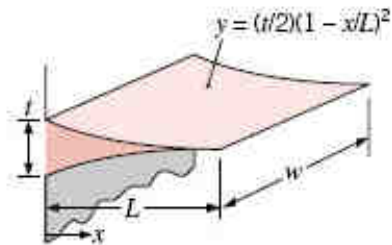
$$\eta_f = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)} \quad (3.93)$$

Parabolic^a

$$A_f = w[C_1L + (L^2t)\ln(t/L + C_1)]$$

$$C_1 = [1 + (t/L)^2]^{1/2}$$

$$A_p = (t/3)L$$



$$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1} \quad (3.94)$$

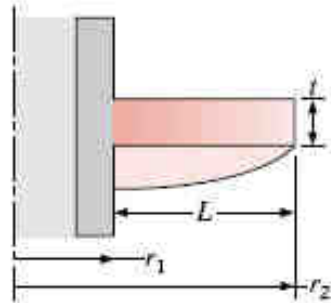
Circular Fin

Rectangular^a

$$A_f = 2\pi (r_{2c}^2 - r_1^2)$$

$$r_{2c} = r_2 + (t/2)$$

$$V = \pi (r_2^2 - r_1^2)t$$



$$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})} \quad (3.91)$$

$$C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$$

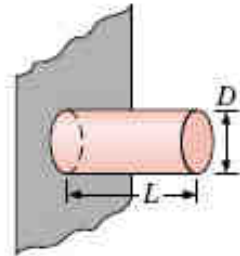
Pin Fins

Rectangular^b

$$A_f = \pi D L_c$$

$$L_c = L + (D/4)$$

$$V = (\pi D^2/4)L$$

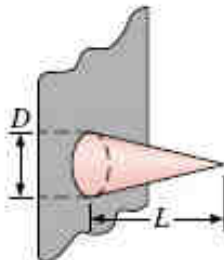


$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c} \quad (3.95)$$

Triangular^b

$$A_f = \frac{\pi D}{2} [L^2 + (D/2)^2]^{1/2}$$

$$V = (\pi/12)D^2L$$



$$\eta_f = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)} \quad (3.96)$$

Parabolic^b

$$A_f = \frac{\pi L^3}{8D} \{ C_3 C_4 - \frac{L}{2D} \ln [(2DC_4/L) + C_3] \}$$

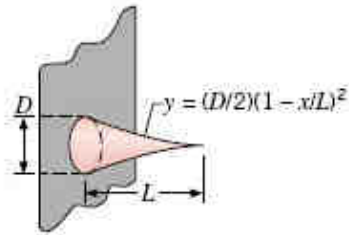
$$C_3 = 1 + 2(D/L)^2$$

$$C_4 = [1 + (D/L)^2]^{1/2}$$

$$V = (\pi/20) D^2 L$$

$$^a m = (2h/kr)^{1/2}$$

$$^b m = (4h/kD)^{1/2}$$



$$\eta_f = \frac{2}{[4/9(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1} \quad (3.97)$$

RELAÇÃO DE ÁREAS UTILIZADAS NO ESTUDO DE ALETAS

A_a : área superficial total da aleta, incluindo sua extremidade.

A_{tr} : área da seção transversal da aleta, que pode variar com x ou r .

A_s : área superficial da aleta, excluindo sua extremidade.

$A_{tr,b}$: área da seção transversal da aleta na sua base.

A_p : área corrigida do perfil da aleta.

A_b : área da fração exposta da base.

A_t : área superficial total das aletas mais a área da fração exposta.