unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru
Faculdade de Engenharia de Bauru

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME ESTACIONÁRIO – PARTE 2

DISCIPLINA: TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA 1

PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

3.5 CONDUÇÃO COM GERAÇÃO DE ENERGIA TÉRMICA

- Em particular, energia térmica está sendo gerada devido à conversão de outra forma de energia.

- Um processo comum de geração de energia térmica é a conversão de energia elétrica em energia térmica em um meio que conduz corrente elétrica (aquecimento ôhmico, resistivo ou de Joule).

- Taxa na qual a energia é gerada em função da passagem de uma corrente I através de um meio com resistência elétrica R_e é:

$$\dot{E}_g = I^2 R_e$$

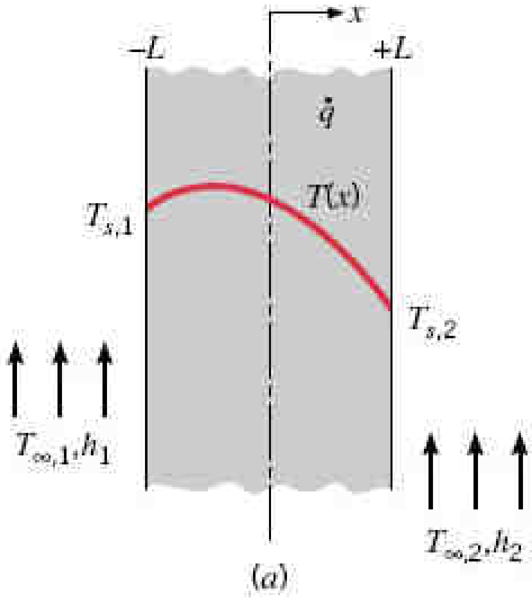
- Se a geração de potência ocorre de maneira uniforme ao longo de um volume V, a taxa volumétrica de geração de energia é:

$$\dot{q} = \frac{\dot{E}_g}{V} = \frac{I^2 R_e}{V}$$

- Outros exemplos de geração de energia térmica:
  1. Desaceleração e absorção de nêutrons num elemento combustível.
  2. Reações químicas exotérmicas (fonte de energia térmica).
  3. Reações químicas endotérmicas (sumidouro de energia térmica).
  4. Absorção de radiação no interior de um meio (revestimentos, blindagens térmicas, vasos de pressão, etc.).

3.5.1 A PAREDE PLANA

- Seja uma parede plana de espessura $2L$, com k e $\dot{q}$ constantes e com superfícies mantidas a $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$.



- Equação de difusão em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\overbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)}^{=0}+\overbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}^{=0}+\dot{q}=\overbrace{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}}^{=0}$$

- Para condução unidimensional em x, regime estacionário com geração interna de calor uniforme obtém-se:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=-\frac{\dot{q}}{k}$$

- A equação diferencial ordinária anterior pode ser integrada duas vezes para se obter a solução geral:

$$\int \frac{d^2T}{dx^2}dx = -\int \frac{\dot{q}}{k}dx \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k}x + C_1}$$

$$\int \frac{dT}{dx}dx = -\int \frac{\dot{q}}{k}xdx + \int C_1 dx \Rightarrow \boxed{T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1 x + C_2}$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de condições de contorno de primeira espécie em $x = -L$ e $x = L$, ou seja:

$$T(x = -L) = T_{s,1} \qquad \text{e} \qquad T(x = L) = T_{s,2}$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2L} \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas na parede:

$$T(x) = \frac{\dot{q}L}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2}\frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

- A taxa de transferência de calor pode ser obtida através da Lei de Fourier:

$$q(x) = -kA_x \frac{dT}{dx} = -kA_x\left(-\frac{\dot{q}}{k}x + C_1\right) = -kA_x\left(-\frac{\dot{q}}{k}x + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2L}\right)$$

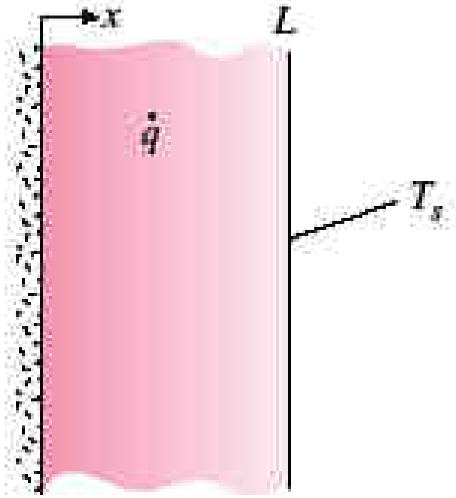
$$q(x) = \left[\dot{q}x - \frac{k}{2L}\left(T_{s,2} - T_{s,1}\right) \right] A_x$$

- O fluxo de calor $q''(x)$ é obtido dividindo $q(x)$ por A_x, ou seja:

$$q''(x) = \dot{q}x - \frac{k}{2L}\left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)$$

- Nota-se que a taxa de transferência de calor não é mais independente de x.

3.5.2 A PAREDE PLANA COM SUPERFÍCIE ADIABÁTICA



Solução geral:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k}x + C_1$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1 x + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de condições de contorno de segunda e primeira espécies, respectivamente em $x = 0$ e $x = L$, ou seja:

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0 \qquad \text{e} \qquad T(x = L) = T_s$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + T_s$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas na parede:

$$T(x) = \frac{\dot{q}L}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_s$$

- A taxa de transferência de calor pode ser obtida através da Lei de Fourier:

$$q(x) = -kA_x \frac{dT}{dx} = -kA_x\left(-\frac{\dot{q}}{k}x + C_1\right) = -kA_x\left(-\frac{\dot{q}}{k}x + 0\right)$$

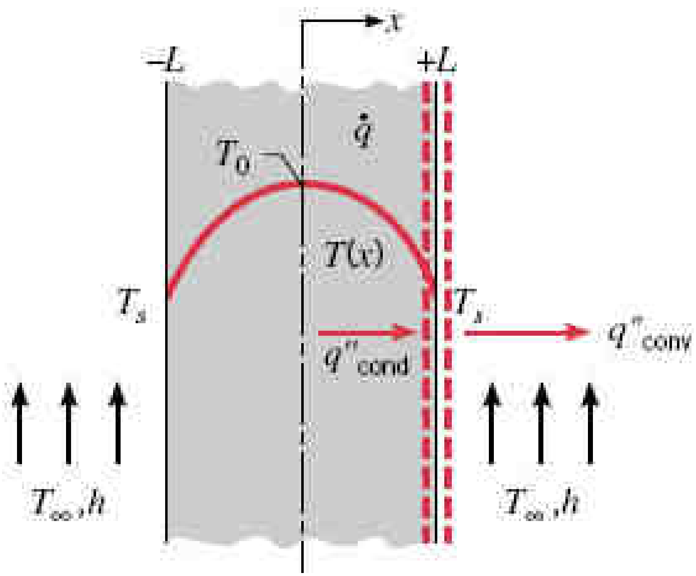
$$q(x) = \dot{q}xA_x$$

- O fluxo de calor $q''(x)$ é obtido dividindo $q(x)$ por A_x, ou seja:

$$q''(x) = \dot{q}x$$

- No caso especial em que $T_{s,1} = T_{s,2} = T_s$ a distribuição de temperatura é simétrica com relação ao plano central:

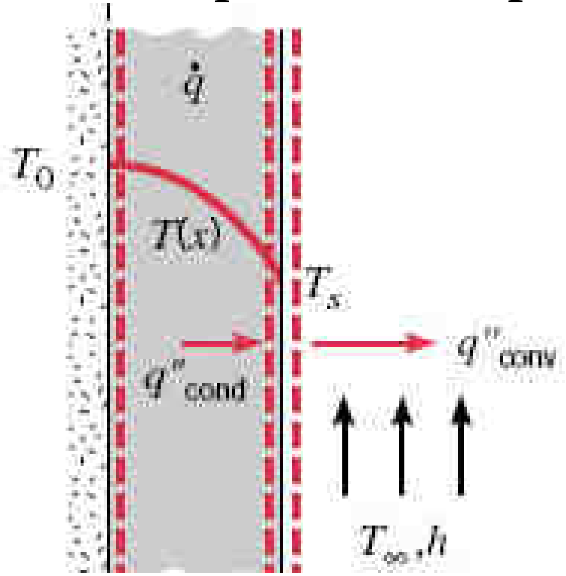
$$T(x)=\frac{\dot{q}L}{2k}\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)+\frac{T_{s,2}-T_{s,1}}{2}\frac{x}{L}+\frac{T_{s,1}+T_{s,2}}{2}\Rightarrow \boxed{T(x)=\frac{\dot{q}L}{2k}\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)+T_s}$$



$$\boxed{T_{max}=T(x=0)=T_0=\frac{\dot{q}L}{2k}+T_s}$$

- No plano de simetria o gradiente de temperatura é nulo, ou seja, $(dT/dx)_{x=0}=0$.

- Assim, não há transferência de calor cruzando esse plano e ele pode ser representado por uma superfície adiabática.

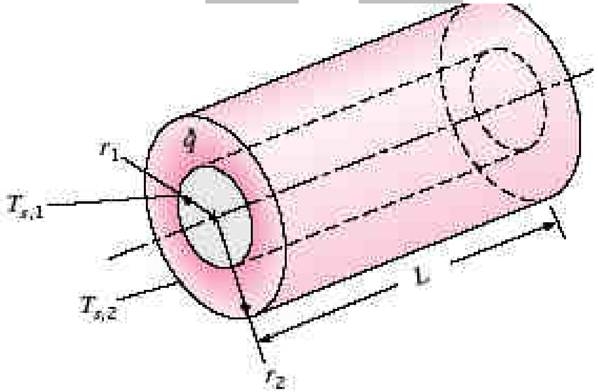


$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

- Os resultados anteriores se aplicam para paredes planas que têm uma de suas superfícies $(x = 0)$ perfeitamente isolada, enquanto a outra superfície $(x = L)$ é mantida a uma temperatura fixa T_s.

3.5.3 CASCA CILÍNDRICA

- Seja um cilindro oco de comprimento L, com k e $\dot{q}$ constantes e com superfícies mantidas a $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$ respectivamente em r_1 e r_2.



- Equação de difusão em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\overbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)}^{=0}+\overbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}^{=0}+\dot{q}=\overbrace{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}}^{=0}$$

- Para condução unidimensional em r, regime estacionário com geração interna de calor uniforme obtém-se:

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{\dot{q}r}{k}}$$

- A equação diferencial ordinária anterior pode ser integrada duas vezes para se obter a solução geral:

$$\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)dr = -\int \frac{\dot{q}r}{k}dr \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{C_1}{r}}$$

$$\int \frac{dT}{dr}dr = -\int \frac{\dot{q}r}{2k}dr + \int \frac{C_1}{r}dr \Rightarrow \boxed{T(r) = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2}$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de condições de contorno de primeira espécie em $r = r_1$ e $r = r_2$, ou seja:

$$T(r = r_1) = T_{s,1} \qquad \text{e} \qquad T(r = r_2) = T_{s,2}$$

- Substituindo as condições de contorno na solução geral obtém-se:

$$C_1 = \frac{1}{\ln(r_2/r_1)}\left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\right]$$

$$C_2 = T_{s,2} + \frac{\dot{q}r_2^2}{4k} - \frac{\ln r_2}{\ln(r_2/r_1)}\left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\right]$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas na parede:

$$T(r) = T_{s,2} + \frac{\dot{q} r_2^2}{4k}\left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right) - \left[\frac{\dot{q} r_2^2}{4k}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\right]\frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}$$

- A taxa de transferência de calor é obtida pela lei de Fourier:

$$q(r) = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k(2\pi r L)\left\{-\frac{\dot{q} r}{2k} + \frac{C_1}{r}\right\}$$

$$q(r) = -k(2\pi r L)\left\{-\frac{\dot{q} r}{2k} + \frac{1}{r \ln(r_2/r_1)}\left[\frac{\dot{q} r_2^2}{4k}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\right]\right\}$$

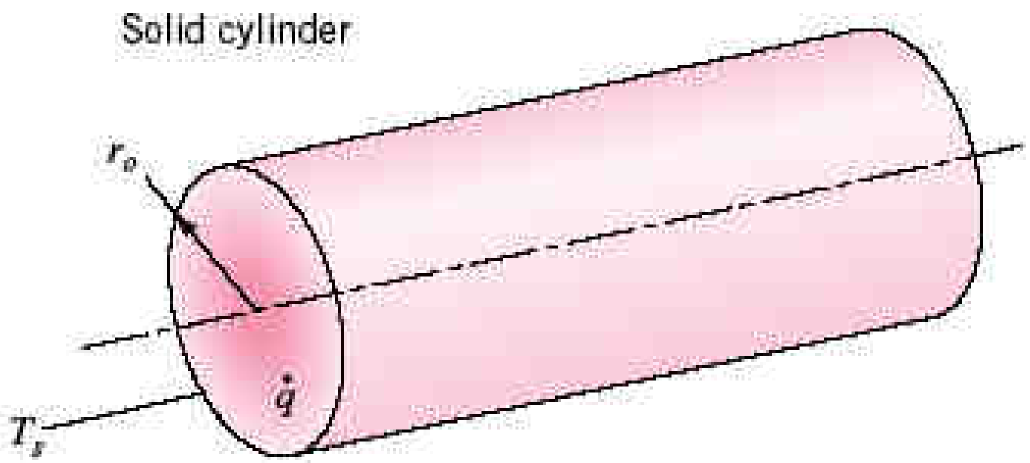
$$q(r) = \dot{q}\pi L r^2 - \frac{2\pi L k}{\ln(r_2/r_1)}\left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\right]$$

- O fluxo de calor $q^{"}(r)$ é obtido dividindo $q(r)$ por $A_r = 2\pi r L$:

$$q^{"}(r) = \frac{\dot{q}r}{2} - \frac{k\left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\right]}{r\ln(r_2/r_1)}$$

- Nota-se que a taxa de transferência de calor não é mais independente de r.

3.5.4 O CILINDRO SÓLIDO



Solução geral:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{C_1}{r}$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de condições de contorno de segunda e primeira espécies, respectivamente em $r = 0$ e $r = r_o$, ou seja:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0 \qquad \text{e} \qquad T(r = r_o) = T_s$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{\dot{q} r_o^2}{4k} + T_s$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas no cilindro:

$$T(r) = \frac{\dot{q} r_o^2}{4k}\left(1 - \frac{r}{r_o^2}\right) + T_s$$

- A taxa de transferência de calor pode ser obtida pela Lei de Fourier:

$$q(r) = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL)\left(-\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{C_1}{r}\right) = -k(2\pi rL)\left(-\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{0}{r}\right)$$

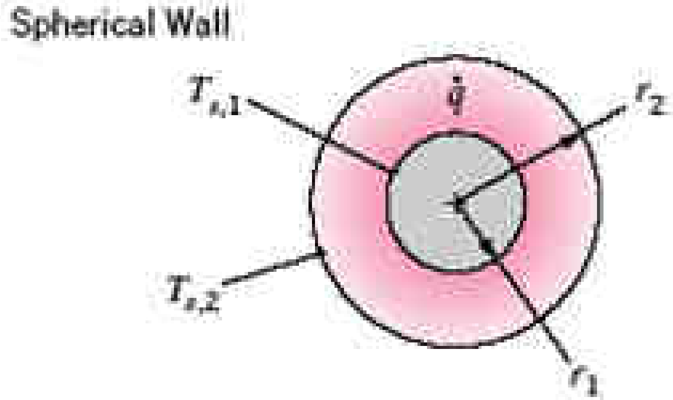
$$q(r) = \dot{q}\pi Lr^2$$

- O fluxo de calor $q_r^{''}(r)$ é obtido dividindo $q(r)$ por $A_r = 2\pi rL$, ou seja:

$$q^{''}(r) = \frac{\dot{q}r}{2}$$

3.5.5 CASCA ESFÉRICA

- Seja uma esfera oca, com k e $\dot{q}$ constantes e com superfícies mantidas a $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$ respectivamente em r_1 e r_2.



- Equação de difusão em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\overbrace{\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)}^{=0}+\overbrace{\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)}^{=0}+\dot{q}=\overbrace{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}}^{=0}$$

- Para condução unidimensional em r, regime estacionário com geração interna de calor uniforme obtém-se:

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{\dot{q}r^2}{k}}$$

- A equação diferencial ordinária anterior pode ser integrada duas vezes para se obter a solução geral:

$$\int\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)dr=-\int\frac{\dot{q}r^2}{k}dr\Rightarrow\boxed{\frac{dT}{dr}=-\frac{\dot{q}r}{3k}+C_1r^{-2}}$$

$$\int\frac{dT}{dr}dr=-\int\frac{\dot{q}r}{3k}dr+\int C_1r^{-2}dr\Rightarrow\boxed{T(r)=-\frac{\dot{q}r^2}{6k}-\frac{C_1}{r}+C_2}$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de condições de contorno de primeira espécie em $r = r_1$ e $r = r_2$, ou seja:

$$T(r = r_1) = T_{s,1} \qquad \text{e} \qquad T(r = r_2) = T_{s,2}$$

- Substituindo as condições de contorno na solução geral obtém-se:

$$C_1 = \frac{1}{(1/r_1) - (1/r_2)}\left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\right]$$

$$C_2 = T_{s,2} + \frac{\dot{q}r_2^2}{6k} + \frac{1}{r_2[(1/r_1) - (1/r_2)]}\left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\right]$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas na esfera:

$$T(r) = T_{s,2} + \frac{\dot{q} r_2^2}{6k}\left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right) - \left[\frac{\dot{q} r_2^2}{6k}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\right]\frac{(1/r) - (1/r_2)}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

- A taxa de transferência de calor é obtida pela lei de Fourier:,

$$q(r) = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k\left(4\pi r^2\right)\left\{-\frac{\dot{q} r}{3k} + C_1 r^{-2}\right\}$$

$$q(r) = -k\left(4\pi r^2\right)\left\{-\frac{\dot{q} r}{3k} + \frac{1}{r^2[(1/r_1) - (1/r_2)]}\left[\frac{\dot{q} r_2^2}{6k}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\right]\right\}$$

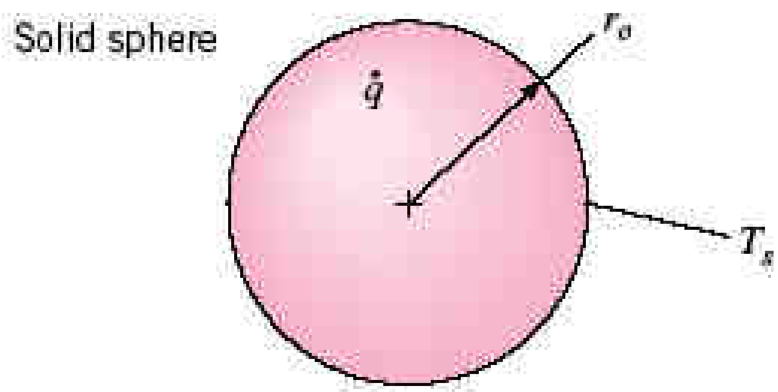
$$q(r)=\frac{\dot{q}4\pi r^3}{3}-\frac{4\pi k\left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k}\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)+\left(T_{s,2}-T_{s,1}\right)\right]}{\left[\left(1/r_1\right)-\left(1/r_2\right)\right]}$$

- O fluxo de calor $q''(r)$ é obtido dividindo $q(r)$ por $A_r=4\pi r^2$:

$$q''(r)=\frac{\dot{q}r}{3}-\frac{k\left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k}\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)+\left(T_{s,2}-T_{s,1}\right)\right]}{r^2\left[\left(1/r_1\right)-\left(1/r_2\right)\right]}$$

- Nota-se que a taxa de transferência de calor não é mais independente de r.

3.5.6 A ESFERA SÓLIDA



Solução geral:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{3k} + C_1 r^{-2}$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de condições de contorno de segunda e primeira espécies, respectivamente em $r = 0$ e $r = r_o$, ou seja:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0 \qquad \text{e} \qquad T(r = r_o) = T_s$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{\dot{q} r_o^2}{6k} + T_s$$

- Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas na esfera:

$$T(r) = \frac{\dot{q} r_o^2}{6k}\left(1 - \frac{r^2}{r_o^2}\right) + T_s$$

- A taxa de transferência de calor pode ser obtida pela lei de Fourier:

$$q(r) = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k\left(4\pi r^2\right)\left(-\frac{\dot{q}r}{3k} + \frac{C_1}{r^2}\right) = -k\left(4\pi r^2\right)\left(-\frac{\dot{q}r}{3k} + \frac{0}{r^2}\right)$$

$$q(r) = \frac{\dot{q}4\pi r^3}{3}$$

- O fluxo de calor $q''(r)$ é obtido dividindo $q(r)$ por $A_r = 4\pi r^2$, ou seja:

$$q''(r) = \frac{\dot{q}r}{3}$$

3.5.7 APLICAÇÕES DO CONCEITO DE RESISTÊNCIA

- Como a taxa de transferência de calor não uma constante independente da coordenada espacial, seria **incorreto** utilizar os conceitos de resistências condutivas.