



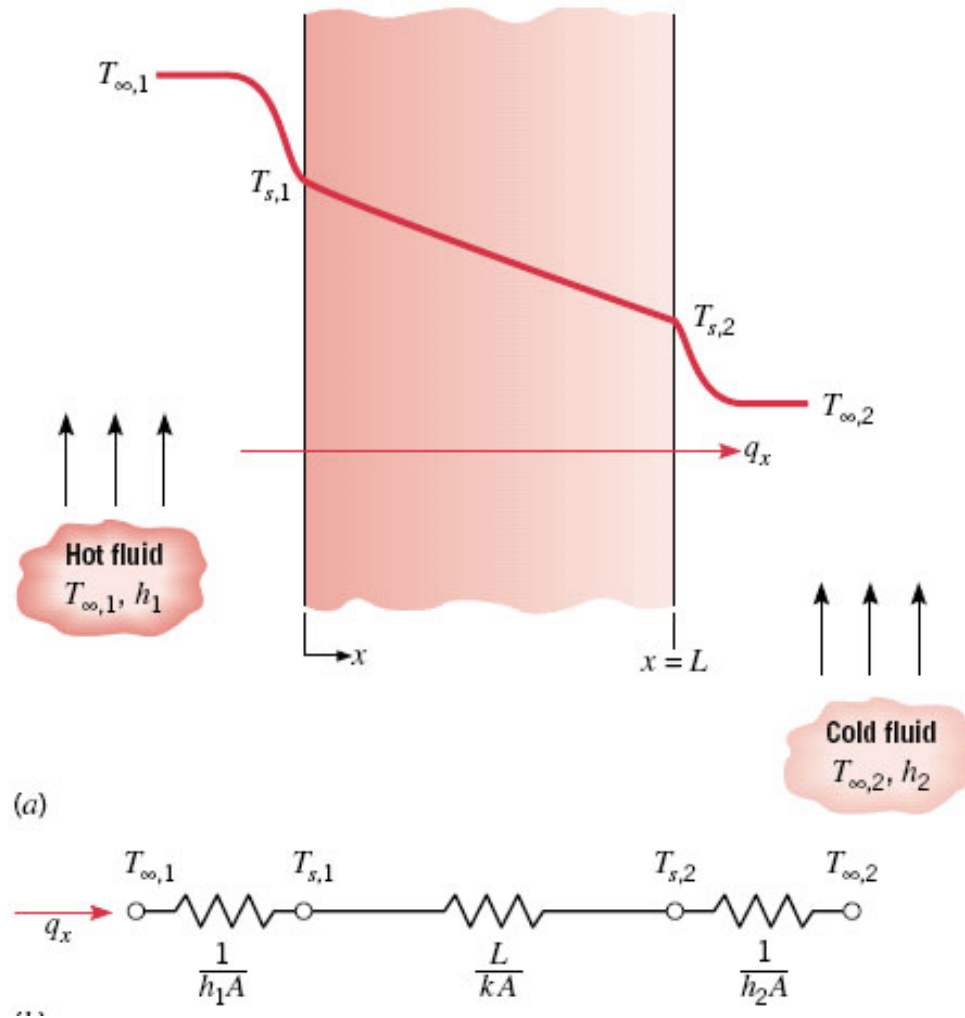
CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME ESTACIONÁRIO – PARTE 1

DISCIPLINA: TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA 1

PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

- **UNIDIMENSIONAL**: apenas uma variável é necessária para descrever a variação espacial da **variável temperatura**.
- **ESTACIONÁRIO**: a temperatura, em cada ponto do sistema, é **independente do tempo**.
- **OBJETIVOS**:
 1. Determinar o campo de temperaturas para geometrias de interesse, tais como parede plana, cilindro e esfera, sem e com efeitos de geração interna de calor.
 2. Determinar a taxa de transferência de calor para os casos acima.
 3. Tratar o problema da condução unidimensional em aletas, ou seja: obter a distribuição de temperaturas, a taxa de transferência de calor e calcular parâmetros de desempenho.

3.1 A PAREDE PLANA



1. Convecção do fluido quente a $T_{\infty,1}$ para uma superfície da parede a $T_{s,1}$.

2. Condução através da parede.

3. Convecção da outra superfície da parede a $T_{s,2}$ para o fluido frio a $T_{\infty,2}$.

3.1.1 DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS

- Equação de difusão em **coordenadas cartesianas**:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \overbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)}^{=0} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}^{=0} + \overbrace{\dot{q}}^{=0} = \overbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}^{=0}$$

- Para condução unidimensional em x , regime estacionário e sem geração interna de calor obtém-se:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

- Com isso, o **fluxo de calor é constante e independente de x** .

- Para k constante, a **equação diferencial ordinária** anterior pode ser integrada duas vezes para se obter a **solução geral**:

$$\int \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx = \int 0 dx \Rightarrow \frac{dT}{dx} = C_1$$

$$\int \frac{dT}{dx} dx = \int C_1 dx \Rightarrow T(x) = C_1 x + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de **condições de contorno de primeira espécie** em $x = 0$ e $x = L$, ou seja:

$$T(x = 0) = T_{s,1}$$

e

$$T(x = L) = T_{s,2}$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} \quad \text{e} \quad C_2 = T_{s,1}$$

- Substituindo as expressões C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a **solução particular** para a **distribuição de temperaturas na parede**:

$$T(x) = (T_{s,2} - T_{s,1}) \frac{x}{L} + T_{s,1}$$

- Fica evidente que a **temperatura varia linearmente com x**.
- **Taxa de transferência de calor** por condução (lei de Fourier):

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = -kAC_1 = -kA \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} \Rightarrow q_x = \frac{kA}{L} (T_{s,1} - T_{s,2})$$

- **Fluxo de calor** por condução:

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} \Rightarrow q_x'' = \frac{k}{L} (T_{s,1} - T_{s,2})$$

- Tanto q_x quanto q_x'' são **constantes**, independentes de x .

3.1.2 RESISTÊNCIA TÉRMICA

- Para transferência de calor unidimensional sem geração interna de energia e com propriedades constantes, existe uma **analogia entre difusão de calor e de carga elétrica**.

I : taxa de transferência de elétrons

ΔV : diferença de potencial

R_e : resistência elétrica

$$R_e = \frac{\Delta V}{I} \text{ (lei de Ohm)}$$

q_x : taxa de transferência de calor

ΔT : diferença de temperatura

R_t : resistência térmica

$$R_t = \frac{\Delta T}{q_x}$$

- Resistência térmica para **condução em uma parede plana**:

$$q_x = \frac{kA}{L}(T_{s,1} - T_{s,2}) \Rightarrow \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{q_x} = \frac{\Delta T}{q_x} = \frac{L}{kA} \Rightarrow R_{t,cond} = \frac{L}{kA}$$

- Resistência térmica para **convecção em uma superfície**:

$$q_{conv} = hA(T_S - T_\infty) \Rightarrow \frac{T_S - T_\infty}{q_{conv}} = \frac{\Delta T}{q_{conv}} = \frac{1}{hA} \Rightarrow R_{t,conv} = \frac{1}{hA}$$

- Resistência térmica para **radiação em uma superfície**:

$$q_{rad} = h_r A(T_S - T_{viz}) \Rightarrow \frac{T_S - T_{viz}}{q_{rad}} = \frac{\Delta T}{q_{rad}} = \frac{1}{h_r A} \Rightarrow R_{t,rad} = \frac{1}{h_r A}$$

- Representações na forma de circuitos térmicos são úteis tanto para **conceituação** quanto para **quantificação** de problemas de transferência de calor.
- Para a parede plana com convecção nas duas superfícies a taxa de transferência de calor pode ser determinada por:

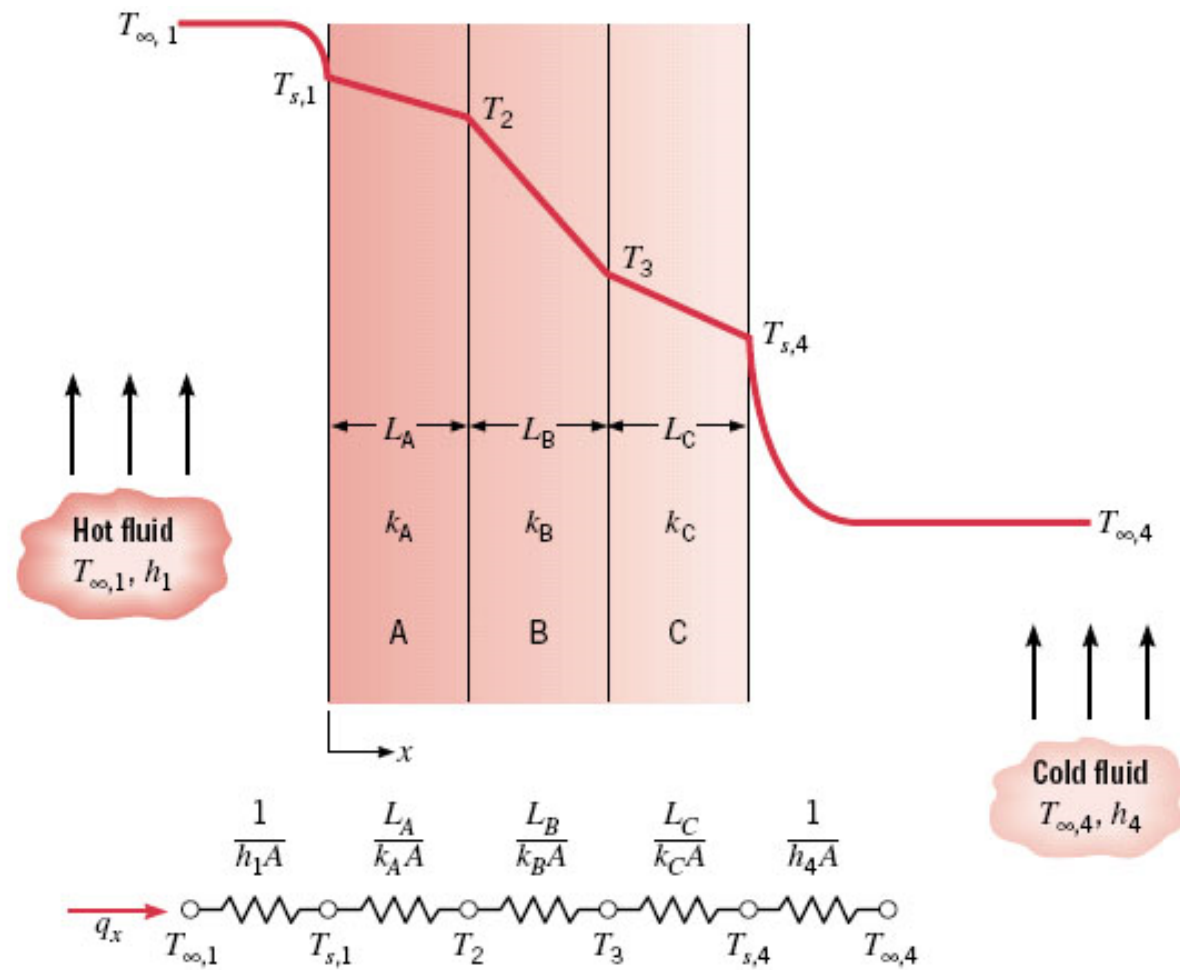
$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\frac{L}{kA}} = \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_2 A}}$$

- Em termos da **diferença de temperaturas global** $T_{\infty,1} - T_{\infty,2}$ e da **resistência térmica total** $R_{t,tot}$ a taxa de transferência de calor é:

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{t,tot}} = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}}$$

- As resistências térmicas convectiva e radiante em uma superfície atuam em **paralelo**.

3.1.3 A PAREDE COMPOSTA



- A taxa de transferência de calor para esse sistema é:

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\sum R_t} = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L_A}{k_A A} + \frac{L_B}{k_B A} + \frac{L_C}{k_C A} + \frac{1}{h_4 A}}$$

- Para cada elemento do sistema tem-se:

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s,1} - T_2}{\frac{L_A}{k_A A}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_B}{k_B A}} = \frac{T_3 - T_{s,4}}{\frac{L_C}{k_C A}} = \frac{T_{s,4} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{h_4 A}}$$

- Em sistemas compostos, é comum a utilização de um **coeficiente global de transferência de calor** U , definido por uma expressão análoga à lei do resfriamento de Newton:

$$q_x = UA\Delta T$$

- ΔT é a diferença de temperatura global e comparando $q_x = \Delta T / \sum R_t$ com $q_x = UA\Delta T$ obtém-se:

$$U = \frac{1}{\sum R_t A}$$

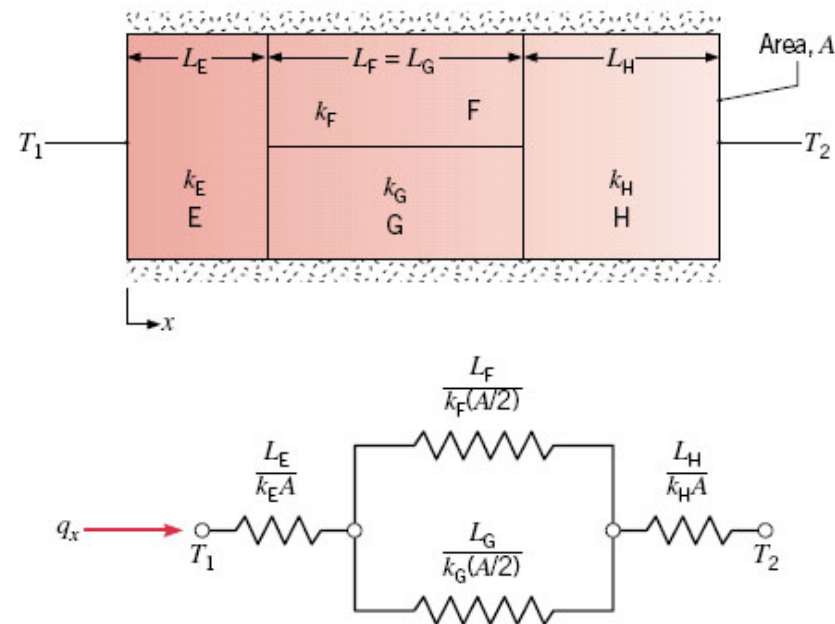
- Para a parede plana mostrada anteriormente tem-se:

$$U = \frac{1}{\sum R_t A} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_4}}$$

- De maneira geral pode-se escrever que:

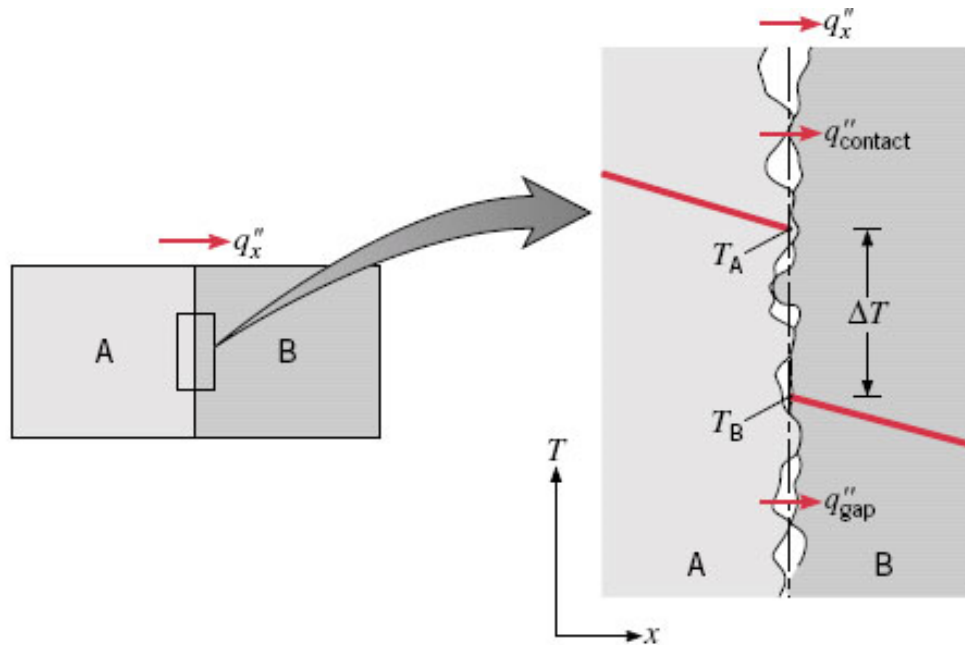
$$R_{tot} = \sum R_t = \frac{\Delta T}{q} = \frac{1}{UA}$$

- Paredes compostas também podem ser caracterizadas por configurações série-paralelo:



3.1.4 RESISTÊNCIA DE CONTATO

- Em sistemas compostos, a queda de temperatura entre as interfaces dos diversos materiais pode ser considerável.
- Isso é devido à **resistência térmica de contato**, $R_{t,c}$.



$$R_{t,c}'' = \frac{T_A - T_B}{q_x''}$$

- A resistência de contato existe devido aos efeitos da rugosidade da superfície.
- Existem pontos de contato (condução) e interstícios preenchidos com ar (condução e/ou radiação).
- A resistência de contato inclui duas resistências em paralelo.
- Redução da resistência de contato:
 1. Aumento na pressão de contato.
 2. Redução da rugosidade das superfícies.
 3. Fluido interfacial com elevado k .
 4. Inclusão de metais macios (índio, chumbo, estanho, prata).
 5. Graxas térmicas a base de silício.

- Resultados para $R_{t,c}''$ foram obtidos experimentalmente.

Resistência térmica de contato para (a) interfaces metálicas sob condições de vácuo e (b) interface de alumínio (rugosidade superficial de 10 mm, 10^5 N/m^2) com diferentes fluidos interfaciais

Thermal Resistance, $R_{t,c}'' \times 10^4 (\text{m}^2 \cdot \text{K/W})$

(a) Vacuum Interface

	100 kN/m ²	10,000 kN/m ²
Contact pressure		
Stainless steel	6–25	0.7–4.0
Copper	1–10	0.1–0.5
Magnesium	1.5–3.5	0.2–0.4
Aluminum	1.5–5.0	0.2–0.4

(b) Interfacial Fluid

Air	2.75
Helium	1.05
Hydrogen	0.720
Silicone oil	0.525
Glycerine	0.265

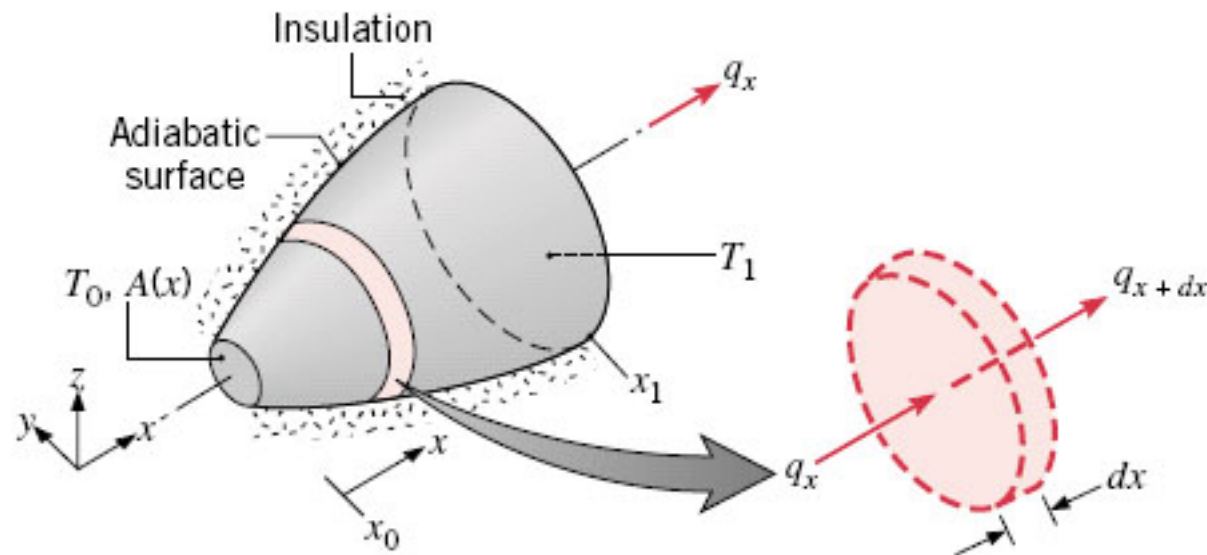
- Muitas aplicações envolvem o contato entre sólidos diferentes e/ou uma ampla variedade de possíveis materiais intersticiais.

Resistência térmica em interfaces sólido/sólido representativas

Interface	$R''_{t,c} \times 10^4 \text{ (m}^2 \cdot \text{K/W)}$	Source
Silicon chip/lapped aluminum in air (27–500 kN/m ²)	0.3–0.6	[2]
Aluminum/aluminum with indium foil filler ($\sim 100 \text{ kN/m}^2$)	~ 0.07	[1, 3]
Stainless/stainless with indium foil filler ($\sim 3500 \text{ kN/m}^2$)	~ 0.04	[1, 3]
Aluminum/aluminum with metallic (Pb) coating	0.01–0.1	[4]
Aluminum/aluminum with Dow Corning 340 grease ($\sim 100 \text{ kN/m}^2$)	~ 0.07	[1, 3]
Stainless/stainless with Dow Corning 340 grease ($\sim 3500 \text{ kN/m}^2$)	~ 0.04	[1, 3]
Silicon chip/aluminum with 0.02-mm epoxy	0.2–0.9	[5]
Brass/brass with 15- μm tin solder	0.025–0.14	[6]

3.2 UMA ANÁLISE ALTERNATIVA DA CONDUÇÃO

- Para condições de condução unidimensional em regime estacionário, sem geração de calor e sem perda de calor pelas superfícies laterais, a taxa de transferência de calor q_x é uma constante, ou seja, $q_x = q_{x+dx}$.



- Esse resultado é consequência da **conservação da energia** e deve ser válido mesmo se $A = A(x)$ e $k = k(T)$.
- Assim, a Lei de Fourier pode ser aplicada sem o conhecimento de q_x e $T(x)$.

$$q_x = -k(T)A(x)\frac{dT}{dx} \Rightarrow q_x \int_{x_0}^x \frac{dx}{A(x)} = - \int_{T_0}^T k(T) dT$$

- Se $A \neq A(x)$, $k \neq k(T)$ e $T = T_1$ em $x = x_1$ obtém-se:

$$\frac{q_x(x_1 - x_0)}{A} = -k(T_1 - T_0) \Rightarrow \frac{q_x \Delta x}{A} = -k \Delta T$$

3.3 SISTEMAS RADIAIS

- Em sistemas cilíndricos e esféricos, podem existir **gradientes de temperatura somente na direção radial**, o que possibilita analisá-los como **unidimensionais**.

3.3.1 O CILINDRO

- Equação de difusão em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \overbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)}^{=0} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}^{=0} + \overbrace{\dot{q}}^{=0} = \rho c_p \overbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}^{=0}$$

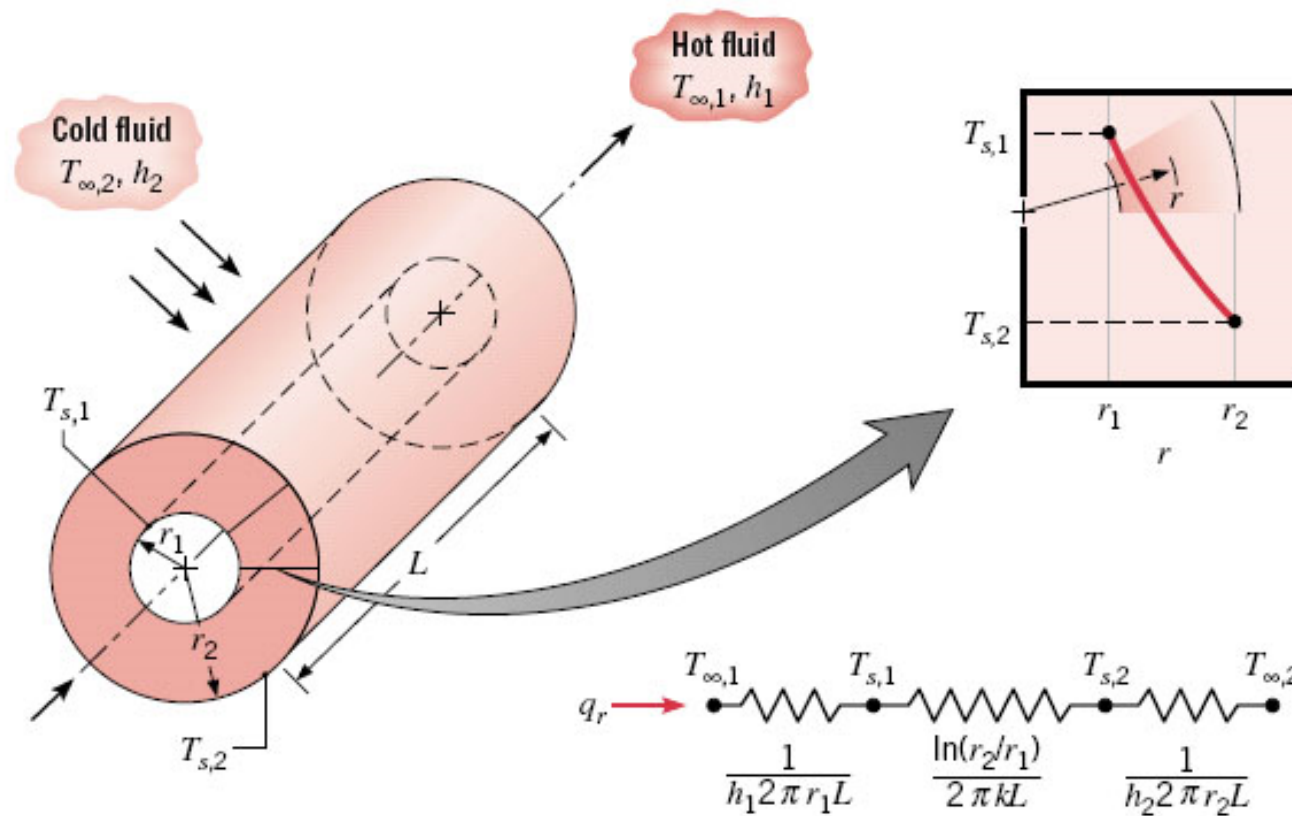
- Para condução unidimensional em r , regime estacionário e sem geração interna de calor obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

- Taxa na qual energia é conduzida em qualquer superfície interior:

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL) \frac{dT}{dr}$$

- Com isso, a taxa de transferência de calor q_r (não o fluxo de calor q_r'') é uma constante na direção radial.



- Para k constante, a **equação diferencial ordinária** anterior pode ser integrada duas vezes para se obter a **solução geral**:

$$\int \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr = \int 0 dr \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

$$\int \frac{dT}{dr} dr = \int \frac{C_1}{r} dr \Rightarrow T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de **condições de contorno de primeira espécie** em $r = r_1$ e $r = r_2$, ou seja:

$$T(r = r_1) = T_{s,1} \quad \text{e} \quad T(r = r_2) = T_{s,2}$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \quad \text{e} \quad C_2 = T_{s,2} - \left[\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \right] \ln r_2$$

- Substituindo as expressões C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a **solução particular** para a **distribuição de temperaturas na parede cilíndrica**:

$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{s,2}$$

- A **distribuição de temperatura é logarítmica**, e não linear.
- Taxa de transferência de calor (lei de Fourier):

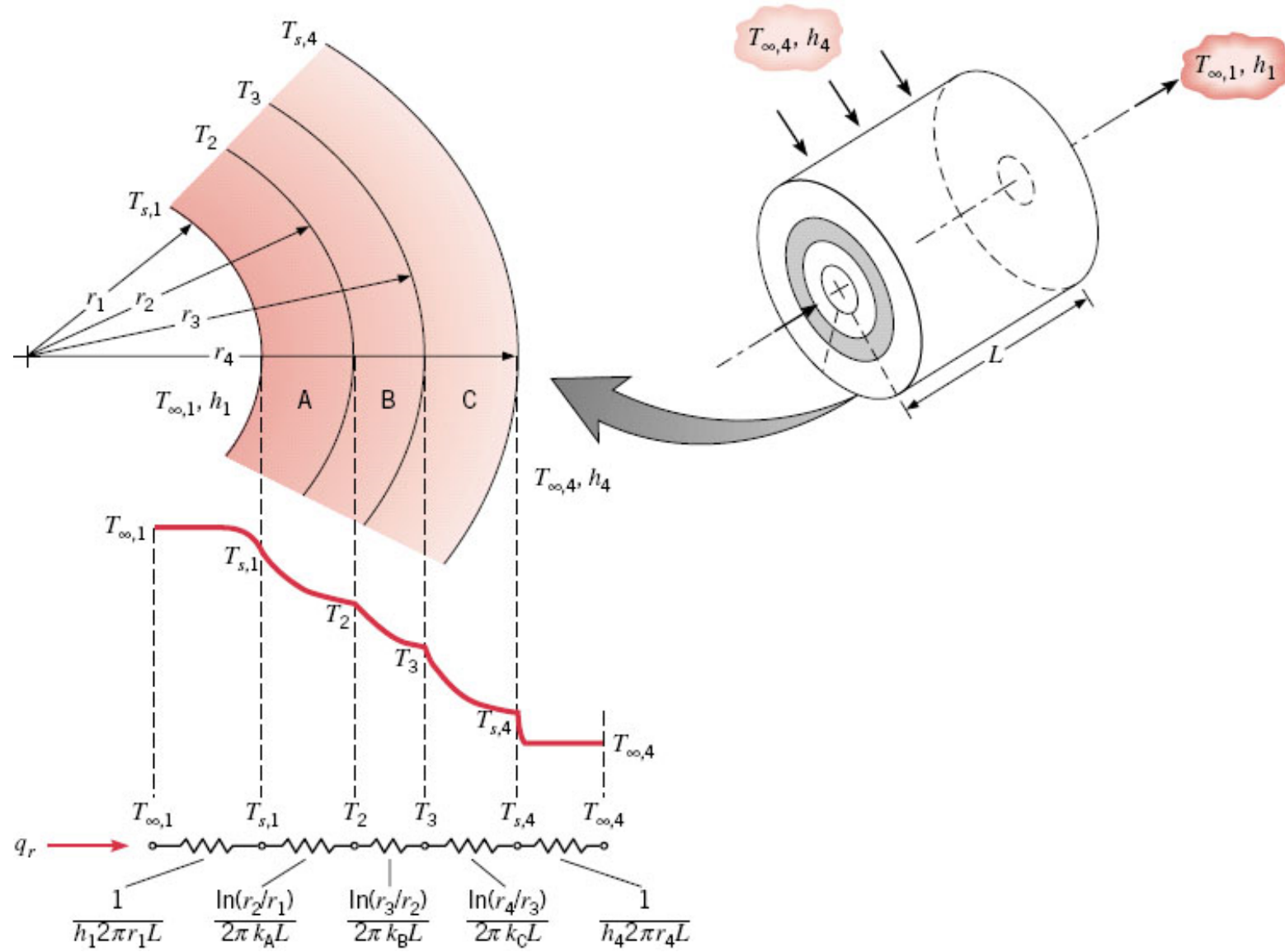
$$q_r = -k(2\pi rL) \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL) \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{r \ln(r_1/r_2)} \Rightarrow q_r = \frac{2\pi Lk(T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln(r_2/r_1)}$$

- **Resistência térmica** de condução na parede cilíndrica:

$$R_{t,cond} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}$$

- Para a parede cilíndrica composta mostrada abaixo e desprezando as resistências de contato:

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_A} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_B} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi L k_C} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_4}}$$



- Para cada elemento do sistema tem-se:

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1}} = \frac{T_{s,1} - T_2}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_A}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_B}} = \frac{T_3 - T_{s,4}}{\frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi L k_C}} = \frac{T_{s,4} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{2\pi r_4 L h_4}}$$

- Em termos de um **coeficiente global de transferência de calor**:

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}} = UA(T_{\infty,1} - T_{\infty,4})$$

- Como a área A varia, U pode ser definido de maneira arbitrária.
- Em termos de $A_1 = 2\pi r_1 L$ tem-se:

$$U_1 = \frac{1}{R_{tot} A_1} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{k_A} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{k_B} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{r_1}{k_C} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{r_1}{r_4} \frac{1}{h_4}}$$

- Em termos de $A_2 = 2\pi r_2 L$ tem-se:

$$U_2 = \frac{1}{R_{tot} A_2} = \frac{1}{\frac{r_2}{r_1} \frac{1}{h_1} + \frac{r_2}{k_A} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_2}{k_B} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{r_2}{k_C} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{r_2}{r_4} \frac{1}{h_4}}$$

- Em termos de $A_3 = 2\pi r_3 L$ tem-se:

$$U_3 = \frac{1}{R_{tot} A_3} = \frac{1}{\frac{r_3}{r_1} \frac{1}{h_1} + \frac{r_3}{k_A} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3}{k_B} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{r_3}{k_C} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{r_3}{r_4} \frac{1}{h_4}}$$

- Em termos de $A_4 = 2\pi r_4 L$ tem-se:

$$U_4 = \frac{1}{R_{tot} A_4} = \frac{1}{\frac{r_4}{r_1} \frac{1}{h_1} + \frac{r_4}{k_A} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_4}{k_B} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{r_4}{k_C} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{1}{h_4}}$$

- Deve ser notado que:

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 = U_3 A_3 = U_4 A_4 = (\sum R_t)^{-1}$$

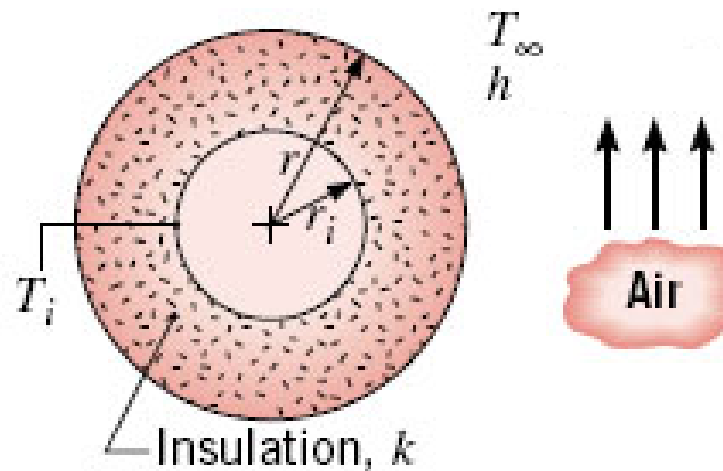
- A expressão da resistência térmica para cilindro é escrita para 2π e para ângulos θ inferiores a 2π deve ser recalculada:

$$R_{t,cond} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{(2\pi/\theta)Lk}$$

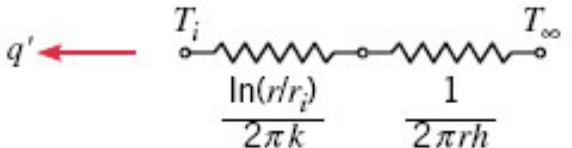
3.3.2 RAIO CRÍTICO DE ISOLAMENTO PARA CILINDROS

- Com o aumento da espessura do isolante em sistemas cilíndricos, surgem **dois efeitos concorrentes**:

- Aumento da resistência condutiva:** $R_{t,cond} = \frac{\ln(r/r_i)}{2\pi kL}$
- Diminuição da resistência convectiva:** $R_{t,conv} = \frac{1}{h(2\pi rL)}$



- Será que existe uma espessura de isolamento (raio crítico de isolamento) que **minimize a perda de calor** pela **maximização da resistência total à transferência de calor**?
- A resistência à transferência de calor é composta pela condução no isolante e pela convecção externa. Tem-se que:



$$R_{tot} = \frac{\ln(r/r_i)}{2\pi kL} + \frac{1}{2\pi rLh} \Rightarrow R'_{tot} = \frac{\ln(r/r_i)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi rh}$$

- A taxa de transferência de calor por unidade de comprimento é:

$$q = \frac{T_i - T_\infty}{R_{tot}} = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{\ln(r/r_i)}{2\pi kL} + \frac{1}{2\pi rLh}} \Rightarrow \frac{q}{L} = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{\ln(r/r_i)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi rh}} \Rightarrow q' = \frac{T_i - T_\infty}{R'_{tot}}$$

- Uma espessura de isolamento que **maximiza** R'_{tot} ou que **minimiza** q' pode ser obtida fazendo $dR'_{tot}/dr = 0$. Assim:

$$\frac{dR'_{tot}}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\frac{\ln(r/r_i)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi r h} \right] = \frac{d}{dr} \left[\frac{\ln r}{2\pi k} - \frac{\ln r_i}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi r h} \right] = \frac{1}{2\pi k r} - \frac{1}{2\pi r^2 h} = 0$$

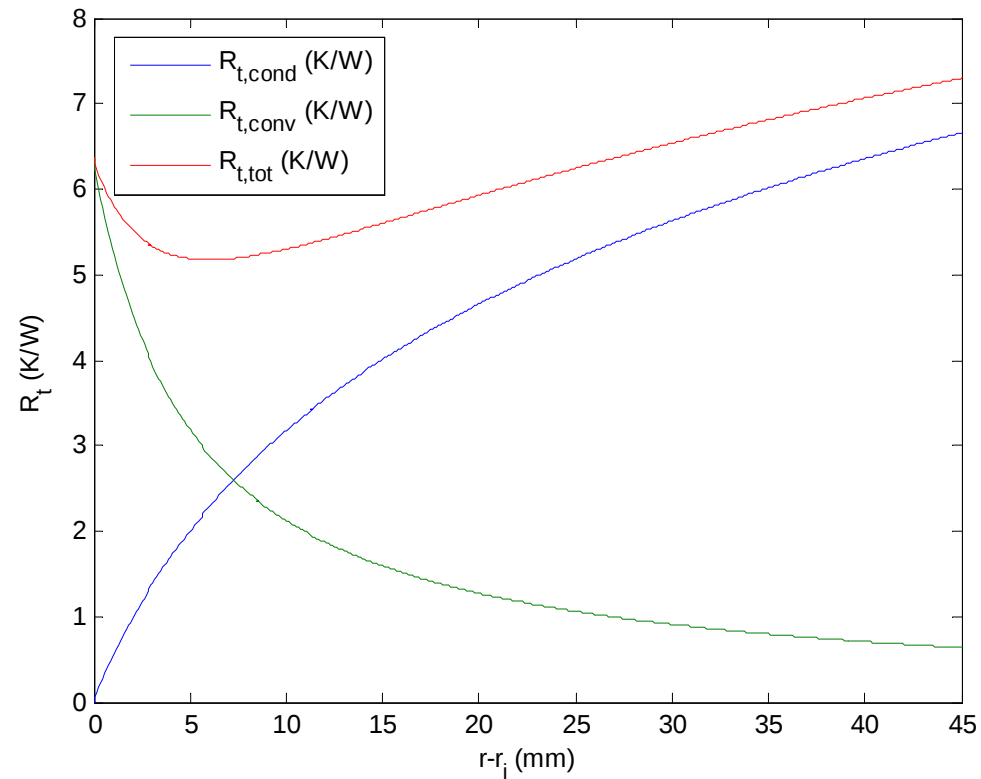
$$r = k/h$$

- Para verificar se $r = k/h$ é um **ponto de máximo** ou **ponto de mínimo** pode-se utilizar o critério da derivada segunda, ou seja:
 1. Se $(d^2 R'_{tot}/dr^2)_{r=k/h} > 0$, $r = k/h$ é **ponto de mínimo**.
 2. Se $(d^2 R'_{tot}/dr^2)_{r=k/h} < 0$, $r = k/h$ é **ponto de máximo**.

- Desse modo: $\frac{d^2 R'_{tot}}{dr^2} = -\frac{1}{2\pi k r^2} + \frac{1}{\pi r^3 h}$
- Ou, em $r = k/h$, $\left. \frac{d^2 R'_{tot}}{dr^2} \right|_{r=k/h} = \frac{1}{\pi (k/h)^2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k} \right) > 0$
- Assim, $r = k/h$ **minimiza a resistência total**, e uma espessura ótima do isolante não existe.
- Faz mais sentido pensar em um **raio crítico de isolamento**, $r_{cr} = k/h$, que maximiza a transferência de calor, ou seja:
 1. Abaixo de $r_{cr} = k/h$, q' aumenta com o aumento de r .
 2. Acima de $r_{cr} = k/h$, q' diminui com o aumento de r .

- **Exemplo:** $k = 0,055 \text{ W/m.K}$; $h = 5 \text{ W/m.K}$; $r_i = 5 \text{ mm}$

$$r_{cr} = \frac{k}{h} = \frac{0,055}{5} = 0,011 \text{ m} = 11 \text{ mm}$$



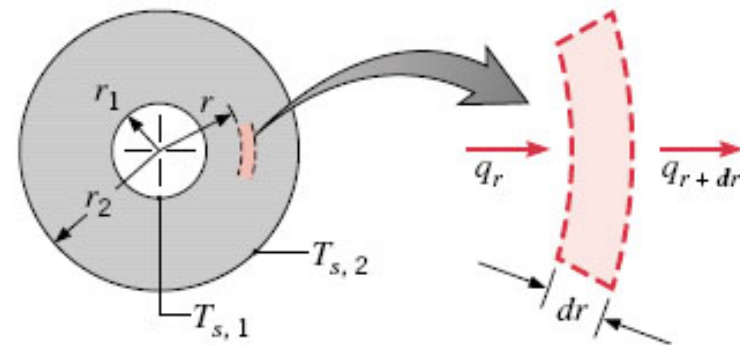
3.3.3 A ESFERA

- Equação de difusão em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \overbrace{\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)}^{=0} + \overbrace{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}^{=0} + \overbrace{\dot{q}}^{=0} = \overbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}^{=0}$$

- Para condução unidimensional em r , regime estacionário e sem geração interna de calor obtém-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(kr^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$



- Taxa na qual energia é conduzida em qualquer superfície interior:

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2) \frac{dT}{dr}$$

- Com isso, a taxa de transferência de calor q_r (não o fluxo de calor q_r'') é uma constante na direção radial.
- Para k constante, a equação diferencial ordinária anterior pode ser integrada duas vezes para se obter a solução geral:

$$\int \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) dr = \int 0 dr \Rightarrow \frac{dT}{dr} = C_1 r^{-2}$$

$$\int \frac{dT}{dr} dr = \int C_1 r^{-2} dr \Rightarrow T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

- As constantes de integração C_1 e C_2 podem ser obtidas pela aplicação de **condições de contorno de primeira espécie** em $r = r_1$ e $r = r_2$, ou seja:

$$T(r = r_1) = T_{s,1} \quad \text{e} \quad T(r = r_2) = T_{s,2}$$

- Substituindo as condições anteriores na solução geral obtém-se:

$$C_1 = -\left[\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{(1/r_1) - (1/r_2)} \right] \quad \text{e} \quad C_2 = T_{s,2} - \frac{1}{r_2} \left[\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{(1/r_1) - (1/r_2)} \right]$$

- Substituindo as expressões C_1 e C_2 na solução geral, obtém-se a **solução particular** para a **distribuição de temperaturas na parede esférica**:

$$T(r) = \left[\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{(1/r_1) - (1/r_2)} \right] \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) + T_{s,2}$$

- A **distribuição de temperatura é hiperbólica**, e não linear.
- Taxa de transferência de calor (lei de Fourier):

$$q_r = -k(4\pi r^2) \frac{dT}{dr} = k(2\pi r L) \left[\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{(1/r_1) - (1/r_2)} \right] r^{-2} \Rightarrow q_r = \frac{4\pi k (T_{s,1} - T_{s,2})}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

- Resistência térmica de condução na parede esférica:

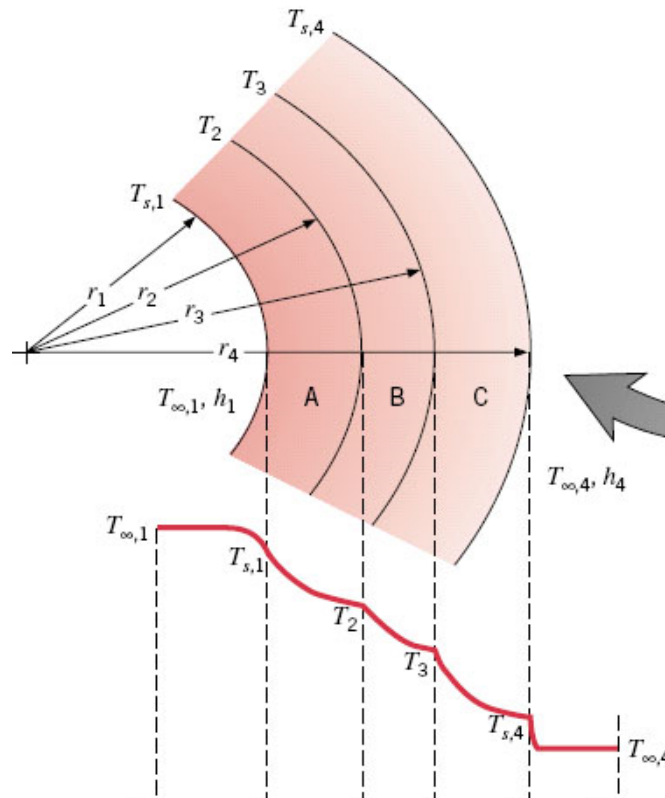
$$R_{t,cond} = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

- Para a parede esférica composta mostrada abaixo e desprezando as resistências de contato:

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{4\pi r_1^2 h_1} + \frac{1}{4\pi k_A} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi k_B} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{1}{4\pi k_C} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) + \frac{1}{4\pi r_4^2 h_4}}$$

- Para cada elemento do sistema tem-se:

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{4\pi r_1^2 h_1}} = \frac{T_{s,1} - T_2}{\frac{1}{4\pi k_A \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{1}{4\pi k_B \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)}} = \frac{T_3 - T_{s,4}}{\frac{1}{4\pi k_C \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right)}} = \frac{T_{s,4} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{4\pi r_4^2 h_4}}$$



- Em termos de um **coeficiente global de transferência de calor**:

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}} = UA(T_{\infty,1} - T_{\infty,4})$$

- Como a área A varia, U pode ser definido de maneira arbitrária.
- Em termos de $A_1 = 4\pi r_1^2$ tem-se:

$$U_1 = \frac{1}{R_{tot} A_1} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1^2}{k_A} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{r_1^2}{k_B} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{r_1^2}{k_C} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) + \frac{r_1^2}{r_4^2} \frac{1}{h_4}}$$

- Em termos de $A_2 = 4\pi r_2^2$ tem-se:

$$U_2 = \frac{1}{R_{tot} A_2} = \frac{1}{\frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{1}{h_1} + \frac{r_2^2}{k_A} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{r_2^2}{k_B} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{r_2^2}{k_C} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) + \frac{r_2^2}{r_4^2} \frac{1}{h_4}}$$

- Em termos de $A_3 = 4\pi r_3^2$ tem-se:

$$U_3 = \frac{1}{R_{tot} A_3} = \frac{1}{\frac{r_3^2}{r_1^2} \frac{1}{h_1} + \frac{r_3^2}{k_A} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{r_3^2}{k_B} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{r_3^2}{k_C} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) + \frac{r_3^2}{r_4^2} \frac{1}{h_4}}$$

- Em termos de $A_4 = 4\pi r_4^2$ tem-se:

$$U_4 = \frac{1}{R_{tot} A_4} = \frac{1}{\frac{r_4^2}{r_1^2} \frac{1}{h_1} + \frac{r_4^2}{k_A} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{r_4^2}{k_B} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{r_4^2}{k_C} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) + \frac{1}{h_4}}$$

- Deve ser notado que:

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 = U_3 A_3 = U_4 A_4 = (\sum R_t)^{-1}$$

- A expressão da resistência térmica para esfera é escrita para 4π e para ângulos sólidos θ inferiores a 4π deve ser recalculada:

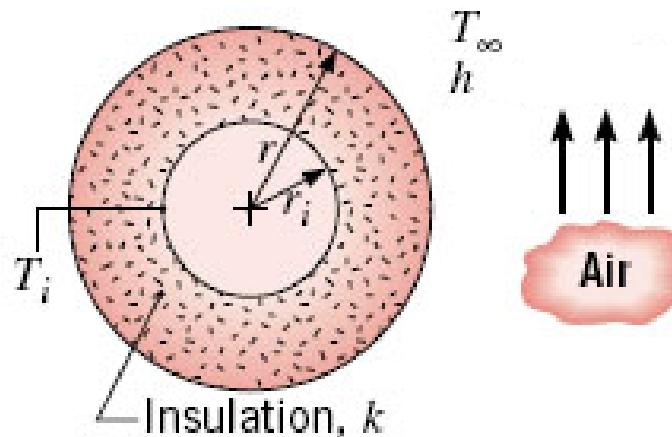
$$R_{t,cond} = \frac{1}{(4\pi/\theta)k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

3.3.4 RAIIO CRÍTICO DE ISOLAMENTO PARA ESFERAS

- Com o aumento da espessura do isolante em sistemas esféricos, surgem **dois efeitos concorrentes**:

1. **Aumento da resistência condutiva:** $R_{t,cond} = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$

2. **Diminuição da resistência convectiva:** $R_{t,conv} = \frac{1}{4\pi r^2 h}$



- Será que existe uma espessura de isolamento (raio crítico de isolamento) que **minimize a perda de calor** pela **maximização da resistência total à transferência de calor**?
- A resistência à transferência de calor é composta pela condução no isolante e pela convecção externa. Tem-se que:

$$R_{tot} = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi r^2 h}$$

- A taxa de transferência de calor é:

$$q = \frac{T_i - T_\infty}{R_{tot}} = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi r^2 h}}$$

- Uma espessura de isolamento que **maximiza** R_{tot} ou que **minimiza** q pode ser obtida fazendo $dR_{tot}/dr = 0$. Assim:

$$\frac{dR_{tot}}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi r^2 h} \right] = \frac{1}{4\pi k r^2} - \frac{2}{4\pi r^3 h} = 0$$

$$r = 2k/h$$

- Para verificar se $r = 2k/h$ é um **ponto de máximo** ou **ponto de mínimo** pode-se utilizar a derivada segunda, ou seja:

1. Se $\left(d^2 R_{tot} / dr^2 \right)_{r=2k/h} > 0$, $r = 2k/h$ é **ponto de mínimo**.
2. Se $\left(d^2 R_{tot} / dr^2 \right)_{r=2k/h} < 0$, $r = 2k/h$ é **ponto de máximo**.

- Desse modo: $\frac{d^2 R_{tot}}{dr^2} = -\frac{1}{2\pi k r^3} + \frac{3}{2\pi r^4 h}$

- Ou, em $r = 2k/h$, $\left. \frac{d^2 R_{tot}}{dr^2} \right|_{r=2k/h} = \frac{1}{2\pi (2k/h)^3} \left(-\frac{1}{k} + \frac{3}{2k} \right) > 0$

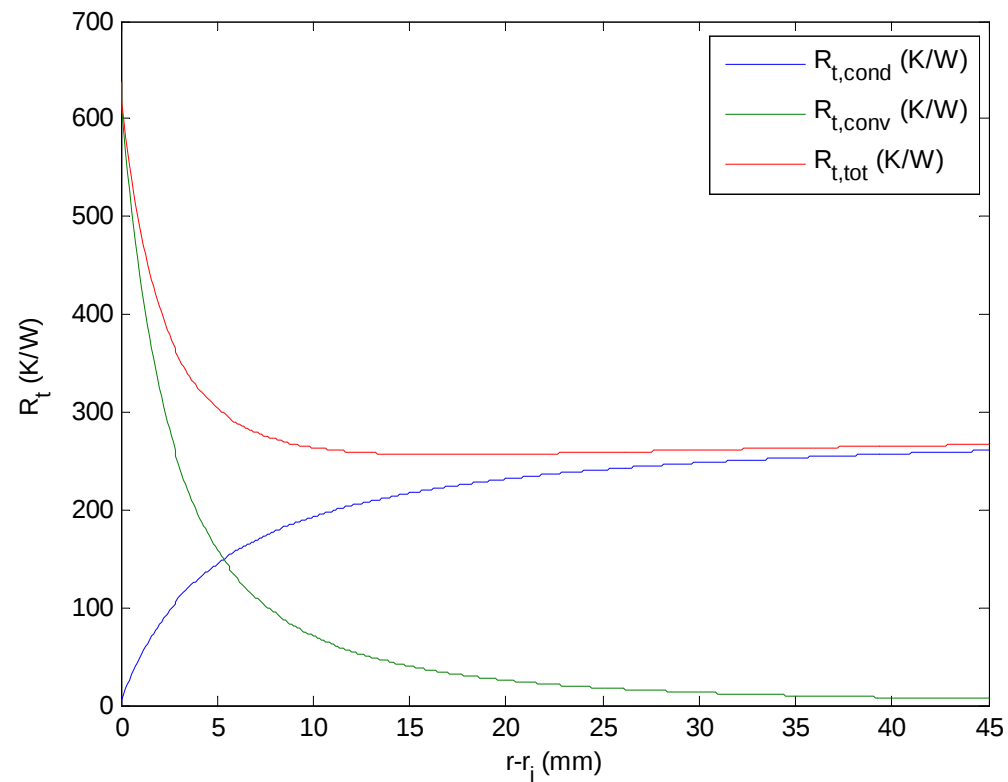
- Assim, $r = 2k/h$ **minimiza a resistência total**, e uma espessura ótima do isolante não existe.

- Faz mais sentido pensar em um **raio crítico de isolamento**, $r_{cr} = 2k/h$, que maximiza a transferência de calor, ou seja:

1. Abaixo de $r_{cr} = 2k/h$, q aumenta com o aumento de r .
2. Acima de $r_{cr} = 2k/h$, q diminui com o aumento de r .

- **Exemplo:** $k = 0,055 \text{ W/m.K}$; $h = 5 \text{ W/m.K}$; $r_i = 5 \text{ mm}$

$$r_{cr} = \frac{2k}{h} = \frac{2 \cdot 0,055}{5} = 0,022 \text{ m} = 22 \text{ mm}$$



3.4 RESUMO DOS RESULTADOS DA CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL

Soluções unidimensionais, em regime estacionário, da equação do calor sem geração de energia térmica.

	Plane Wall	Cylindrical Wall ^a	Spherical Wall ^a
Heat equation	$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$
Temperature distribution	$T_{s,1} - \Delta T \frac{x}{L}$	$T_{s,2} + \Delta T \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}$	$T_{s,1} - \Delta T \left[\frac{1 - (r_1/r)}{1 - (r_1/r_2)} \right]$
Heat flux (q'')	$k \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{k \Delta T}{r \ln(r_2/r_1)}$	$\frac{k \Delta T}{r^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]}$
Heat rate (q)	$kA \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{2\pi Lk \Delta T}{\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{4\pi k \Delta T}{(1/r_1) - (1/r_2)}$
Thermal resistance ($R_{t,cond}$)	$\frac{L}{kA}$	$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}$	$\frac{(1/r_1) - (1/r_2)}{4\pi k}$

^aThe critical radius of insulation is $r_{cr} = k/h$ for the cylinder and $r_{cr} = 2k/h$ for the sphere.