



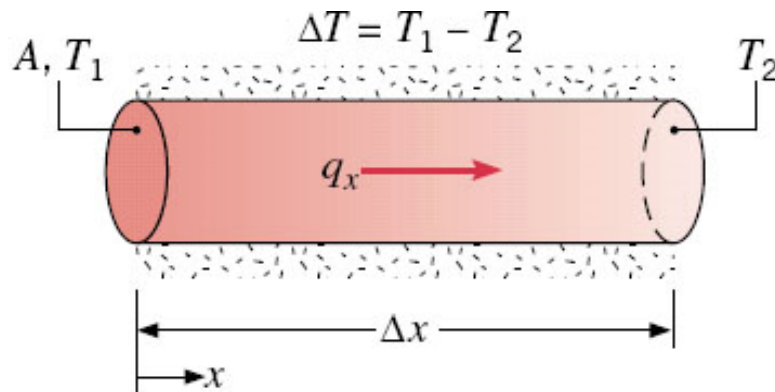
CAPÍTULO 2 – INTRODUÇÃO À CONDUÇÃO

DISCIPLINA: TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA 1

PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

2.1 A EQUAÇÃO DA TAXA DE CONDUÇÃO

- A lei de Fourier é baseada em **evidências experimentais**.
- De acordo com o experimento abaixo:



$$q_x \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

- Se mudarmos o material da barra, a proporcionalidade $\propto$ permanece válida.

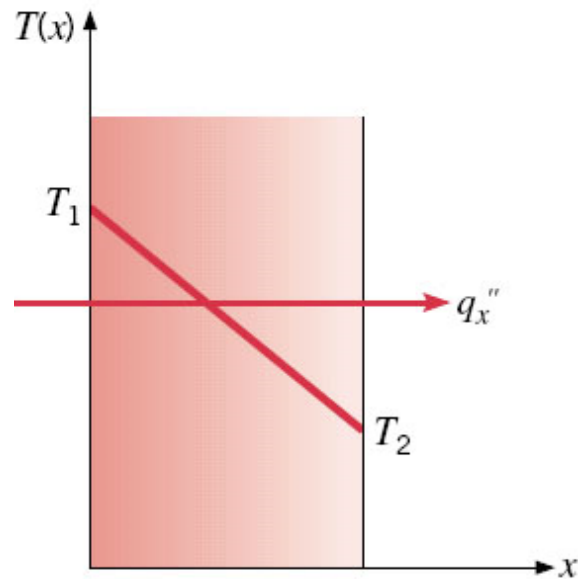
- Essa proporcionalidade pode ser convertida em uma igualdade pela introdução de um coeficiente que é uma **medida do comportamento do material**.
- Esse coeficiente é a **condutividade térmica** k (W/m.K).
- k é uma medida da facilidade ou dificuldade em se conduzir calor através de um meio.
- Para isolantes, $k \downarrow$, enquanto para condutores $k \uparrow$.
- No limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, a **taxa de transferência de calor** é:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

- O **fluxo de calor** (fluxo térmico) é:

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx}$$

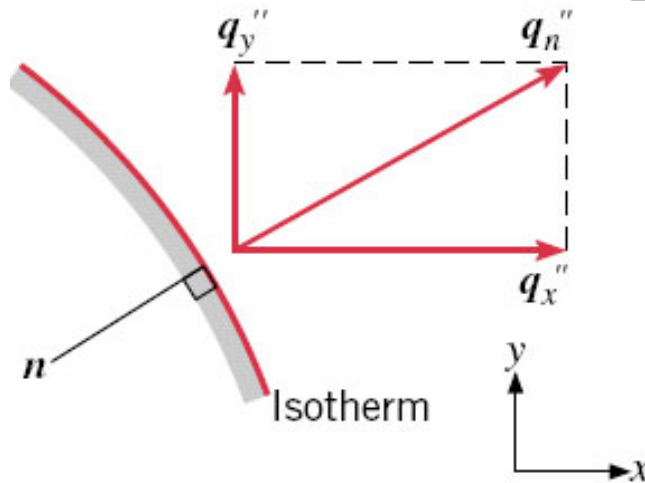
- q_x'' é uma **grandeza direcional**. Em particular, é **normal à área da seção transversal** (normal a uma isoterma).



- Como o **fluxo de vetor é vetorial** podemos escrever a lei de Fourier de uma forma mais geral utilizando o operador gradiente:

$$q'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial x} + j\frac{\partial T}{\partial y} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

- Uma forma alternativa da Lei de Fourier é $q_n'' = -k\frac{\partial T}{\partial n}$



- q_n'' é o fluxo térmico em uma direção n , normal a uma isoterma.
- O vetor fluxo térmico pode ser expresso como:

$$\mathbf{q}'' = i q_x'' + j q_y'' + k q_z''$$

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

- As equações são válidas para **meio isotrópico**, $k \neq k(x, y, z)$.
- A lei de Fourier se aplica a sólidos, líquidos e gases.

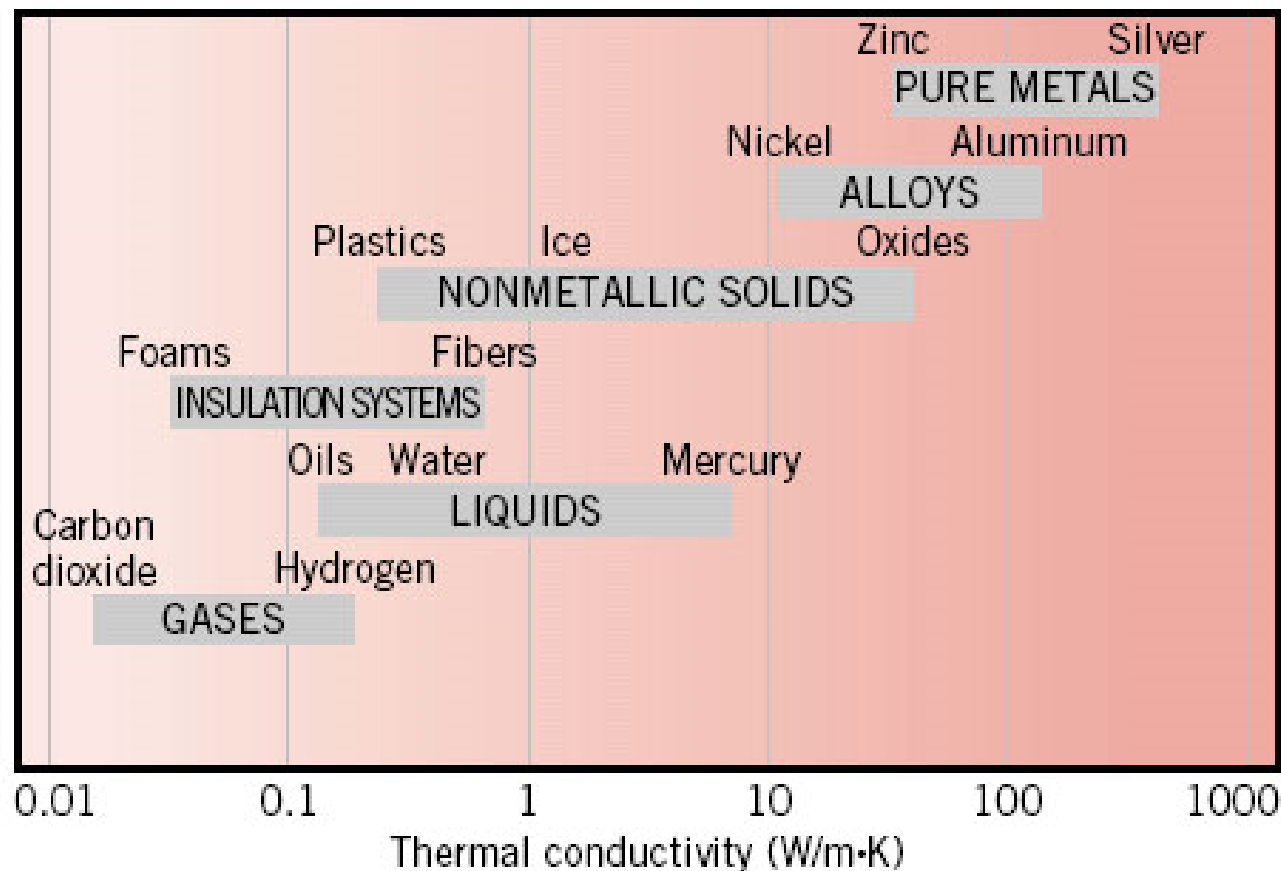
2.2 AS PROPRIEDADES TÉRMICAS DA MATÉRIA

- k depende da estrutura física da matéria, atômica e molecular.

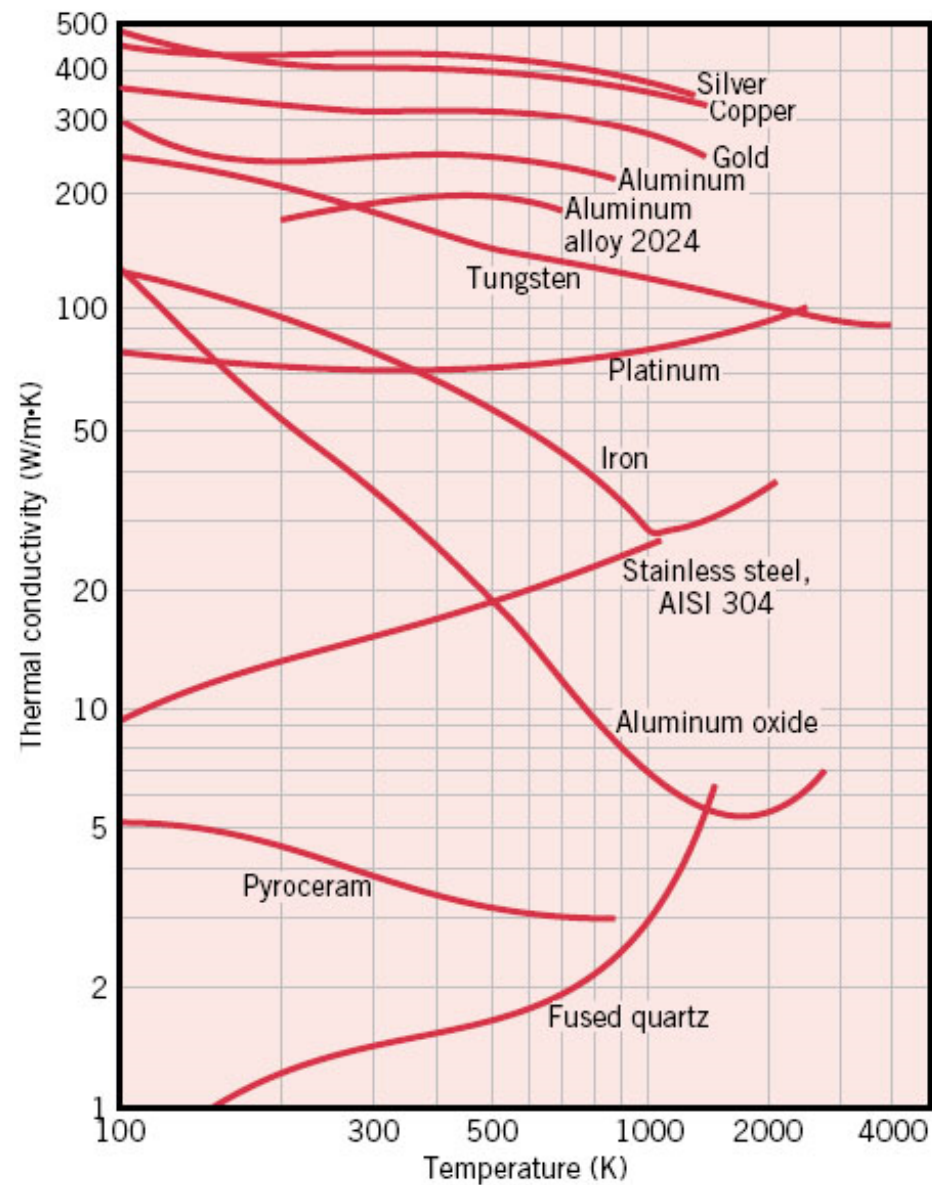
- k é uma indicação da taxa na qual a energia é transferida pelo processo de difusão.

2.2.1 CONDUTIVIDADE TÉRMICA

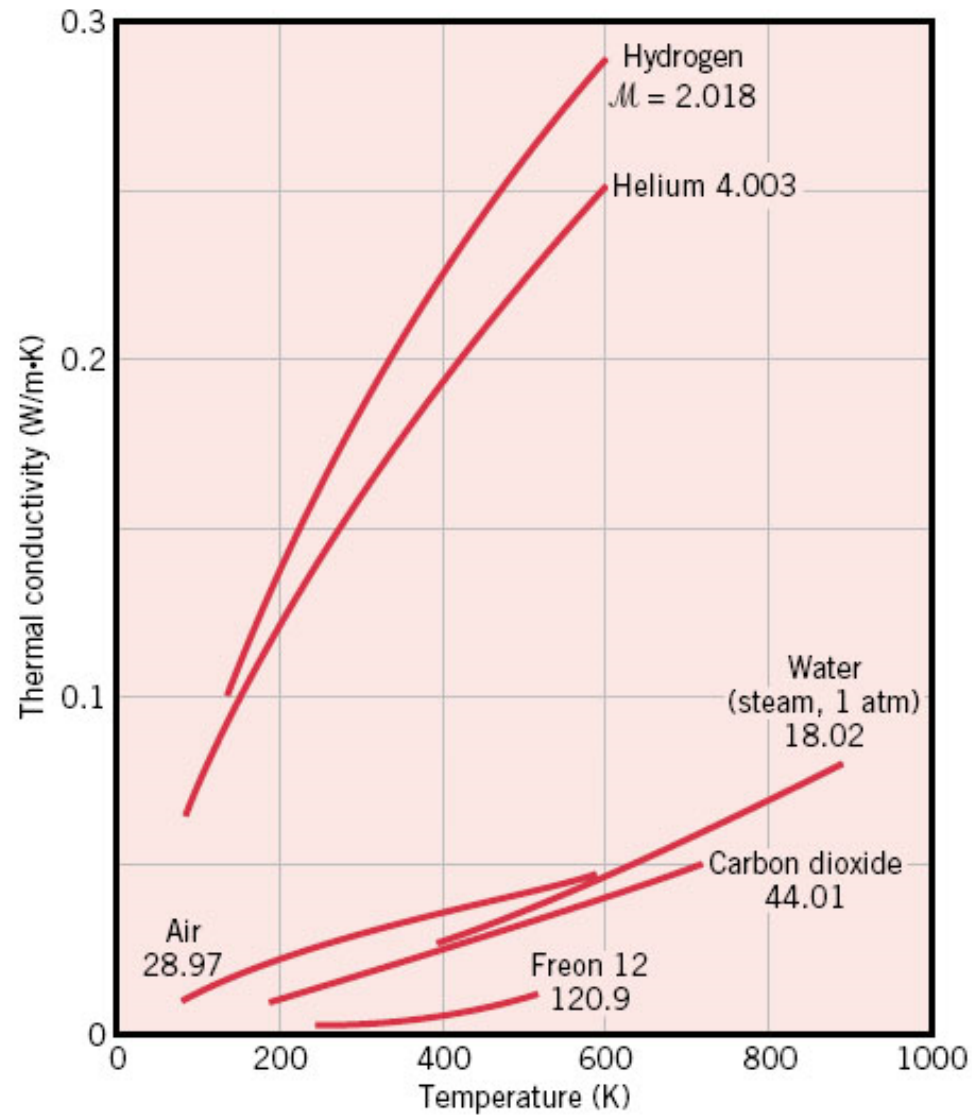
- Pela lei de Fourier, k_x é definida como: $k_x = -\frac{q_x''}{(\partial T / \partial x)}$
- Definições similares surgem em y e z , ou seja, k_y e k_z .
- Para um material isotrópico, k é independente da direção da transferência, ou seja, $k_x = k_y = k_z = k$.
- Em geral, $k_{\text{sólidos}} > k_{\text{líquidos}} > k_{\text{gases}}$ (espaçamento intermolecular).



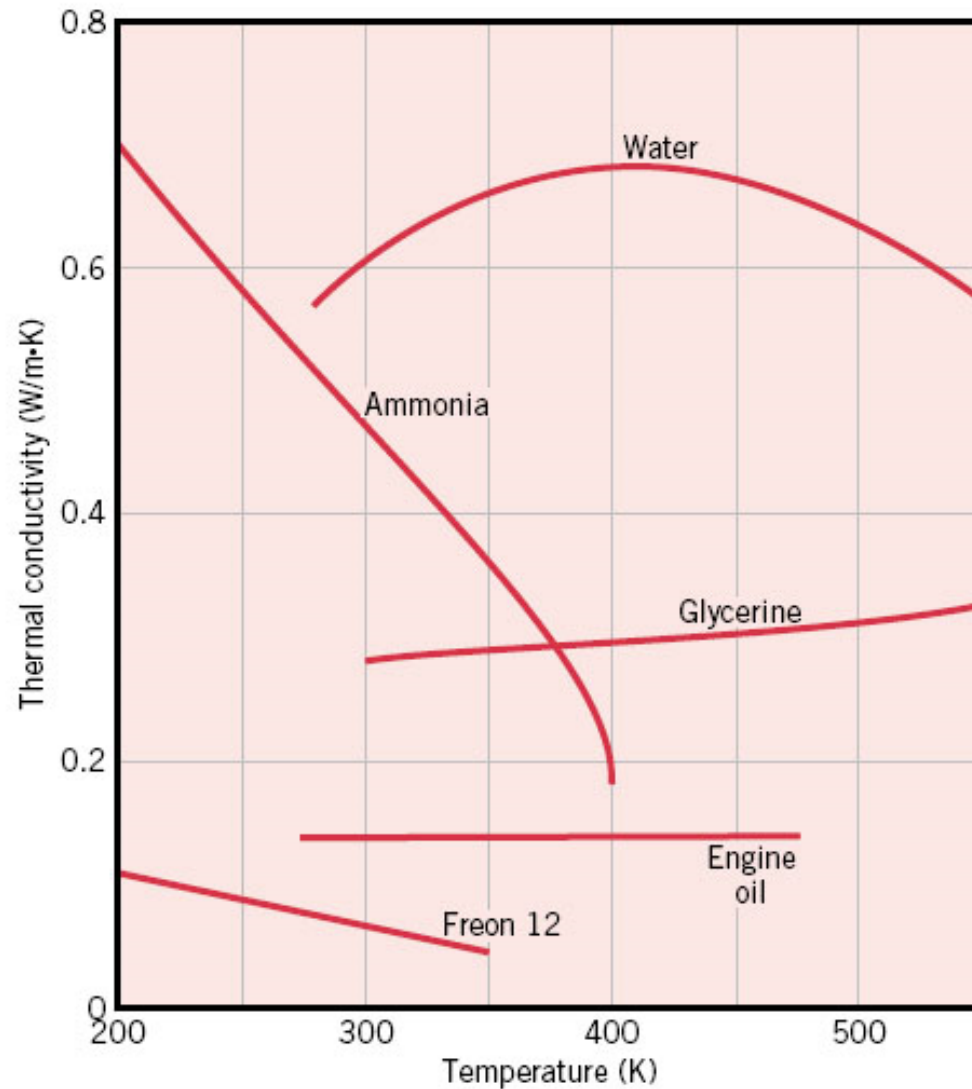
FAIXAS DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA DE VÁRIOS
ESTADOS DA MATÉRIA A TEMPERATURAS E PRESSÕES
NORMAIS



A DEPENDÊNCIA COM A
TEMPERATURA DA
CONDUTIVIDADE
TÉRMICA DE SÓLIDOS
SELECIONADOS



A DEPENDÊNCIA COM A
TEMPERATURA DA
CONDUTIVIDADE
TÉRMICA DE GASES
SELECIONADOS A
PRESSÕES NORMAIS



A DEPENDÊNCIA COM A
TEMPERATURA DA
CONDUTIVIDADE
TÉRMICA DE LÍQUIDOS
NÃO-METÁLICOS
SELECIONADOS SOB
CONDIÇÕES
SATURADAS.

2.2.2 OUTRAS PROPRIEDADES RELEVANTES

- Propriedades de transporte: k, ν
- Propriedades termodinâmicas: ρ, c_p
- Produto ρc_p (J/m³.K): capacidade calorífica volumétrica, mede a **capacidade de uma material de armazenar energia térmica.**
- Sólidos e líquidos ($\rho c_p > 1$ MJ/m³.K): **bons meios** para armazenar energia térmica.
- Gases ($\rho c_p \approx 1$ MJ/m³.K): **pouco adequados** para armazenar energia térmica.

- **Difusividade térmica** (m^2/s) é a razão entre a condutividade térmica e a capacidade calorífica volumétrica:

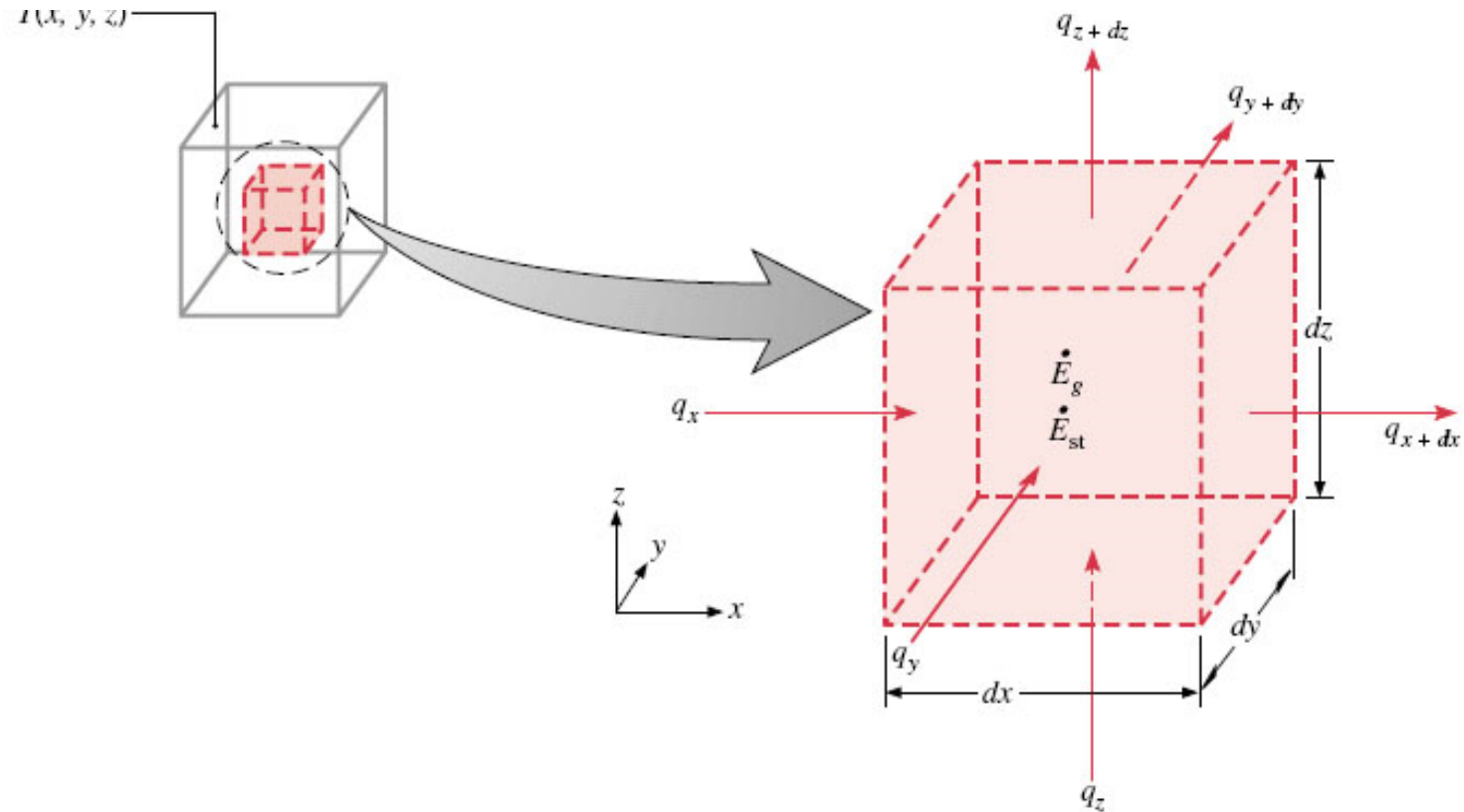
$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

- É uma medida da capacidade do material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la.
- $\alpha \uparrow$: material **responde rapidamente** a mudanças nas condições térmicas a ele imposta.
- $\alpha \downarrow$: material **responde lentamente** a mudanças nas condições térmicas a ele imposta.

2.3 A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE CALOR

- Objetivo: **determinar o campo de temperaturas** em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras. Com a distribuição de temperaturas, o **fluxo térmico por condução em qualquer ponto do meio ou na sua superfície** pode ser determinada pela lei de Fourier.
- A distribuição de temperatura pode ser determinada pela aplicação da exigência da **conservação da energia em um volume de controle diferencial**.
- São identificados os processos de transferência de energia relevantes e substituem-se as equações das taxas de transferência de calor apropriadas.

- Resultado: **equação diferencial** cuja solução, para condições de contorno especificadas, fornece a distribuição de temperaturas no meio.
- **Meio homogêneo**, com $T(x, y, z)$ em coordenadas cartesianas para um volume de controle diferencial $dx dy dz$.
- Formulação em um **dado instante de tempo** com **somente condução através de cada uma das superfícies de controle**.
- As taxas de transferência de calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle em x , y e z são q_x, q_y e q_z . Nas superfícies opostas, as taxas de transferência de calor por condução são expressas por série de Taylor.



VOLUME DE CONTROLE DIFERENCIAL $dx dy dz$ PARA
ANÁLISE DA CONDUÇÃO EM COORDENADAS
CARTESIANAS.

- Conservação da energia: $\dot{E}_{ent} - \dot{E}_{sai} + \dot{E}_g = \dot{E}_{acu}$

- Taxas de energia que **entram**: $\dot{E}_{ent} = q_x + q_y + q_z$

$$q_x = -k(dydz)\frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k(dxdz)\frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k(dxdy)\frac{\partial T}{\partial z}$$

- Taxas de energia que **saem**: $\dot{E}_{ent} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = -k(dydz)\frac{\partial T}{\partial x} - k(dxdydz)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy = -k(dxdz)\frac{\partial T}{\partial y} - k(dxdydz)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = -k(dx dy) \frac{\partial T}{\partial z} - k(dx dy dz) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

- Taxa de **geração** de energia térmica:

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz$$

- Taxa de variação da energia interna térmica **acumulada** (sensível):

$$\dot{E}_{acu} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

- O termo $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$ é a **taxa de variação com o tempo da energia sensível (térmica) do meio, por unidade de volume.**

- Substituindo os termos na equação da conservação da energia, e dividindo o resultado por $dx dy dz$ obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

- A expressão acima pode fornecer $T(x, y, z, t)$ e expressa **conservação da energia**.
- Cada uma das três primeiras parcelas do lado esquerdo representa o **fluxo líquido de calor por condução para o interior do volume de controle**.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = q_x'' - q_{x+dx}''$$

- Postulado: **em qualquer ponto do meio, a taxa líquida de transferência de energia por condução para o interior de um volume unitário somado à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica acumulada no interior deste volume.**
- Caso especial - para k constante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

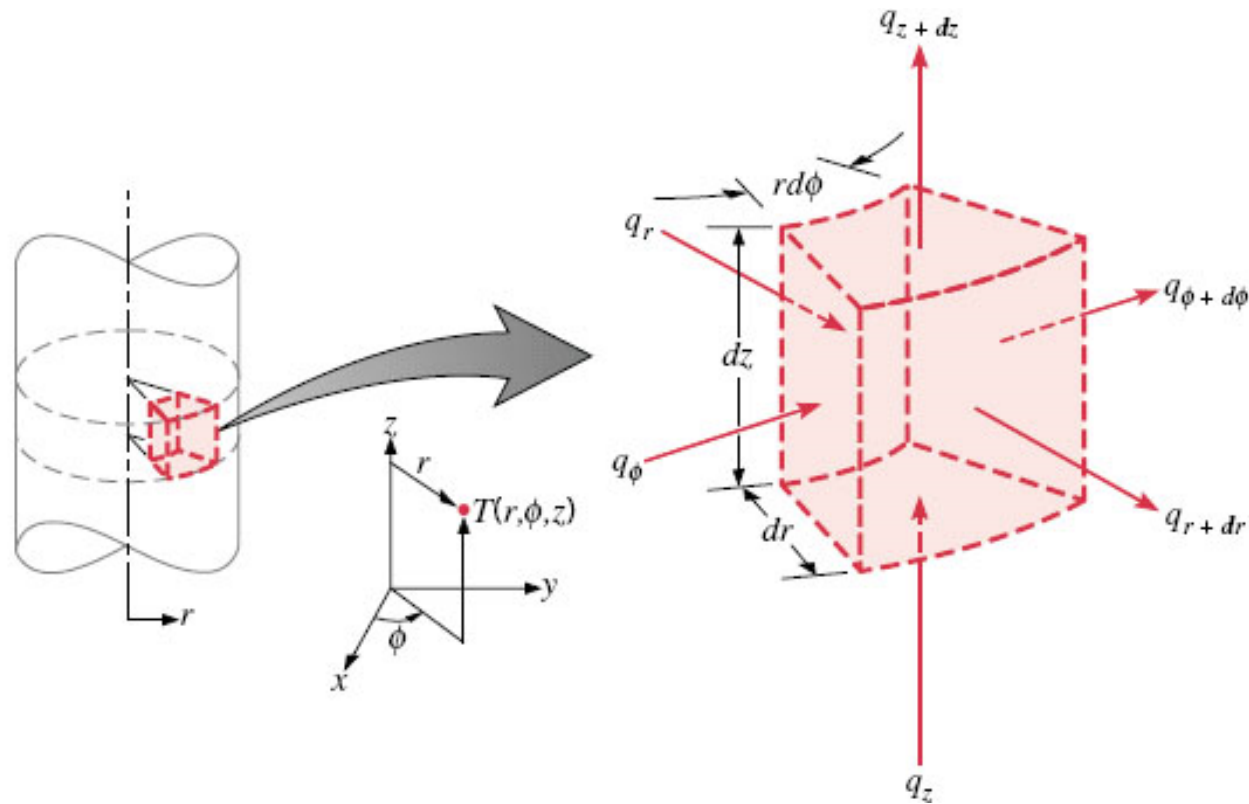
- Caso especial – regime estacionário:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0$$

- Caso especial – regime estacionário, condução unidimensional em x , sem geração de energia térmica:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

- A importante desse resultado é que, em condições de condução unidimensional, em regime estacionário, sem geração de energia, o **fluxo térmico é uma constante** ($dq_x''/dx = 0$).



VOLUME DE CONTROLE DIFERENCIAL $dr \cdot r d\phi \cdot dz$, PARA ANÁLISE DA CONDUÇÃO EM COORDENADAS CILÍNDRICAS (r, ϕ, z) – DIREÇÕES RADIAL, CIRCUNFERENCIAL E AXIAL.

- Vetor fluxo térmico em coordenadas cilíndricas:

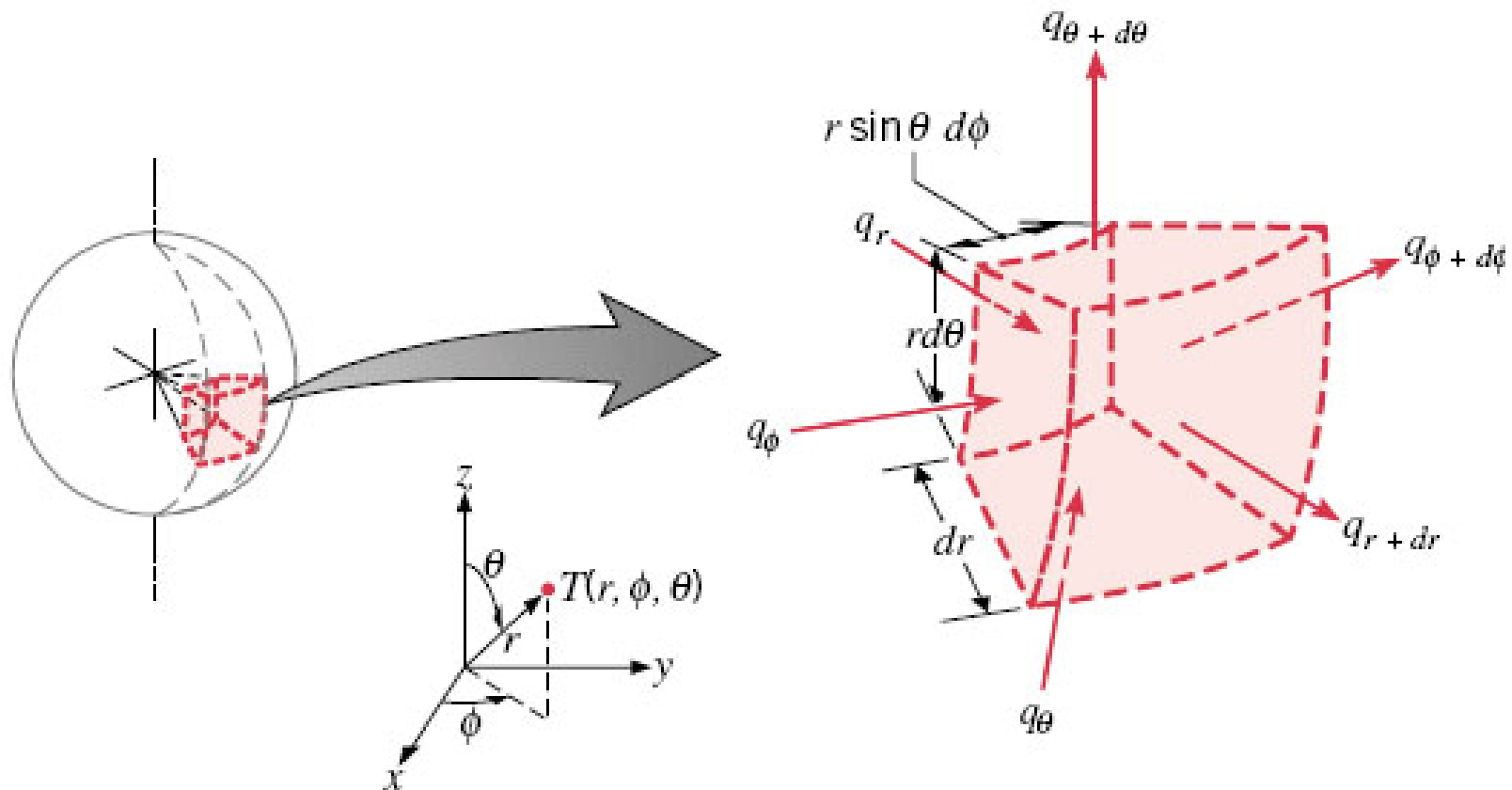
$$\mathbf{q}'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

- Componentes do vetor fluxo térmico em coordenadas cilíndricas:

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\phi = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} \quad q_z'' = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

- Equação do calor em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



VOLUME DE CONTROLE DIFERENCIAL $dr \cdot r \sin \theta d\phi \cdot r d\theta$, PARA ANÁLISE DA CONDUÇÃO EM COORDENADAS ESFÉRICAS (r, ϕ, θ) – DIREÇÕES RADIAL, POLAR E AZIMUTAL.

- Vetor fluxo térmico em coordenadas esféricas:

$$\mathbf{q}'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + k\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)$$

- Componentes do vetor fluxo térmico em coordenadas esféricas:

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\theta'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}$$

- Equação do calor em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO E INICIAL

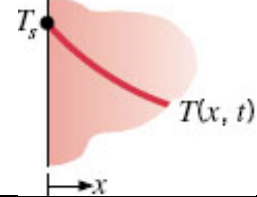
- Para determinar a **distribuição de temperaturas em um meio**, é necessário resolver a forma apropriada da equação do calor.
- Tal solução depende das condições físicas existentes nas **fronteiras do meio**, e, se a situação variar com o tempo, a solução também depende das condições existentes no meio em algum **instante inicial**. Para as condições nas fronteiras (condições de contorno), existem diversas possibilidades expressas matematicamente.
- A equação do calor é de **segunda ordem em relação às coordenadas espaciais**: **duas condições de contorno devem ser fornecidas para cada coordenada espacial**.

- A equação do calor é de **primeira ordem com relação ao tempo**: apenas uma condição (condição inicial) deve ser especificada.
- Condição 1 – **Primeira espécie ou de Dirichlet**: aproximada quando a superfície está em contato com um sólido em fusão ou com um líquido em ebulição.
- Condição 2 – **Segunda espécie ou de Neumann**: pode ser obtida através da fixação de um aquecedor elétrico na forma de uma fina película à superfície.
- Condição 3 – **Terceira espécie ou de Robin**: corresponde à existência de aquecimento (ou resfriamento) por convecção.

CONDIÇÕES DE CONTORNO NA SUPERFÍCIE ($x = 0$)

1. Temperatura da superfície constante

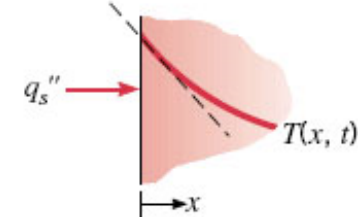
$$T(0, t) = T_s$$



2. Fluxo térmico na superfície constante

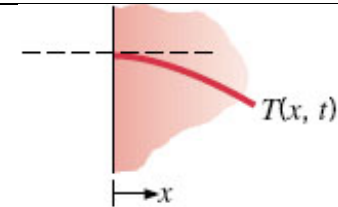
a) Fluxo térmico diferente de zero

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=0} = q_s''$$



b) Superfície isolada termicamente (fluxo térmico nulo)

$$\frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=0} = 0$$



3. Condição de convecção na superfície

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$

