



CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO À CONVECÇÃO

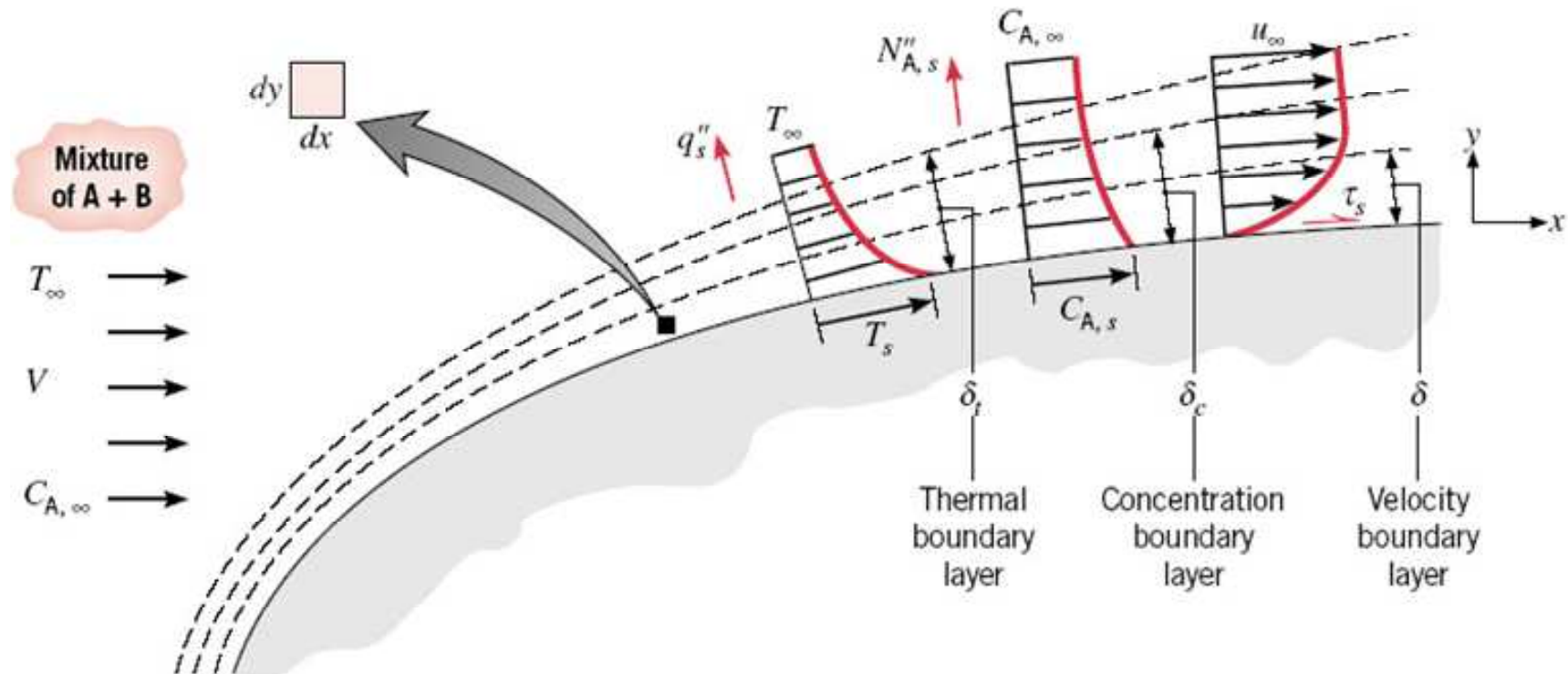
Prof. Dr. Santiago del Rio Oliveira

1.4 AS EQUAÇÕES DA CAMADA-LIMITE

- Diferença de velocidade entre a corrente livre de fluido e a velocidade nula na superfície: **camada-limite de velocidade**.
- Diferença de temperatura entre a corrente livre de fluido e a temperatura da superfície: **camada-limite de temperatura**.

1.4.1 Equações de camada-limite para o escoamento laminar

- As equações da camada limite obedecem a **leis fundamentais da natureza: conservação da massa, segunda lei de Newton do movimento e conservação da energia**.



- Na aulas anterior foram apresentadas essas leis fundamentais para a seguinte situação física: **escoamento bidimensional em regime estacionário de um fluido incompressível com propriedades constantes.**
- Simplificações das equações da camada-limite:

1 Forças de corpo são desprezíveis: $(X = Y = 0)$

2 Não há geração de energia térmica: $\dot{q} = 0$

3 Como as camadas-limite são muito finas, os gradientes normais à superfície do objeto são muito maiores do que aqueles ao longo da superfície: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

4 Como a camada-limite é muito fina: $\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{dp_\infty}{dx}$

5 A componente de velocidade u é muito maior que a componente v : $u \gg v$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{dp_\infty/dx} + \mu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\approx 0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \underbrace{X}_{\approx 0} \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}_{\approx 0} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi + \underbrace{\dot{q}}_{\approx 0}$$

$$\mu \Phi = \mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{\approx 0} \right)^2 + 2 \left[\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}_{\approx 0} + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2}_{\approx 0} \right] \right\}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3)$$

- As equações (1) a (3) podem ser utilizadas para se determinar u , v e T para camadas-limite laminares.

- As equações (1) e (2) podem ser utilizadas para determinar $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

- Com $u(x, y)$ pode-se determinar $\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$ e então $C_f = \frac{\tau_s}{\rho u_\infty^2 / 2}$.

- A equação (3) pode ser utilizada para determinar $T(x, y)$.

- Com $T(x, y)$ pode-se determinar $h = \frac{-k_f \left. \partial T / \partial y \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$

- Deve ser notada a presença de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ na equação (3)

- As soluções de camada-limite estão além do escopo desse curso e podem ser encontradas em textos avançados de convecção.

- Diversas **soluções analíticas** foram obtidas por **técnicas matemáticas complexas**.
- Soluções detalhadas das equações da camada-limite podem ser obtidas por **técnicas numéricas** (diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos).

1.5 SIMILARIDADE NA CAMADA-LIMITE: AS EQUAÇÕES DE CAMADA-LIMITE NORMALIZADAS

- Desprezando dp_∞/dx e $(\partial u/\partial y)^2$ as equações (2) e (3) são reescritas como:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

- Deve ser notada a semelhança entre as expressões: termos de **advecção no lado esquerdo** e termo **difusão no lado direito**.

- Implicações dessa similaridade podem ser desenvolvidas **adimensionalizando** as equações governantes.

1.5.1 Parâmetros de similaridade da camada-limite

- As novas variáveis independentes tem a seguinte forma:

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad u^* = \frac{u}{V} \quad v^* = \frac{v}{V} \quad T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} \quad p^* = \frac{p_\infty}{\rho V^2}$$

- As variáveis adimensionais acima são substituídas nas equações (2) e (3).

- **Adimensionalização da equação (2)** $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$:

$$(u^* V) \frac{\partial (u^* V)}{\partial (x^* L)} + (v^* V) \frac{\partial (u^* V)}{\partial (y^* L)} = -\frac{1}{\rho} \frac{d(p^* \rho V^2)}{d(x^* L)} + \nu \frac{\partial^2 (u^* V)}{\partial (y^* L)^2} \Rightarrow \left(\times \frac{L}{V^2} \right)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{\nu}{VL} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \Rightarrow u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

- Parâmetro de similaridade: **Número de Reynolds** $\text{Re}_L = \frac{VL}{\nu}$
- 1ª condição de contorno na parede na forma dimensional: $u(x,0) = 0$
- 1ª condição de contorno na parede da forma adimensional: $u^*(x^*,0) = 0$
- 2ª condição de contorno na parede na forma dimensional: $v(x,0) = 0$
- 2ª condição de contorno na parede na forma adimensional: $v^*(x^*,0) = 0$
- Condição de contorno na corrente livre na forma dimensional:

$$u(x, \infty) = u_{\infty}(x)$$

- **Condição de contorno** na corrente livre na **forma adimensional**:

$$u^*(x^*, \infty) = \frac{u_{\infty}(x^*)}{V}$$

- **Adimensionalização da equação (3)** $u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$:

$$(u^* V) \frac{\partial [T^*(T_{\infty} - T_s) + T_s]}{\partial (x^* L)} + (v^* V) \frac{\partial [T^*(T_{\infty} - T_s) + T_s]}{\partial (y^* L)} = \alpha \frac{\partial^2 [T^*(T_{\infty} - T_s) + T_s]}{\partial (y^* L)^2} \Rightarrow \left(\times \frac{L}{V(T_{\infty} - T_s)} \right)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\alpha}{VL} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \Rightarrow u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{k}{\mu c_p} \frac{\mu}{\rho VL} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

- Parâmetro de similaridade: **Número de Prandtl** $\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$

- Condições de contorno de temperatura na parede na **forma dimensional**:

$$T(x,0) = T_s$$

$$C_A(x,0) = C_{A,s}$$

- Condições de contorno de temperatura na parede na **forma adimensional**:

$$T^*(x^*,0) = 0$$

$$C_A^*(x^*,0) = 0$$

- Condições de contorno de temperatura na corrente livre na **forma dimensional**:

$$T(x, \infty) = T_\infty$$

- Condições de contorno de temperatura na corrente livre na **forma adimensional**:

$$T^*(x^*, \infty) = 1$$

$$C_A^*(x^*, \infty) = 1$$

1.5.2 Forma funcional das soluções

- **Forma funcional** da solução da **equação do momento**: $u^* = f\left(x^*, y^*, \text{Re}_L, \frac{dp^*}{dx^*}\right)$
- Tensão de cisalhamento na superfície:

$$\tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial \left(\frac{u^* V}{y^* L} \right)}{\partial \left(\frac{y^* L}{L} \right)} \Big|_{y^*=0} = \left(\frac{\mu V}{L} \right) \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}$$

- Coeficiente de atrito:
$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho V^2 / 2} = \frac{2 \left(\frac{\mu V}{L} \right) \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}}{\rho V^2} = \frac{2}{\text{Re}_L} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}$$

- Sabe-se que:
$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} = f \left(x^*, \text{Re}_L, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$$

- Para uma **dada geometria** tem-se que:
$$C_f = \frac{2}{\text{Re}_L} f(x^*, \text{Re}_L)$$

- **Forma funcional** da solução da **equação da conservação da energia**:

$$T^* = f \left(x^*, y^*, \text{Re}_L, \text{Pr}, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$$

- Coeficiente de transferência de calor por convecção:

$$h = \frac{-k_f \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty} = \frac{-k_f \frac{\partial [T^*(T_\infty - T_s) + T_s]}{\partial (y^* L)} \Big|_{y^*=0}}{T_s - T_\infty}$$

$$= -\frac{k_f (T_\infty - T_s)}{L(T_s - T_\infty)} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} = +\frac{k_f}{L} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}$$

- Número de Nusselt:
$$\text{Nu}_L = \frac{hL}{k_f} = +\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}$$

- Esse parâmetro é igual ao **gradiente de temperatura adimensional na superfície** e fornece uma **medida da transferência de calor por convecção que ocorre na superfície**.

- Para uma **geometria especificada**:
$$\text{Nu}_L = \frac{hL}{k_f} = f(x^*, \text{Re}_L, \text{Pr})$$
- **Número de Nusselt médio**:
$$\overline{\text{Nu}}_L = \frac{\bar{h}L}{k_f} = f(\text{Re}_L, \text{Pr})$$

1.6 SIGNIFICADO FÍSICO DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

- **Número de Reynolds**:
$$\text{Re}_L = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{\text{Forças de inércia}}{\text{Forças viscosas}}$$
 1. Determina a existência de um **escoamento laminar ou turbulento**.
 2. Baixos Re_L : forças viscosas maiores do que as forças de inércia.
 3. Altos Re_L : forças de inércia maiores do que as forças viscosas.

4. Com o aumento de Re_L o valor de δ diminui.

- **Número de Prandtl:** $Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{Difusividade de momento}}{\text{Difusividade térmica}}$

1. Fornece uma medida da **efetividade relativa dos transportes**, por difusão, de momento e de energia no interior das camadas-limite de velocidade e térmica.

2. Gases $Pr \approx 1$ (difusão de momento e de energia são comparáveis).

3. Metal líquido, $Pr \ll 1$ (difusão de energia superior a difusão de momento).

4. Óleos, $Pr \gg 1$ (difusão de momento superior a difusão de energia).

5. Influencia o **crescimento relativo das espessuras das camadas-limite de velocidade e térmica**.

7. Para um gás $\delta_t \approx \delta$; para um metal líquido $\delta_t \gg \delta$; para um óleo $\delta_t \ll \delta$.

1.7 OS COEFICIENTES CONVECTIVOS

- O objetivo principal é desenvolver meios para determinar h .
- Embora esses coeficientes possam ser determinados pela solução das equações da camada-limite, somente em condições de escoamento mais simples tais soluções podem ser obtidas de imediato.
- O procedimento mais prático envolve o cálculo de h a partir de relações empíricas na forma
$$\text{Nu}_L = \frac{hL}{k_f} = f(x^*, \text{Re}_L, \text{Pr}).$$
- A forma particular dessas equações é obtida pela correlação da transferência de calor em termos dos grupos adimensionais apropriados.