12.4-RADIAÇÃO DO CORPO NEGRO

$$E_\lambda(\lambda) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e}(\lambda,\theta,\phi)\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta d\phi$$

$$G_\lambda(\lambda) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_{\lambda,i}(\lambda,\theta,\phi)\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta d\phi$$

$$J_\lambda(\lambda) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e+r}(\lambda,\theta,\phi)\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta d\phi$$

$$q''_{rad} = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e+r}(\lambda,\theta,\phi)\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta d\phi d\lambda$$

$$-\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_{\lambda,i}(\lambda,\theta,\phi)\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta d\phi d\lambda$$

- Para calcular $E_\lambda(\lambda)$, $G_\lambda(\lambda)$, $J_\lambda(\lambda)$ e q''_{rad}, é necessário conhecer as intensidades espectrais, ou seja, $I_{\lambda,e}(\lambda,\theta,\phi)$, $I_{\lambda,i}(\lambda,\theta,\phi)$, $I_{\lambda,e+r}(\lambda,\theta,\phi)$.

- Para isso introduz-se o conceito de corpo negro:

1. Um corpo negro absorve toda a radiação incidente (absorvedor perfeito), independente do seu comprimento de onda e de sua direção.

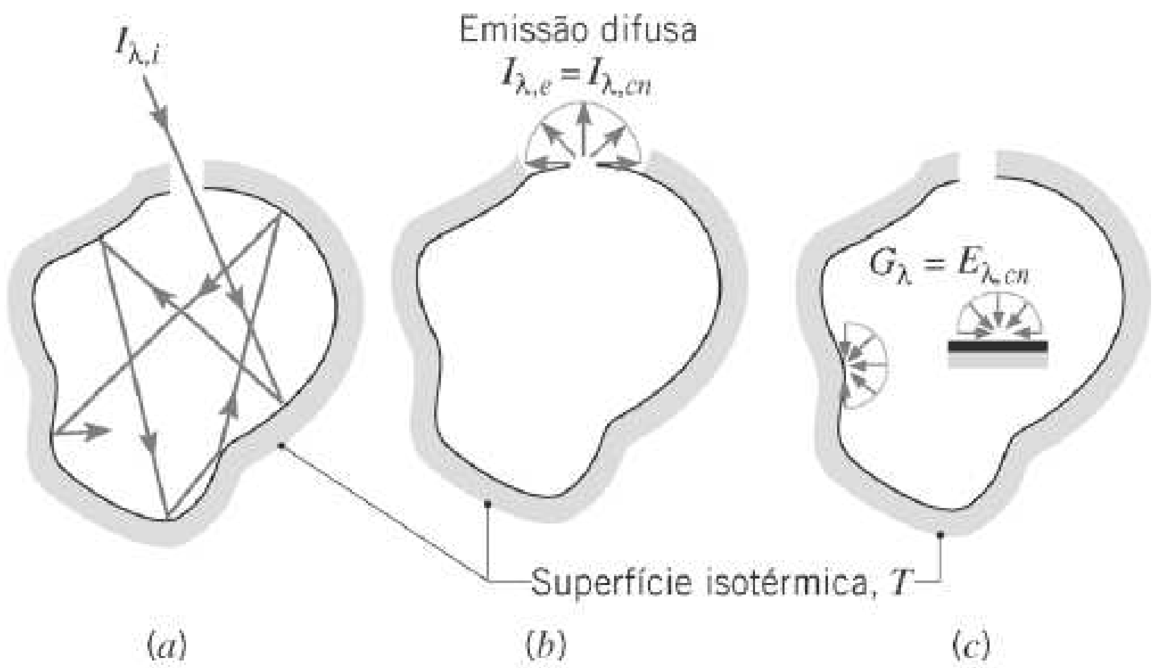
2. Para uma dada temperatura e comprimento de onda, nenhuma superfície pode emitir mais energia do que um corpo negro (emissor perfeito).

3. Embora a radiação emitida por um corpo negro seja uma função do comprimento de onda e da temperatura, ela é independente da direção (emissor difuso).

4. É um padrão em relação ao qual as propriedades radiantes de superfícies reais podem ser comparadas.

- Nenhuma superfície real tem as propriedades do corpo negro.

- Uma aproximação é uma cavidade cuja superfície interna está a temperatura uniforme.



(a) Absorção completa

(b) Emissão difusa a partir de uma abertura.
$I_{\lambda,cn}$ é independente da direção.

(c) Irradiação difusa das superfícies interiores.

- Qualquer superfície no interior da cavidade recebe uma irradiação $G_{\lambda} = E_{\lambda,cn}(\lambda, T)$, sendo irradiada de maneira difusa.

- Radiação de corpo negro existe no interior da cavidade independente do fato da superfície da cavidade ser altamente reflexiva ou absorvedora.

- Em equilíbrio termodinâmico, um corpo negro irradia energia na mesma taxa que a absorve.

- Um bom modelo para um corpo negro são as estrelas, como por exemplo, o Sol.

12.4.1-A DISTRIBUIÇÃO DE PLANCK

- A intensidade espectral de um corpo negro foi determinada por Max Planck (1900):

$$I_{\lambda,cn}(\lambda,T)=\frac{2hc_o^2}{\lambda^5\left[\exp\left(\dfrac{hc_o}{\lambda k_B T}\right)-1\right]}$$

- λ é o comprimento de onda (μm)

- $h=6{,}626\times10^{-34}$ J.s é a constante de Planck.

- $k_B=1{,}381\times10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann.

- $c_o=2{,}998\times10^{8}$ m/s é a velocidade da luz no vácuo.

- T é a temperatura absoluta do corpo negro em (K)

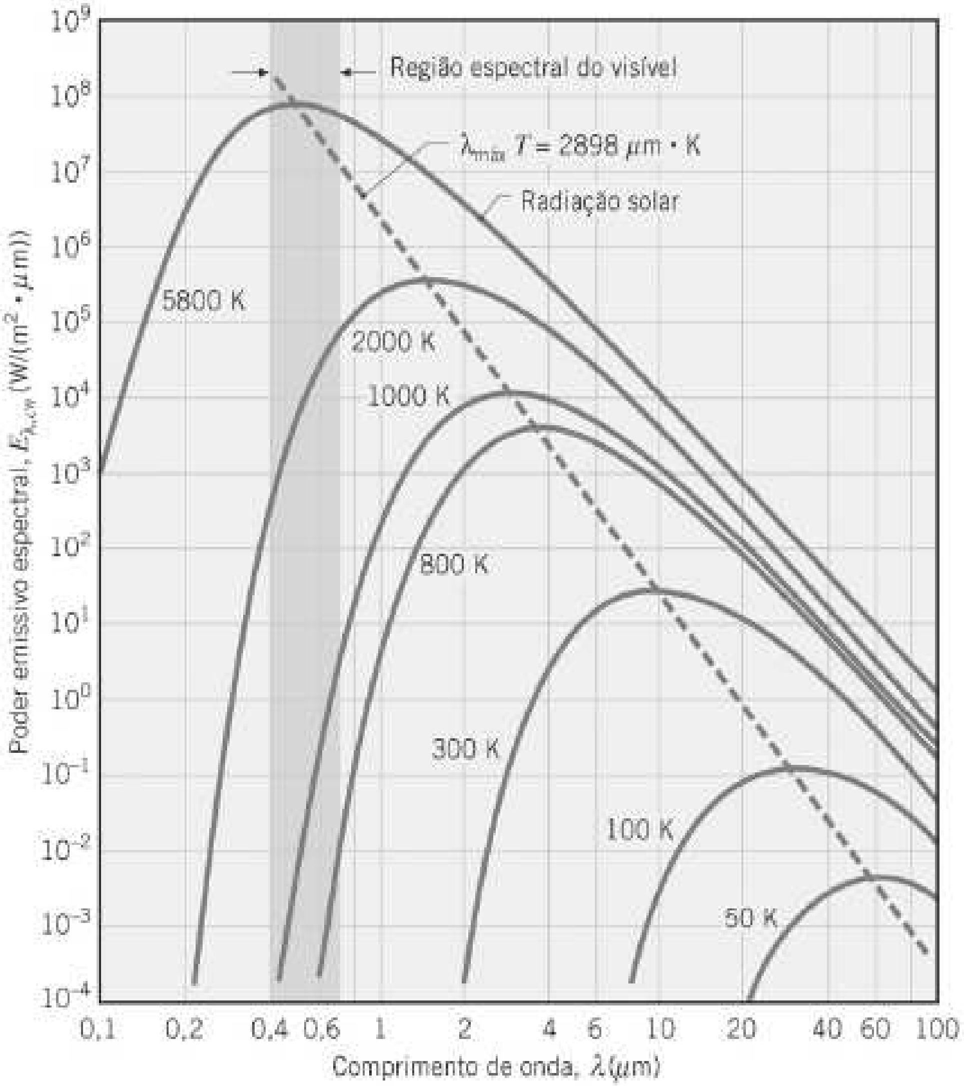
- Como o corpo negro é um emissor difuso, seu poder emissivo espectral é:

$$E_{\lambda,cn}(\lambda,T)=\pi I_{\lambda,cn}(\lambda,T)=\frac{2\cdot\pi\cdot 6{,}626\times10^{-34}\cdot(2{,}998\times10^{8})^{2}}{\lambda^{5}\left[\exp\left(\dfrac{6{,}626\times10^{-34}\cdot 2{,}998\times10^{8}}{\lambda\cdot 1{,}381\times10^{-23}\cdot T}\right)-1\right]}=\frac{C_1}{\lambda^{5}\left[\exp\left(\dfrac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]}$$

- $C_1=2\pi h c_o^2=3{,}742\times10^{8}\ \mathrm{W}\cdot\mu\mathrm{m}^4/\mathrm{m}^2$ (primeira constante de radiação)

- $C_2=(hc_o/k_B)=1{,}439\times10^{4}\ \mu\mathrm{m.K}$ (segunda constante de radiação)

- A equação acima é conhecida por distribuição de Planck ou lei de Planck, cuja representação gráfica é mostrada a seguir:



Região espectral do visível
$\lambda_{máx}\,T = 2898\ \mu m \cdot K$
Radiação solar
5800 K
2000 K
1000 K
800 K
300 K
100 K
50 K
Poder emissivo espectral, $E_{\lambda,cn}$ (W/(m$^2 \cdot \mu$m))
Comprimento de onda, λ(μm)
10^9
10^8
10^7
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0,1 0,2 0,4 0,6 1 2 4 6 10 20 40 60 100

1. O poder emissivo espectral (radiação emitida) varia continuamente com o comprimento de onda.
2. Para qualquer comprimento de onda, a magnitude da radiação emitida aumenta com o aumento da temperatura.
3. A região espectral na qual a radiação está concentrada depende da temperatura, com, comparativamente, mais radiação aparecendo com menores comprimentos de onda na medida em que a temperatura aumenta.
4. Uma fração significativa da radiação emitida pelo Sol, que pode ser aproximado por um corpo negro a 5800 K, encontra-se na região do visível no espectro.
5. Em contraste, para $T \leq 800\,\mathrm{K}$, a emissão encontra-se predominantemente na região do infravermelho no espectro, não sendo visível ao olho humano.

12.4.2-LEI DO DESLOCAMENTO DE WIEN

- A distribuição espectral do corpo negro tem um máximo em um comprimento de onda λ_{max} correspondente a esse máximo.

- O comprimento de onda λ_{max} na qual a emissão por unidade de área é máxima é dada pela lei de Wien.

- Uma expressão para λ_{max} pode ser obtida derivando $E_{\lambda,cn}(\lambda,T)$ com relação a λ e igualando a zero, ou seja:

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{C_1}{\lambda^5\left[\exp(C_2/\lambda T)-1\right]}\right\}=0$$

$$C_1 \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\lambda^{-5}}{\exp(C_2/\lambda T)-1}\right]=0 \Rightarrow \frac{-5\lambda^{-6}[\exp(C_2/\lambda T)-1]-\lambda^{-5}[\exp(C_2/\lambda T)-1]'}{[\exp(C_2/\lambda T)-1]^2}=0$$

$$-5\lambda^{-6}\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]-\lambda^{-5}\frac{C_2}{T}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)=0$$

$$-5\lambda^{-6}\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)+5\lambda^{-6}+\frac{C_2}{T}\lambda^{-7}\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)=0 \quad \boxed{[\div\lambda^{-6}]}$$

$$-5\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)+5+\frac{C_2}{T\lambda}\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)=0 \quad \boxed{\left[\div\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)\right]}$$

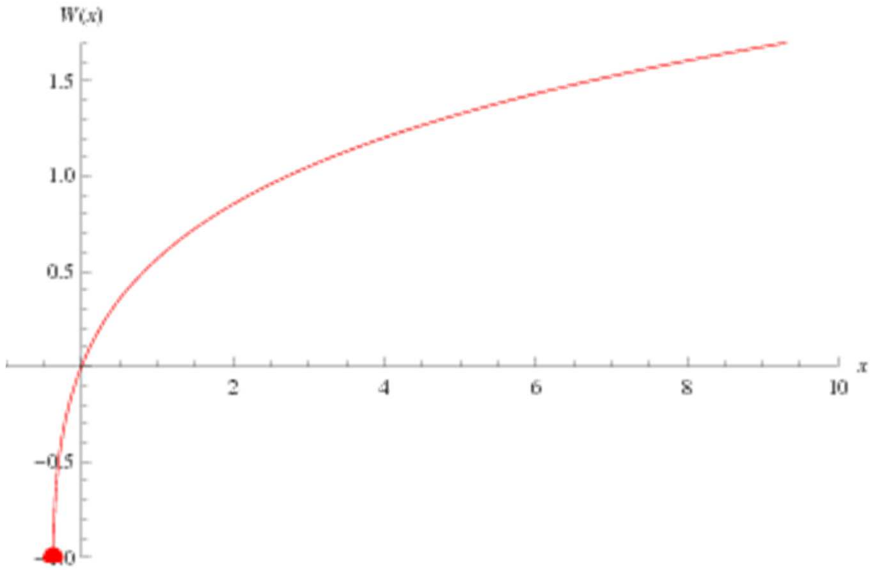
$$-5+5\exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right)+\frac{C_2}{T\lambda}=0 \Rightarrow -5\left[1-\exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right)\right]+\frac{C_2}{T\lambda}=0 \quad \boxed{\left[x=\frac{C_2}{\lambda T}\right]}$$

$$-5(1-e^{-x})+x=0 \Rightarrow \boxed{e^{-x}=-\frac{1}{5}(x-5)}$$

- A última expressão é uma equação transcendental na forma $\boxed{e^{-cx}=a_0(x-r).}$

- A solução dessa equação foi obtida por Johann Lambert na seguinte forma:

$$x = r + \frac{1}{c} W\left(\frac{ce^{-cr}}{a_0}\right)$$



- W é a função de Lambert e notamos que $c = 1$, $r = 5$ e $a_0 = -1/5$. Tem-se que:

$$x = 5 + W(-5e^{-5})$$

- A função de Lambert pode ser encontrada em softwares ou calculada por séries:

$$W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \frac{54}{6}x^6 + \frac{16807}{720}x^7 + \ldots$$

NO MATLAB A FUNÇÃO É "LAMBERTW($-5e^{-5}$) = - 0,0349"

- Tem-se então que $x = 5 + W(-5e^{-5}) = 4{,}96511423174428.$

- Mas $x = 4{,}96511423174428 = \dfrac{C_2}{\lambda_{\max} T} = \dfrac{1{,}439 \times 10^4}{\lambda_{\max} T}$ de forma que:

- $\lambda_{\max} T = C_3 = \dfrac{1{,}439 \times 10^4}{4{,}96511423174428} \approx 2898\ \mu\text{m.K}$ (C_3 é a terceira constante de radiação)

- A expressão acima é conhecida como Lei do deslocamento de Wien.

- Essa lei está representada por uma linha tracejada na figura anterior.

1. O poder emissivo espectral máximo é deslocado para comprimentos de onda menores com o aumento da temperatura.
2. Com o aumento da temperatura, os menores comprimentos de onda se tornam mais expressivos, até que finalmente tem-se uma emissão significativa ao longo de todo o espectro visível.
3. Quanto maior a temperatura de um corpo negro, menor é o comprimento de onda na qual ele emite máxima radiação.

12.4.3-A LEI DE STEFAN-BOLTZMANN

- O poder emissivo total de um corpo negro é obtido através das seguintes expressões:

$$E_{\lambda,cn}(\lambda,T) = \frac{C_1}{\lambda^5\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]} \quad \text{e} \quad E_{cn} = \int_0^\infty E_{\lambda,cn}(\lambda,T)d\lambda \Rightarrow$$

$$E_{cn} = \int_0^\infty \frac{C_1}{\lambda^5\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]}d\lambda = C_1\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]}$$

- Fazendo $x = \frac{C_2}{\lambda T}$ de forma que $dx = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{C_2}{T}d\lambda$ pode-se reescrever E_{cn} como:

$$E_{cn} = C_1 \int_{\infty}^{0} \frac{-\lambda^2 \dfrac{T}{C_2} dx}{\left(\dfrac{C_2}{xT}\right)^5 (e^x - 1)} = -(-C_1) \int_0^{\infty} \lambda^2 \frac{T}{C_2} \frac{x^5 T^5}{C_2^5} \frac{dx}{(e^x - 1)}$$ (observar limites da integral)

$$= C_1 \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda T}{C_2}\right)^2 \frac{x^5 T^4}{C_2^4} \frac{dx}{(e^x - 1)} = C_1 \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \frac{x^5 T^4}{C_2^4} \frac{dx}{(e^x - 1)} = \frac{C_1 T^4}{C_2^4} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$= \frac{C_1 T^4}{C_2^4} \left(\frac{\pi^4}{15}\right) = \frac{3{,}742 \times 10^8 \cdot \pi^4}{(1{,}439 \times 10^4)^4 \cdot 15} T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} T^4$$

- $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2.K^4)}$ é a constante de Stefan-Boltzmann.

- Lei de Stefan-Boltzmann: $E_{cn} = \sigma T^4$

- Essa expressão permite calcular a quantidade de radiação emitida em todas as direções e ao longo de todos os comprimentos de onda simplesmente a partir do conhecimento da temperatura do corpo negro.

- Como a emissão é difusa tem-se que: $I_{cn} = \frac{E_{cn}}{\pi}$.

- Deve ser notado que a lei de Stefan-Boltzmann nada mais é do que a área abaixo da curva do poder emissivo espectral de corpos negros.

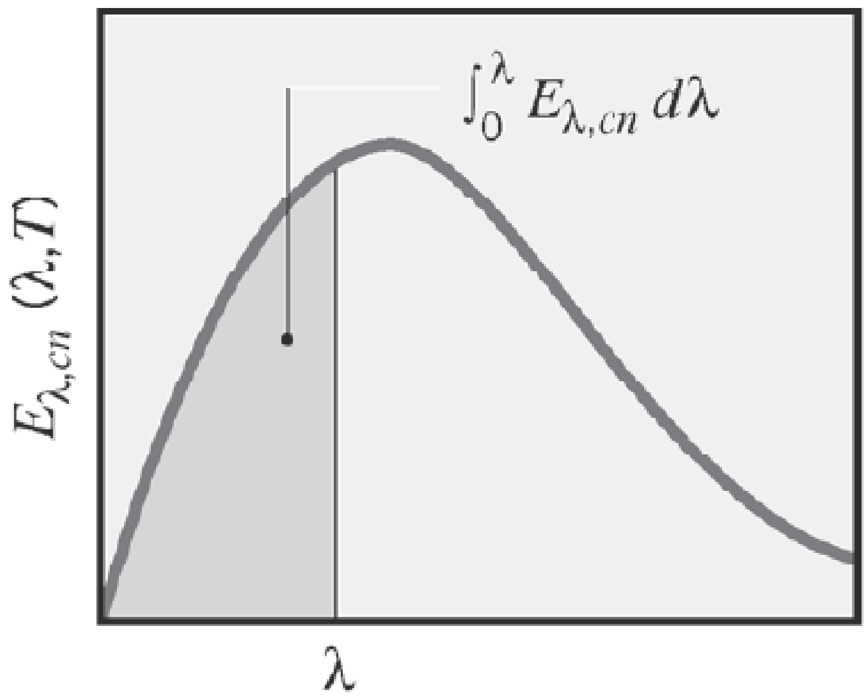
- Além disso, a integração foi feita em todo o espectro, ou seja, de 0 a ∞. No entanto, as vezes quer-se a emissão em uma faixa do espectro, e não em todo o espectro.

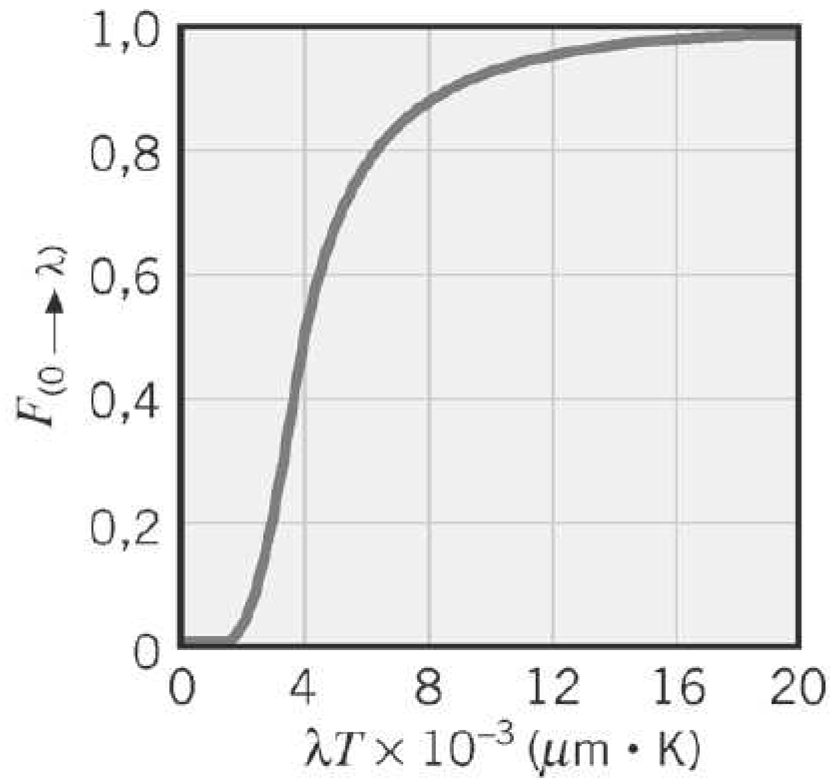
12.4.4-EMISSÃO EM UMA BANDA

- Para levar em conta efeitos espectrais, com frequência é necessário conhecer a fração da emissão total de um corpo negro que se encontra no interior de um certo intervalo de comprimentos de onda ou banda.

- Para uma dada temperatura e o intervalo compreendido entre 0 e λ, essa fração é determinada pela razão entre a seção sombreada e a área total sob a curva mostrada na figura abaixo:

$$F_{(0\rightarrow\lambda)} = \frac{\int_0^{\lambda} E_{\lambda,cn} d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda,cn} d\lambda} = \frac{\int_0^{\lambda} E_{\lambda,cn} d\lambda}{\sigma T^4} = \int_0^{\lambda T} \frac{E_{\lambda,cn}}{\sigma T^5} d(\lambda T) = f(\lambda T)$$





$$F_{(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2)} = \frac{\int_0^{\lambda_2} E_{\lambda,cn} d\lambda}{\sigma T^4} - \frac{\int_0^{\lambda_1} E_{\lambda,cn} d\lambda}{\sigma T^4} = F_{(0 \rightarrow \lambda_2)} - F_{(0 \rightarrow \lambda_1)}$$

TABELA 12.2 **Funções da radiação de corpo negro**

λT (μm · K)	$F_{(0 \rightarrow \lambda)}$	$I_{\lambda,cn}(\lambda, T)/\sigma T^5$ (μm · K · sr)$^{-1}$	$\dfrac{I_{\lambda,cn}(\lambda, T)}{I_{\lambda,cn}(\lambda_{máx}, T)}$
200	0,000000	$0{,}375034 \times 10^{-27}$	0,000000
400	0,000000	$0{,}490335 \times 10^{-13}$	0,000000
600	0,000000	$0{,}104046 \times 10^{-8}$	0,000014
800	0,000016	$0{,}991126 \times 10^{-7}$	0,001372
1.000	0,000321	$0{,}118505 \times 10^{-5}$	0,016406
1.200	0,002134	$0{,}523927 \times 10^{-5}$	0,072534
1.400	0,007790	$0{,}134411 \times 10^{-4}$	0,186082
1.600	0,019718	0,249130	0,344904
1.800	0,039341	0,375568	0,519949
2.000	0,066728	0,493432	0,683123
2.200	0,100888	$0{,}589649 \times 10^{-4}$	0,816329
2.400	0,140256	0,658866	0,912155
2.600	0,183120	0,701292	0,970891
2.800	0,227897	0,720239	0,997123
2.898	0,250108	$0{,}722318 \times 10^{-4}$	1,000000
3.000	0,273232	$0{,}720254 \times 10^{-4}$	0,997143

9.000	0,890029	$0{,}901463 \times 10^{-5}$	0,124801
9.500	0,903085	0,765338	0,105956
10.000	0,914199	$0{,}653279 \times 10^{-5}$	0,090442
10.500	0,923710	0,560522	0,077600
11.000	0,931890	0,483321	0,066913
11.500	0,939959	0,418725	0,057970
12.000	0,945098	$0{,}364394 \times 10^{-5}$	0,050448
13.000	0,955139	0,279457	0,038689
14.000	0,962898	0,217641	0,030131
15.000	0,969981	$0{,}171866 \times 10^{-5}$	0,023794
16.000	0,973814	0,137429	0,019026
18.000	0,980860	$0{,}908240 \times 10^{-6}$	0,012574
20.000	0,985602	0,623310	0,008629
25.000	0,992215	0,276474	0,003828
30.000	0,995340	$0{,}140469 \times 10^{-6}$	0,001945
40.000	0,997967	$0{,}473891 \times 10^{-7}$	0,000656
50.000	0,998953	0,201605	0,000279
75.000	0,999713	$0{,}418597 \times 10^{-8}$	0,000058
100.000	0,999905	0,135752	0,000019

- A terceira coluna facilita o cálculo da intensidade espectral para um comprimento de onda e uma temperatura especificados, ou seja:

$$I_{\lambda,cn}(\lambda,T) = \underbrace{\frac{I_{\lambda,cn}(\lambda,T)}{\sigma T^5}}_{tabelado} \times \sigma T^5$$

- A quarta coluna é usada para se obter uma estimativa rápida da razão entre a intensidade espectral em um comprimento de onda qualquer e a intensidade espectral em $\lambda_{máx}$, ou seja:

$$\frac{I_{\lambda,cn}(\lambda,T)}{I_{\lambda,cn}(\lambda_{máx},T)}$$