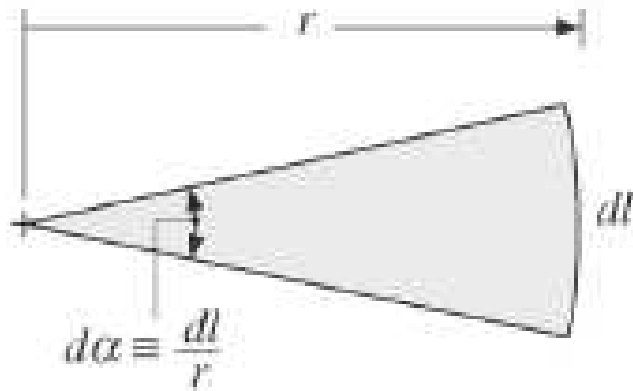


12.3-INTENSIDADE DE RADIAÇÃO

- Tanto a radiação que deixa uma superfície quanto a radiação que chega em uma superfície tem **característica direcional**.
- Para calcular E , J e G e q_{rad}'' esses efeitos direcionais devem ser considerados.
- Para levar em consideração esses efeitos define-se uma grandeza chamada de **intensidade de radiação** I .
- Devido a sua natureza, o tratamento matemático da radiação térmica envolve o uso do **sistema de coordenadas esféricas**.

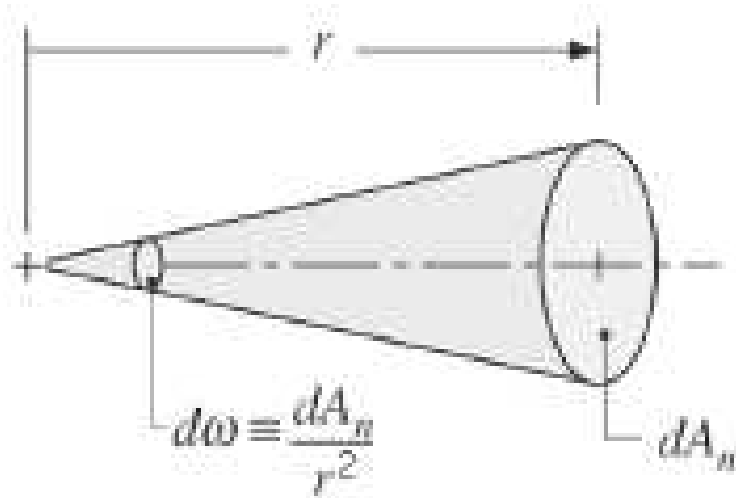
12.3.1-Definições matemáticas

- **ÂNGULO PLANO DIFERENCIAL**: definido por uma região entre os raios de um círculo e é medido como a razão entre o comprimento de arco dl sobre o círculo e o raio r do círculo:



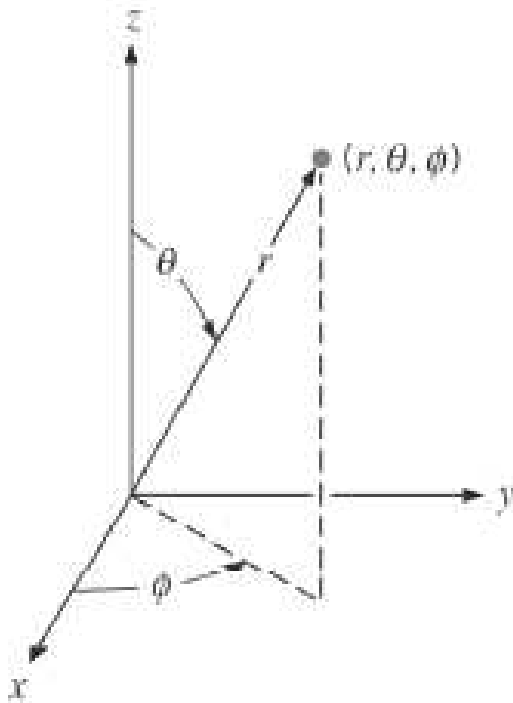
$$d\alpha = \frac{dl}{r} \text{ (radiano [rad])}$$

- **ÂNGULO SÓLIDO DIFERENCIAL**: definido por uma região entre os raios de uma esfera e é medido como a razão entre a área dA_n sobre a esfera e o quadrado do raio da esfera:



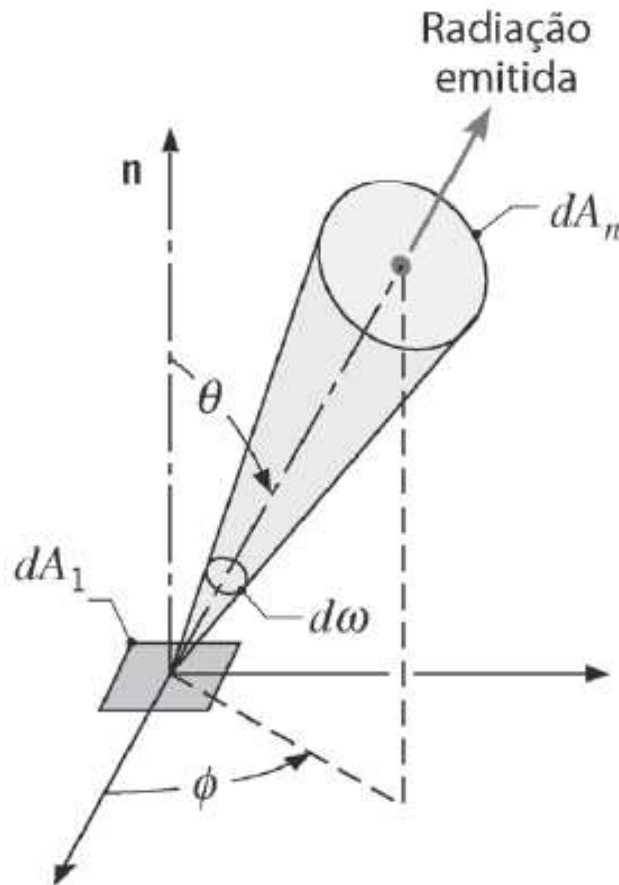
$$d\omega = \frac{dA_n}{r^2} \text{ (esterorradiano, [sr])}$$

- **SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS**: um ponto nesse sistema é definido pelo raio r da esfera, pelo ângulo de zênite θ e pelo ângulo azimutal ϕ .



$$P(r, \theta, \phi)$$

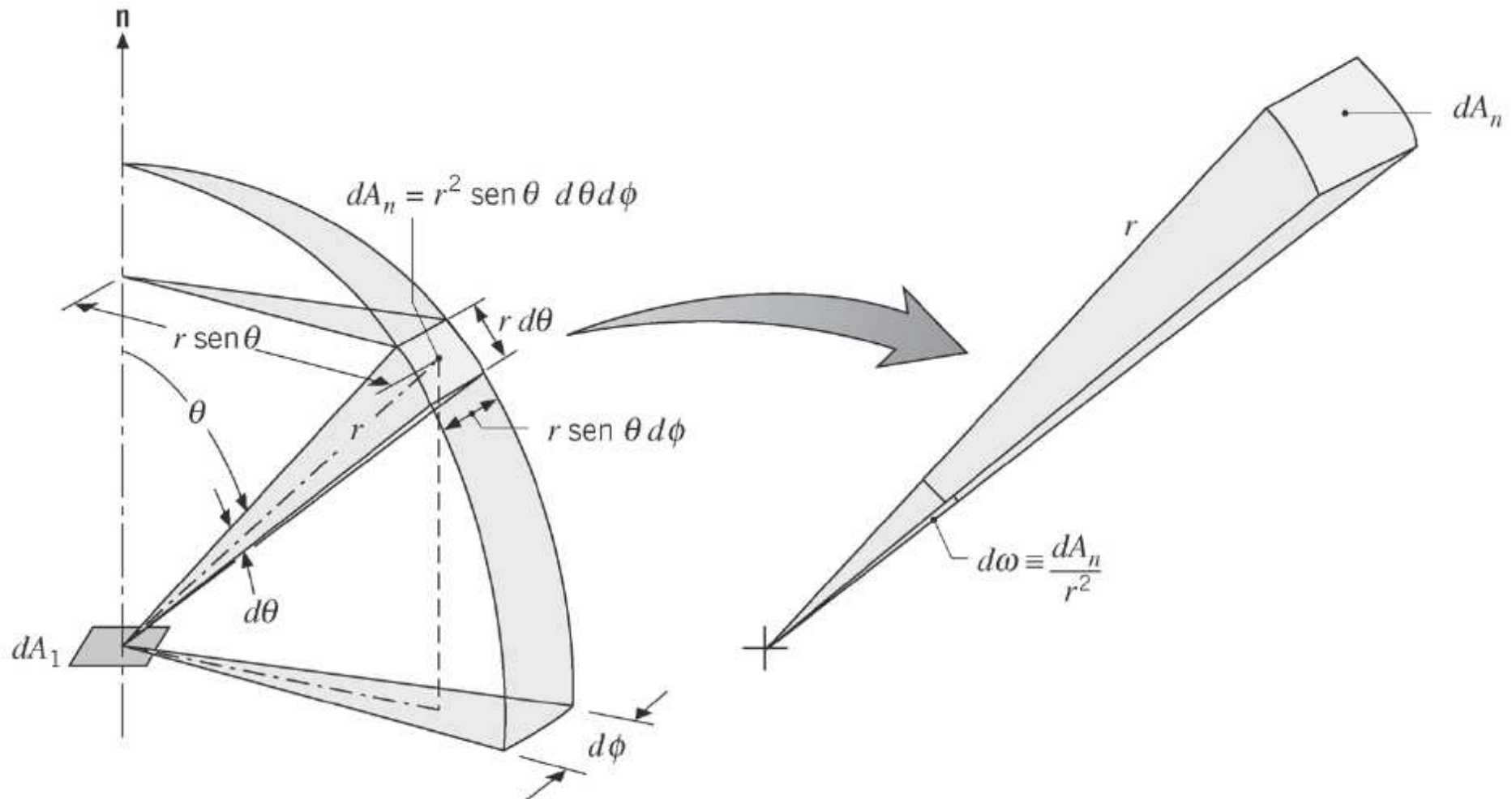
- Considere a emissão em uma direção particular a partir de um elemento com área superficial dA_1 :

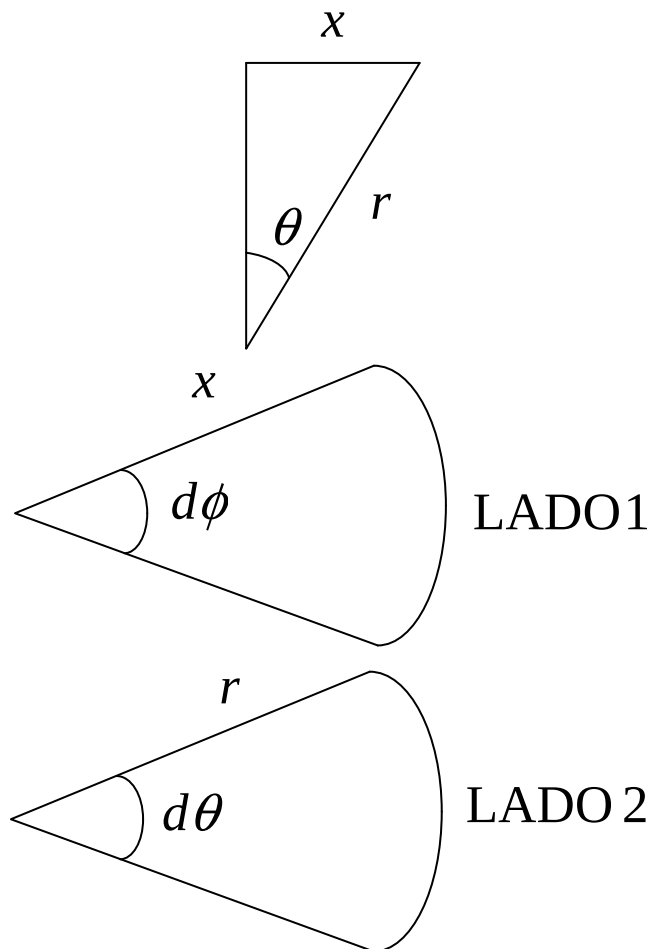


EMISSÃO DE RADIAÇÃO A PARTIR
DE UMA ÁREA DIFERENCIAL dA_1
PARA UM ÂNGULO SÓLIDO $d\omega$
SUBTENDIDO POR dA_n EM UM
PONTO SOBRE dA_1

A ÁREA dA_n ATRAVÉS DA QUAL A
RADIAÇÃO PASSA CORRESPONDE
A UM ÂNGULO SÓLIDO
DIFERENCIAL $d\omega$ QUANDO VISTA
DE UM PONTO SOBRE dA_1

- CÁLCULO DO ÂNGULO SÓLIDO $d\omega$:





$$\sin \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \sin \theta$$

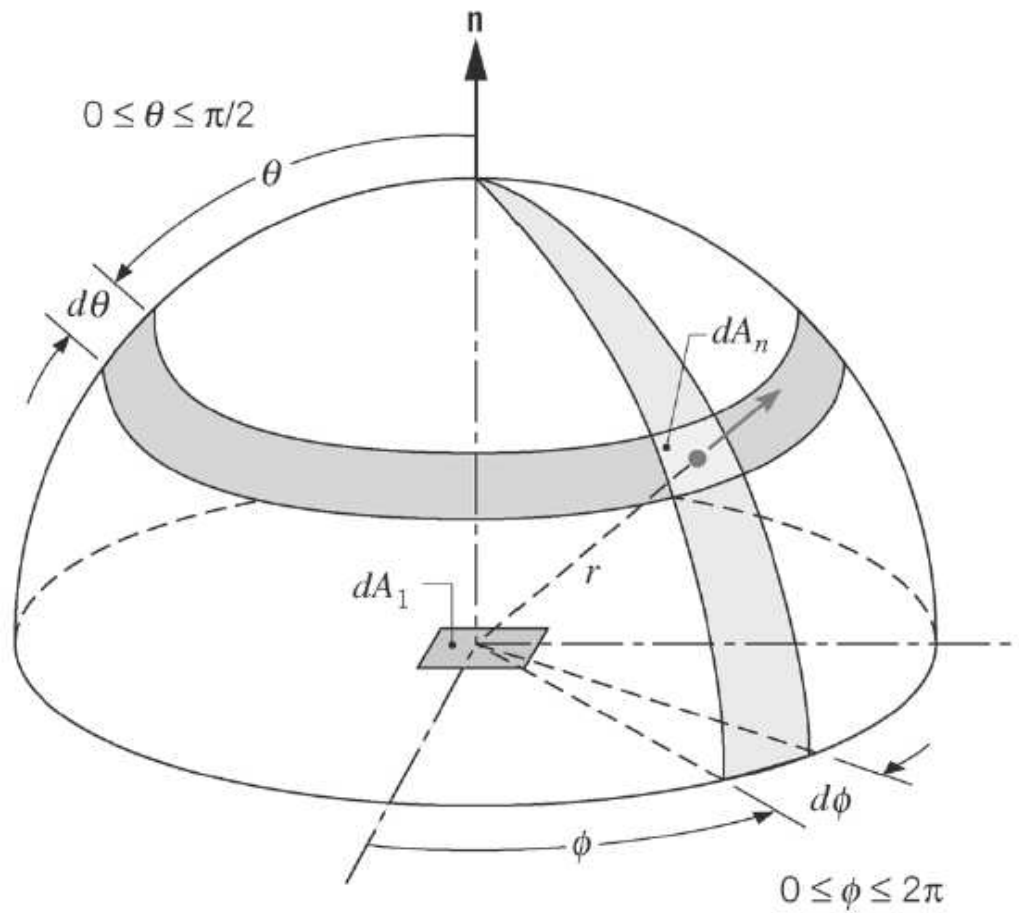
$$d\phi = \frac{\text{LADO 1}}{x} = \frac{\text{LADO 1}}{r \sin \theta} \Rightarrow \text{LADO 1} = r \sin \theta d\phi$$

$$d\theta = \frac{\text{LADO 2}}{r} \Rightarrow \text{LADO 2} = r d\theta$$

$$dA_n = \text{LADO 1} \times \text{LADO 2} = (r \sin \theta d\phi)(r d\theta) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$d\omega = \frac{dA_n}{r^2} = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{r^2} \Rightarrow d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

- A partir de dA_1 a radiação pode ser emitida em qualquer direção definida por uma **hemisfério hipotético** (uma semi-esfera).
- O ângulo sólido total, associado ao **hemisfério completo** pode ser obtido pela integração de $d\omega$ de $\theta = 0$ até $\theta = \pi/2$ e de $\phi = 0$ até $\phi = 2\pi$.



$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\int_h d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta d\phi$$

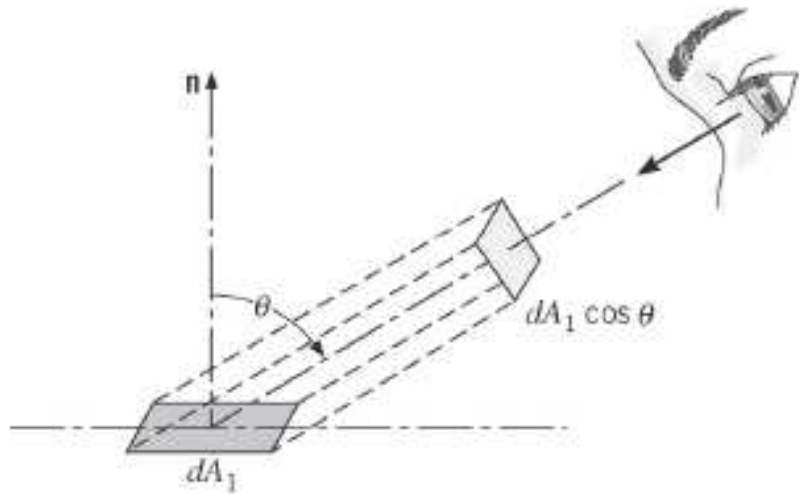
$$\int_h d\omega = \int_0^{2\pi} [-\cos \theta]_0^{\pi/2} d\phi$$

$$\int_h d\omega = \int_0^{2\pi} \left[\underbrace{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\cos(0)}_{=1} \right] d\phi$$

$$\int_h d\omega = \int_0^{2\pi} d\phi = [\phi]_0^{2\pi} = 2\pi \text{ sr}$$

12.3.2-INTENSIDADE DE RADIAÇÃO

- Define-se I_λ (**intensidade de radiação espectral**) como: *taxa na qual energia radiante é emitida no comprimento de onda λ na direção (θ, ϕ) , por unidade de área da superfície emissora **NORMAL** a essa direção, por unidade de ângulo sólido no entorno dessa direção e por unidade de intervalo de comprimento de onda $d\lambda$ no entorno de λ .*



$$I_\lambda(\lambda, \theta, \phi) = \frac{dq}{dA_1 \cos \theta \cdot d\omega \cdot d\lambda}$$

$$[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr} \cdot \mu\text{m})]$$

- Define-se dq_λ : *taxa na qual a radiação de comprimento de onda λ deixa dA_1 e passa por dA_n .*

$$dq_\lambda = \frac{dq}{d\lambda}$$

- Combinando as definições de $I_\lambda(\lambda, \theta, \phi)$ e dq_λ obtém-se:

$$I_\lambda(\lambda, \theta, \phi) = \frac{1}{dA_1 \cos \theta \cdot d\omega} \frac{dq}{d\lambda} = \frac{dq_\lambda}{dA_1 \cos \theta \cdot d\omega} \Rightarrow dq_\lambda = I_\lambda(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos \theta \cdot d\omega$$

- A *unidade* de dq_λ é $[W/\mu m]$

- Substituindo a expressão de $d\omega$ em dq_λ , dividindo por dA_1 e definindo $dq_\lambda'' = dq_\lambda / dA_1$, obtém-se:

$$dq_\lambda = I_\lambda(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos \theta \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dq_\lambda}{dA_1} = I_\lambda(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi$$

$$dq_\lambda'' = I_\lambda(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi \text{ (fluxo de radiação espectral) } [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})]$$

- A expressão acima permite calcular os fluxos térmicos radiantes conhecida a distribuição espectral e direcional da intensidade de radiação $I_\lambda(\lambda, \theta, \phi)$ em qualquer ângulo sólido finito ou ao longo de qualquer intervalo de comprimento de onda finito.
- Essa expressão será utilizada para se determinar E , J e G e q_{rad}'' .

12.3.3-RELAÇÃO COM A EMISSÃO

- **PODER EMISSIVO HEMISFÉRICO ESPECTRAL**, $E_\lambda(\lambda)$, $(W/(m^2 \cdot \mu m))$: taxa na qual a radiação de comprimento de onda λ é emitida em todas as direções a partir de uma superfície por unidade de intervalo de comprimentos de onda $d\lambda$ no entorno de λ e por unidade de área superficial.

- Usando o **fluxo de radiação espectral**:

$$E_\lambda(\lambda) = \iint dq_\lambda'' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi$$

- Note que $E_\lambda(\lambda)$ é um fluxo radiante com base na **área superficial real** dA_1 enquanto $I_{\lambda,e}$ se baseia na área projetada $dA_1 \cos \theta$.

- **PODER EMISSIVO HEMISFÉRICO TOTAL**, E , (W/m^2): é a taxa na qual a radiação é emitida por unidade de área em todos os comprimentos de onda possíveis e em todas as direções possíveis.

$$E = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi d\lambda$$

- Usualmente o termo **HEMISFÉRICO** é omitido e fala-se em **PODER EMISSIVO ESPECTRAL** $E_\lambda(\lambda)$ e **PODER EMISSIVO TOTAL** E .
- Embora a distribuição direcional da emissão de uma superfície **varie de acordo com a superfície**, existe um caso especial que fornece uma aproximação razoável para muitas superfícies.

- Esse caso é o **emissor difuso**, onde a intensidade da radiação emitida é independente da direção, ou seja:

$$I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) = I_{\lambda,e}(\lambda)$$

- Da definição do **PODER EMISSIVO ESPECTRAL** $E_{\lambda}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} E_{\lambda}(\lambda) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e}(\lambda) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi = I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \underbrace{\sin \theta}_{=u} d\theta d\phi \\ &= I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} u du d\phi = I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left(\frac{u^2}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi = I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi \\ &= I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)}{2} \right]_0^{\pi/2} d\phi = I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \right) d\phi = \left(\frac{1}{2} \right) I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) I_{\lambda,e}(\lambda) \Rightarrow E_{\lambda}(\lambda) = \pi I_{\lambda,e}(\lambda) \end{aligned}$$

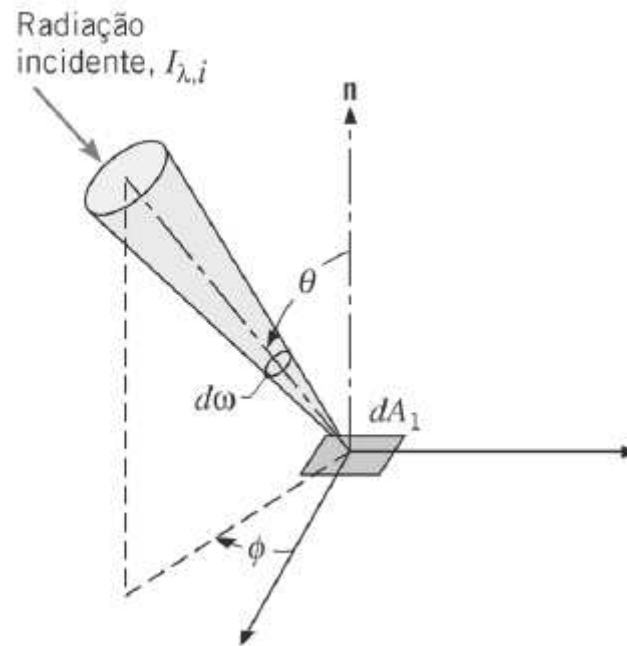
- Da definição do **PODER EMISSIVO TOTAL** E :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e}(\lambda) \cos \theta \cdot \underbrace{\sin \theta}_{=u} d\theta d\phi d\lambda \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e}(\lambda) u du d\phi d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda) \left(\frac{u^2}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda) \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi d\lambda \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda) \left[\frac{\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)}{2} \right]_0^{\pi/2} d\phi d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda) \left(\frac{1}{2} \right) d\phi d\lambda \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^\infty I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{2\pi} d\phi d\lambda = 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^\infty I_{\lambda,e}(\lambda) d\lambda \Rightarrow E = \pi I_e
 \end{aligned}$$

- I_e é a intensidade total da radiação emitida e o ângulo π tem a unidade esterorradianos.

12.3.4-RELAÇÃO COM A IRRADIAÇÃO

- Os conceitos anteriores podem ser estendidos para a **radiação incidente**. Tal radiação pode ter sua origem na emissão e reflexão que ocorrem em outras superfícies.



- **IRRADIAÇÃO HEMISFÉRICA ESPECTRAL**, $G_\lambda(\lambda)$, $(W/(m^2 \cdot \mu m))$: taxa na qual a radiação de comprimento de onda λ incide sobre uma superfície a partir de todas as direções, por unidade de área da superfície e por unidade de intervalo de comprimentos de onda $d\lambda$ no entorno de λ .

- Usando o **fluxo de radiação espectral**:

$$G_\lambda(\lambda) = \iint dq_\lambda'' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi$$

- Note que $G_\lambda(\lambda)$ é um fluxo radiante com base na **área superficial real** dA_1 enquanto $I_{\lambda,i}$ se baseia na área projetada $dA_1 \cos \theta$.

- **IRRADIAÇÃO HEMISFÉRICA TOTAL**, G , (W/m^2): é a taxa na qual a radiação incide por unidade de área em todos os comprimentos de onda possíveis e em todas as direções possíveis.

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi d\lambda$$

- Usualmente o termo **HEMISFÉRICO** é omitido e fala-se em **IRRADIAÇÃO ESPECTRAL** $G_\lambda(\lambda)$ e **IRRADIAÇÃO TOTAL** G .
- Embora a distribuição direcional da irradiação sobre uma superfície **varie de acordo com a superfície**, existe um caso especial que fornece uma aproximação razoável para muitas superfícies.

- Esse caso é uma **superfície difusa**, onde a intensidade da radiação incidente é independente da direção, ou seja:

$$I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) = I_{\lambda,i}(\lambda)$$

- Da definição da **IRRADIAÇÃO ESPECTRAL** $G_{\lambda}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} G_{\lambda}(\lambda) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,i}(\lambda) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi = I_{\lambda,i}(\lambda) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \underbrace{\sin \theta}_{=u} d\theta d\phi \\ &= I_{\lambda,i}(\lambda) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} u du d\phi = I_{\lambda,i}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left(\frac{u^2}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi = I_{\lambda,i}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi \\ &= I_{\lambda,i}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)}{2} \right]_0^{\pi/2} d\phi = I_{\lambda,i}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \right) d\phi = \left(\frac{1}{2} \right) I_{\lambda,i}(\lambda) \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) I_{\lambda,i}(\lambda) \Rightarrow G_{\lambda}(\lambda) = \pi I_{\lambda,i}(\lambda) \end{aligned}$$

- Da definição da **IRRADIAÇÃO TOTAL** G :

$$\begin{aligned}
 G &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,i}(\lambda) \cos \theta \cdot \underbrace{\sin \theta}_{=u} d\theta d\phi d\lambda \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,i}(\lambda) u du d\phi d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i}(\lambda) \left(\frac{u^2}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i}(\lambda) \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi d\lambda \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i}(\lambda) \left[\frac{\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)}{2} \right]_0^{\pi/2} d\phi d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i}(\lambda) \left(\frac{1}{2} \right) d\phi d\lambda \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^\infty I_{\lambda,i}(\lambda) \int_0^{2\pi} d\phi d\lambda = 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^\infty I_{\lambda,i}(\lambda) d\lambda \Rightarrow G = \pi I_i
 \end{aligned}$$

- I_i é a intensidade total da radiação incidente e o ângulo π tem unidade esterorradianos.

12.3.5-RELAÇÃO COM A RADIOSIDADE PARA SUPERFÍCIE OPACA

- **RADIOSIDADE HEMISFÉRICA ESPECTRAL**, $J_\lambda(\lambda)$, $(\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}))$: taxa na qual a radiação de comprimento de onda λ é emitida em todas as direções a partir de uma superfície por unidade de intervalo de comprimentos de onda $d\lambda$ no entorno de λ e por unidade de área superficial.

- Usando o **fluxo de radiação espectral**:

$$J_\lambda(\lambda) = \iint dq_\lambda'' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e+r}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi$$

- Note que $J_\lambda(\lambda)$ é um fluxo radiante com base na **área superficial real** dA_1 enquanto $I_{\lambda,e+r}$ se baseia na área projetada $dA_1 \cos \theta$.

- **RADIOSIDADE HEMISFÉRICA TOTAL**, J , (W/m^2): é a taxa na qual a radiação é emitida por unidade de área em todos os comprimentos de onda possíveis e em todas as direções possíveis.

$$J = \int_0^\infty J_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e+r}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi d\lambda$$

- Usualmente o termo **HEMISFÉRICO** é omitido e fala-se em **RADIOSIDADE ESPECTRAL** $J_\lambda(\lambda)$ e **RADIOSIDADE TOTAL** J .
- Embora a distribuição direcional da radiosidade de uma superfície **varie de acordo com a superfície**, existe um caso especial que fornece uma aproximação razoável para muitas superfícies.

- Esse caso é o **emissor difuso** e **refletor difuso**, onde a intensidade da radiação emitida é independente da direção, ou seja:

$$I_{\lambda,e+r}(\lambda, \theta, \phi) = I_{\lambda,e+r}(\lambda)$$

- Da definição da **RADIOSIDADE ESPECTRAL** $J_{\lambda}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} J_{\lambda}(\lambda) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e+r}(\lambda) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi = I_{\lambda,e+r}(\lambda) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \underbrace{\sin \theta}_{=u} d\theta d\phi \\ &= I_{\lambda,e+r}(\lambda) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} u du d\phi = I_{\lambda,e+r}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left(\frac{u^2}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi = I_{\lambda,e+r}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi \\ &= I_{\lambda,e+r}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)}{2} \right]_0^{\pi/2} d\phi = I_{\lambda,e+r}(\lambda) \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \right) d\phi = \left(\frac{1}{2} \right) I_{\lambda,e+r}(\lambda) \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) I_{\lambda,e+r}(\lambda) \Rightarrow J_{\lambda}(\lambda) = \pi I_{\lambda,e+r}(\lambda) \end{aligned}$$

- Da definição da **RADIOSIDADE TOTAL** J :

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda, e+r}(\lambda) \cos \theta \cdot \underbrace{\sin \theta}_{=u} d\theta d\phi d\lambda \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda, e+r}(\lambda) u du d\phi d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda, e+r}(\lambda) \left(\frac{u^2}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda, e+r}(\lambda) \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_0^{\pi/2} d\phi d\lambda \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda, e+r}(\lambda) \left[\frac{\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)}{2} \right]_0^{\pi/2} d\phi d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_{\lambda, e+r}(\lambda) \left(\frac{1}{2} \right) d\phi d\lambda \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^\infty I_{\lambda, e+r}(\lambda) \int_0^{2\pi} d\phi d\lambda = 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^\infty I_{\lambda, e+r}(\lambda) d\lambda \Rightarrow J = \pi I_{e+r}
 \end{aligned}$$

- I_{e+r} é a intensidade total da radiação emitida e o ângulo π tem unidade esterorradianos.

12.3.6-RELAÇÃO COM O FLUXO RADIANTE LÍQUIDO PARA SUPERFÍCIE OPACA

- O **FLUXO RADIANTE LÍQUIDO**, q_{rad}'' (W/m²), é a diferença entre as radiações saindo e as radiações entrando na superfície: $q_{rad}'' = J - G$

- Utilizando as definições anteriores de J e G obtém-se:

$$q_{rad}'' = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e+r}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi d\lambda$$

$$- \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi d\lambda$$