CONDUÇÃO TÉRMICA (PEM 00135)

PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

CAPÍTULO 6 – CONDUÇÃO TRANSIENTE

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

santiago@feb.unesp.br

- Em condução transiente a temperatura em qualquer posição em uma região varia com o tempo.

- Essa é uma condição comum que é encontrada em diversas aplicações de engenharia térmica.

- Nesse capítulo será apresentado primeiramente um modelo simplificado para resolver certos problemas transientes na qual a variação espacial de temperaturas é desprezível.

- Após isso será analisado o problema de condução transiente e unidimensional nas geometrias plana, cilíndrica e esférica.

- Um problema transiente bidimensional também será apresentado.

- Finalmente, será mostrado o método da similaridade e o método integral, amplamente utilizados para analisar problemas transientes em regiões semi-infinitas.

1-MÉTODO SIMPLIFICADO: MÉTODO DA CAPACIDADE CONCENTRADA

-Na aproximação mais simples para resolver problemas transientes, a variação espacial de temperaturas é desprezada e é assumido que a temperatura varia somente com o tempo, ou seja:

$$T = T(t)$$

-Essa idealização nem sempre é justificada mas pode ser aceita sob certas condições discutidas na próxima seção.

2-CRITÉRIO PARA SE DESPREZAR A VARIAÇÃO ESPACIAL DE TEMPERATURAS

-Considere um fio de cobre fino que é aquecido em um forno e então removido do forno de tal forma que seja resfriado por convecção.

-Calor é conduzido através do interior do fio e então removido por convecção a partir da superfície do fio.

-Assim, existe uma queda de temperaturas ΔT através do raio do fio.

-É essa queda de temperaturas que é desprezada no método da capacidade concentrada.

-Fatores que influenciam essa queda são: (1) o raio do fio r_o, (2) a condutividade térmica do fio k e (3) o coeficiente de transferência de calor h.

-Espera-se que ΔT seja baixo para pequenos raios e baixo para altas condutividades térmicas.

-O comportamento do h não é tão óbvio. Um coeficiente de transferência de calor baixo pode ser comparado com uma camada isolante restringindo o calor que deixa o fio e assim forçando um gradiente de temperaturas mais uniforme no interior do fio.

-A forma como esses fatores se combinam para formar um parâmetro que fornece uma medida da queda de temperaturas pode ser estabelecida por análise dimensional da equação governante do problema e suas condições de contorno. Esse parâmetro é chamado de número de Biot, que é definido como:

$$Bi = \frac{h\delta}{k}$$

-δ é a escala de comprimento que é igual a distância através da qual a queda de temperaturas ΔT é desprezada. Nesse exemplo, $\delta = r_o$.

-Baseando-se nessa observação, pode-se concluir que quanto menor o número de Biot, menor é o valor de ΔT. A próxima questão é: quão baixo deve ser o número de Biot para que a queda de temperaturas ΔT seja desprezível?

-A resposta é obtida comparando-se soluções transientes aproximadas na qual a variação espacial de temperaturas foi desprezada com soluções exatas onde a variação espacial de temperaturas não foi desprezada.

-Resultados indicam que para $Bi \leq 0{,}1$ a queda de temperaturas ΔT é menor do que 5% da diferença de temperaturas entre o centro e a temperatura do fluido ambiente. Assim, o critério para desprezar a variação espacial de temperaturas e a justificativa para se utilizar o método da capacidade concentrada é:

$$Bi = \frac{h\delta}{k} \leq 0{,}1$$

-Deve-se ter cuidado para identificar a escala de comprimento δ.

-Para um cilindro longo, $\delta = r_o$.

Para uma placa longa com espessura L que é aquecida ou resfriada em ambos os lados, simetria sugere que $\delta = L/2$.

-Entretanto, para uma placa que está isolada em um dos seus lados, $\delta = L$.

-Para um corpo com formato irregular, ou para um corpo na qual calor é transferido a partir de mais de uma superfície, uma definição razoável para a escala de comprimento do número de Biot é determinada dividindo o volume do objeto, V, pela sua área superficial, A_s. Tem-se então que:

$$\delta = \frac{V}{A_s}$$

-O significado do número de Biot também pode ser reescrito na seguinte forma:

$$Bi = \frac{\delta / k}{1 / h}$$

-Essa expressão indica que o número de Biot é a relação entre a resistência térmica de condução (interna) e a resistência térmica de condução (externa). Assim, um baixo número de Biot implica uma baixa resistência térmica interna comparada com a resistência térmica externa.

3-ANÁLISE GERAL DA CAPACIDADE CONCENTRADA

-Embora a condução transiente em um sólido seja normalmente iniciada pela transferência de calor por convecção para ou de um fluido adjacente, outros processos podem induzir condições térmicas transientes no interior do sólido.

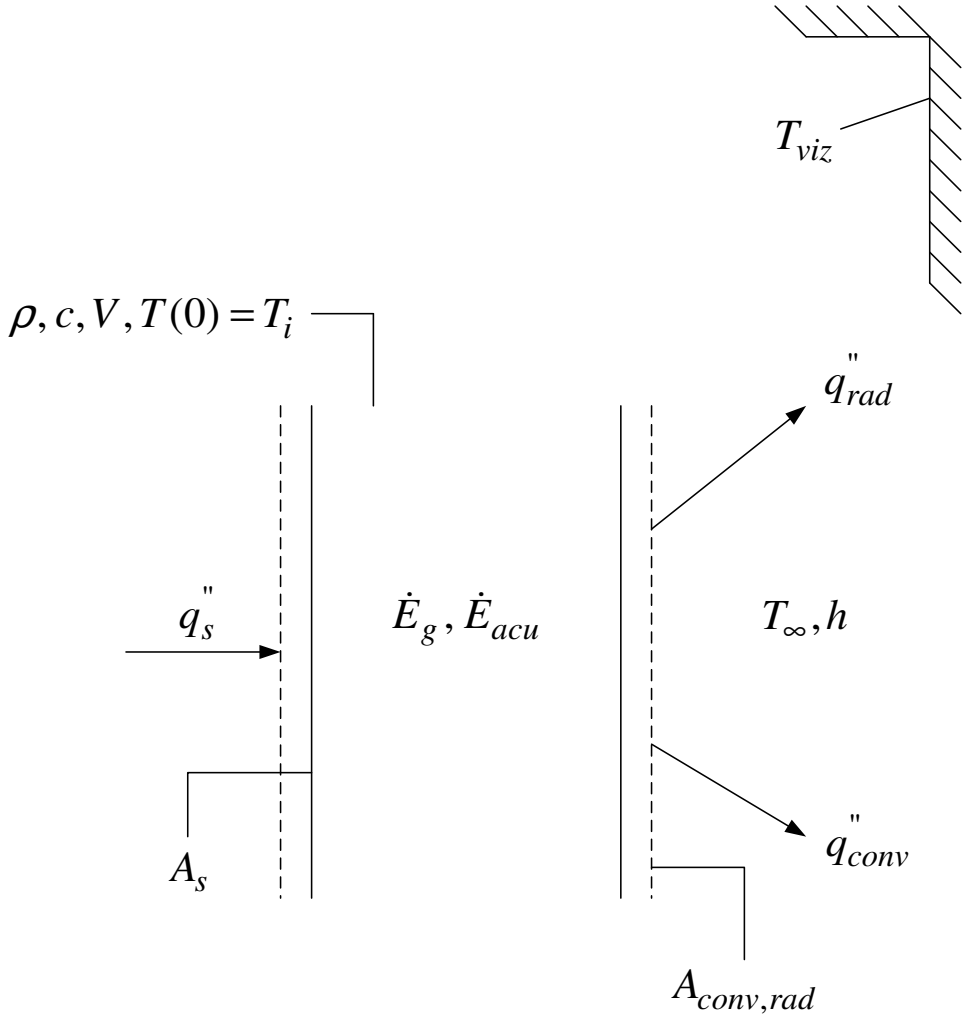
-Por exemplo, um sólido pode estar separado de uma grande vizinhança por um gás ou pelo vácuo. Se as temperaturas do sólido e da vizinhança forem diferentes, a troca de calor por radiação poderia causar uma variação na energia térmica interna do sólido e, assim, na sua temperatura.

-Mudanças na temperatura do sólido também poderiam ser induzidas pela aplicação de um fluxo térmico sobre a sua superfície ou parte dela, e/ou pelo início de um processo de geração de energia térmica no seu interior.

-O aquecimento da superfície poderia, por exemplo, ser efetuado através da fixação de um aquecedor elétrico delgado sobre ela, enquanto a energia térmica poderia ser gerada pela passagem de uma corrente elétrica através do sólido.

-A figura abaixo mostra uma situação na qual as condições térmicas no interior de um sólido podem ser influenciadas simultaneamente pela convecção, pela radiação, pela aplicação de um fluxo em sua superfície e pela geração interna de energia.

-Considera-se que, no instante inicial $(t = 0)$, a temperatura do sólido (T_i) é diferente daquelas do fluido, T_∞, e da vizinhança, T_{viz}, e que tanto o aquecimento superficial quanto o aquecimento volumétrico $(q''_s \text{ e } \dot{q})$ são acionados.



Volume de controle para análise geral via capacidade concentrada.

-O fluxo térmico imposto q_s'' e as transferências de calor por convecção e radiação ocorrem em regiões da superfície exclusivas, A_s, A_{conv} e A_{rad}.

-As transferências por convecção e radiação são presumidas saindo da superfície.

-As áreas de convecção e radiação podem ser diferentes $(A_{conv} \neq A_{rad})$.

-Aplicando a conservação da energia em qualquer instante *t* obtém-se:

$$q_s'' A_s + \dot{E}_g - (q_{conv}'' + q_{rad}'') A_{conv,rad} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

-Utilizando as equações das taxas de convecção e radiação obtém-se:

$$q_s'' A_s + \dot{E}_g - [h(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{viz}^4)] A_{conv,rad} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

-Esse é uma E.D.O. não-linear de primeira ordem, não-homogênea, que não pode ser integrada para obter-se uma solução exata. Contudo, soluções exatas podem ser obtidas para versões simplificadas dessa equação.

4-RESFRIAMENTO CONVECTIVO COM *h* CONSTANTE

$$\underbrace{q_s''A_s}_{=0} + \underbrace{\dot{E}_g}_{=0} - [h(T-T_\infty) + \underbrace{\varepsilon\sigma(T^4 - T_{viz}^4)}_{=0}]A_{conv,rad} = \rho Vc\frac{dT}{dt} \Rightarrow -h(T-T_\infty)A_{conv} = \rho Vc\frac{dT}{dt}$$

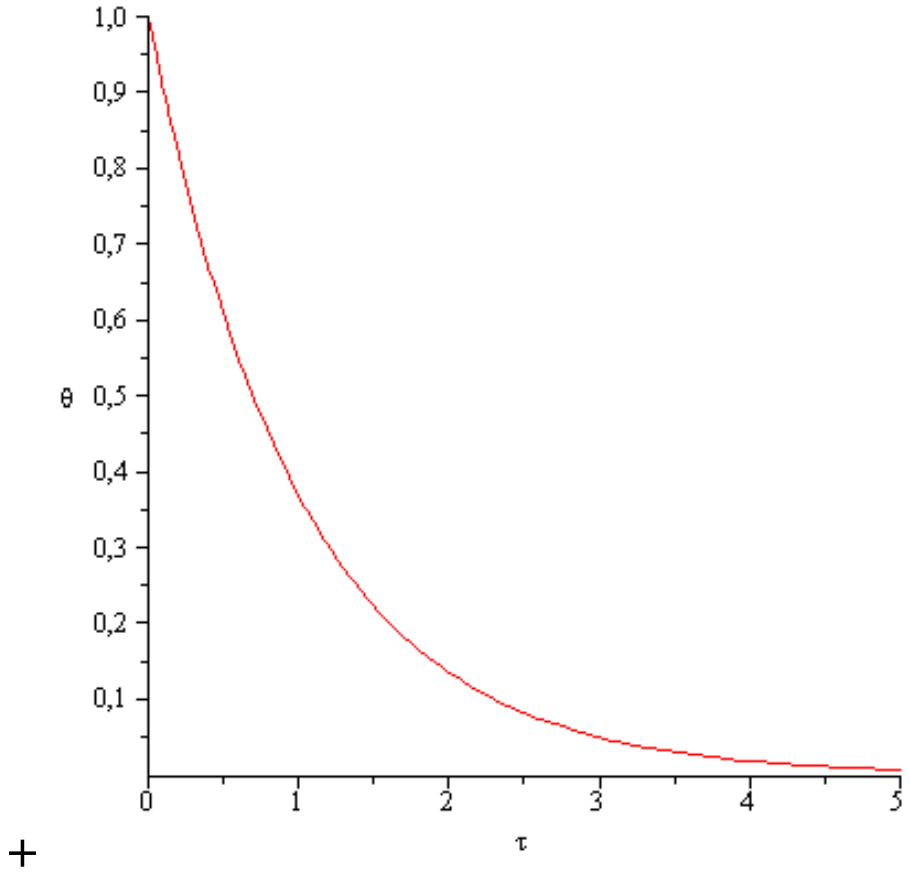
$$\theta = \frac{T-T_\infty}{T_i - T_\infty} \qquad \tau = \frac{hA_{conv}}{\rho Vc}t$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \theta = 0$$

-Separando variáveis e integrando de $\theta = 1 \ (T = T_i)$ em $\tau = 0 \ (t = 0)$ até θ em τ obtém-se:

$$\frac{d\theta}{\theta} = -d\tau \Rightarrow \int_1^\theta \frac{d\theta}{\theta} = -\int_0^\tau d\tau \Rightarrow \theta(\tau) = e^{-\tau}$$

-O resultado anterior indica que com o aumento de τ, θ tende a zero, ou seja, $T \to T_\infty$:



+

Variação de θ em função de τ.

-Pode ser calculada a quantidade de energia transferida do sólido para o meio desde o instante inicial até um instante *t* através da integração da taxa de calor por convecção ao longo do intervalo de tempo, ou seja:

$$Q = \int_0^t hA_{conv}(T - T_\infty)dt$$

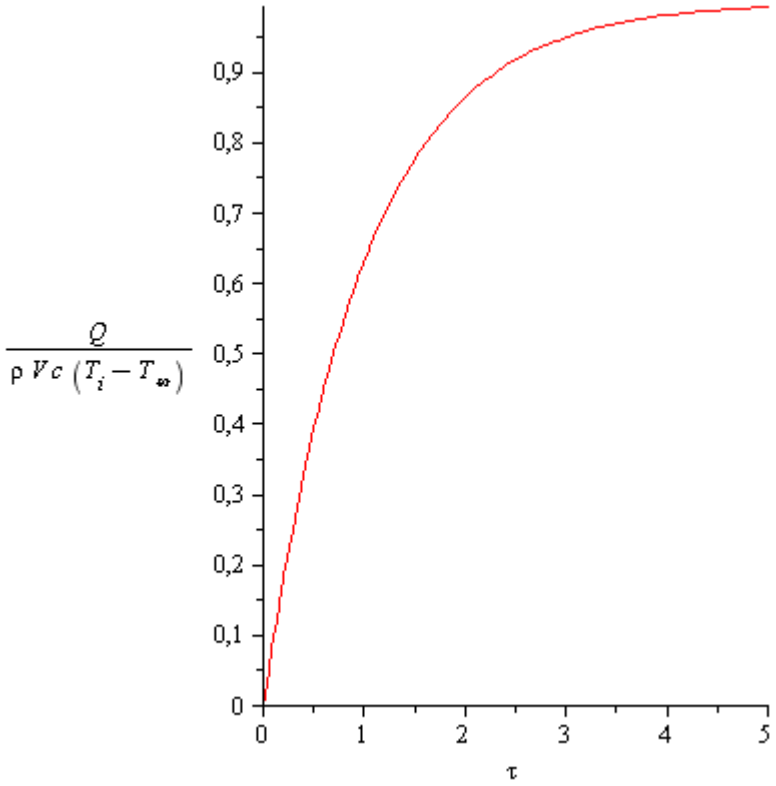
-Utilizando os adimensionais obtém-se:

$$\frac{Q}{\rho Vc(T_i - T_\infty)} = \int_0^\tau \theta d\tau$$

-Substituindo $\theta(\tau) = e^{-\tau}$ e resolvendo a integral obtém-se:

$$\frac{Q}{\rho Vc(T_i - T_\infty)} = -e^{\tau} + 1$$

-O resultado anterior indica que com o aumento de τ, $\dfrac{Q}{\rho Vc(T_i - T_\infty)} \to 1$



Variação de $\dfrac{Q}{\rho Vc(T_i - T_\infty)}$ em função de τ.

5-RESFRIAMENTO CONVECTIVO COM *h* VARIÁVEL

-Em alguns casos, tais como aqueles envolvendo convecção natural e ebulição, o coeficiente de transferência de calor *h* varia com a diferença de temperaturas entre o objeto e o fluido na seguinte forma:

$$h = C(T - T_\infty)^n$$

-*n* é uma constante e *C* tem unidades de $W/(m^2.K^{(1+n)})$.

-Por exemplo, para ar em contato com uma superfície vertical, $C = 0{,}59$ e $n = 1/4$ para convecção natural laminar e $C = 0{,}10$ e $n = 1/3$ para convecção natural turbulenta.

$$\underbrace{q_s'' A_s}_{=0} + \underbrace{\dot{E}_g}_{=0} - [h(T - T_\infty) + \underbrace{\varepsilon\sigma(T^4 - T_{viz}^4)}_{=0}]A_{conv,rad} = \rho Vc\frac{dT}{dt} \Rightarrow -CA_{conv}(T - T_\infty)^{n+1} = \rho Vc\frac{dT}{dt}$$

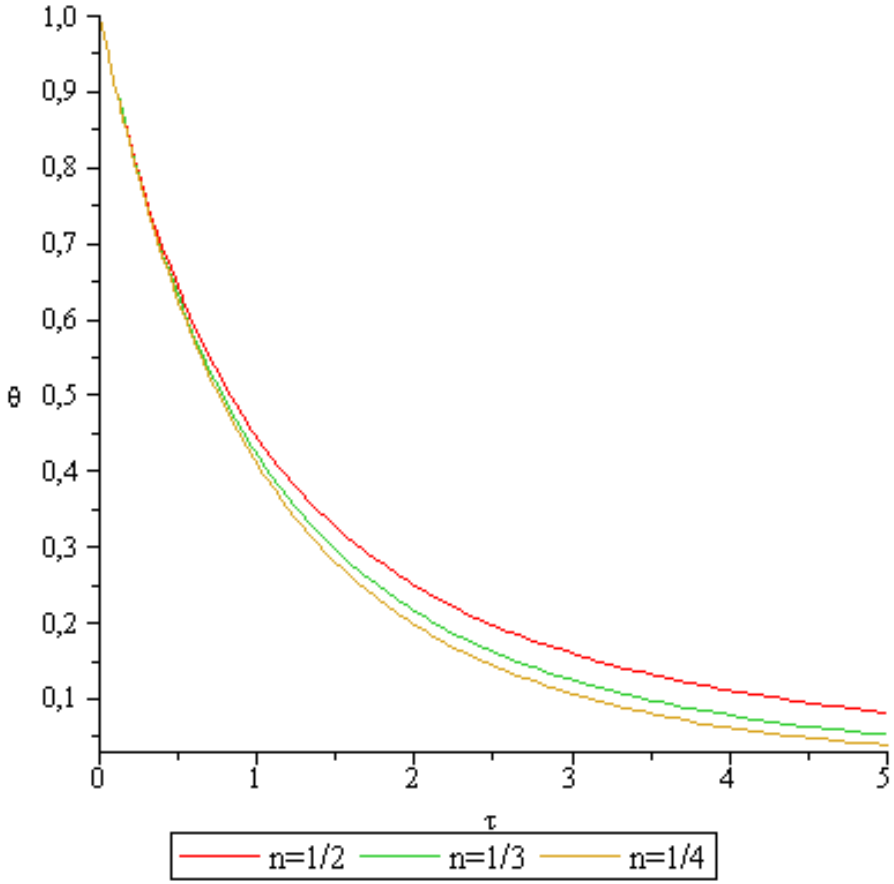
$$\tau = \frac{h_i A_{conv}}{\rho Vc}t \qquad h_i = C(T_i - T_\infty)^n \qquad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \theta^{n+1} = 0$$

- Separando as variáveis e integrando de $\theta = 1\ (T = T_i)$ em $\tau = 0\ (t = 0)$ até θ em τ obtém-se:

$$\theta(\tau) = (1 + \tau n)^{-1/n}$$

-O resultado anterior indica que com o aumento de τ, θ tende a zero, ou seja, $T \to T_\infty$.



Variação de θ em função de τ para diferentes valores de n.

6-RESFRIAMENTO CONVECTIVO COM *c* VARIÁVEL

-Em diversos casos, pode-se utilizar uma expressão analítica linear para a variação do calor específico com a temperatura, ou seja:

$$c = c_\infty [1 + \beta (T - T_\infty)]$$

- c_∞ é o calor específico avaliado em T_∞ e β é um coeficiente que representa a inclinação da reta no gráfico calor específico-temperatura dividido por c_∞.

$$\underbrace{q''_s A_s}_{=0} + \underbrace{\dot{E}_g}_{=0} - [h(T - T_\infty) + \underbrace{\varepsilon\sigma(T^4 - T_{viz}^4)}_{=0}]A_{conv,rad} = \rho V c \frac{dT}{dt} \Rightarrow$$

$$-hA_{conv}(T - T_\infty) = \rho V c_\infty [1 + \beta (T - T_\infty)] \frac{dT}{dt}$$

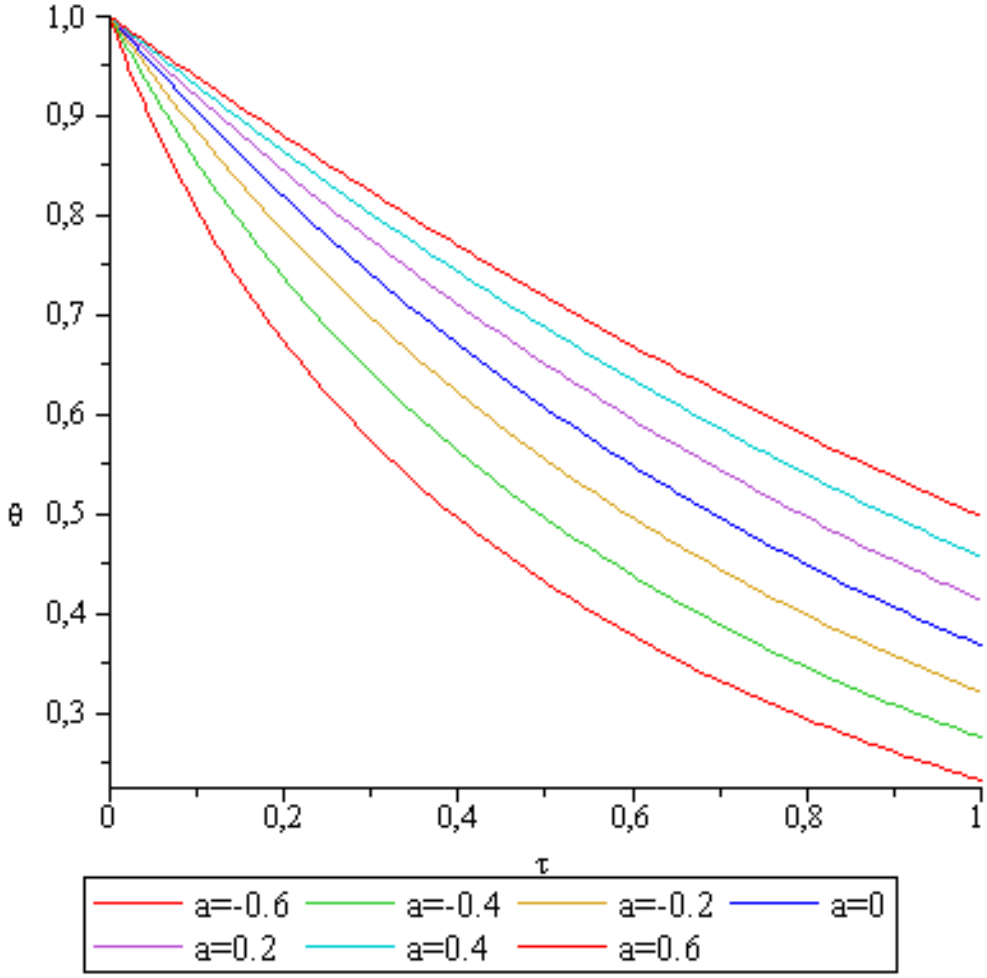
$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \qquad \tau = \frac{hA_{conv}}{\rho V c_\infty} t \qquad a = \beta(T_i - T_\infty)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\theta}{1 + a\theta} = 0$$

-Separando as variáveis e integrando de $\theta = 1 \ (T = T_i)$ em $\tau = 0 \ (t = 0)$ até θ em τ obtém-se a seguinte expressão na forma implícita:

$$-\ln\theta + a(\theta - 1) = \tau$$

-Esse resultado indica que quando θ tende a um, τ tende ao infinito, como era de se esperar.



Variação de θ em função de τ para diferentes valores de a.

7-RESFRIAMENTO RADIATIVO

$$\underbrace{q_s'' A_s}_{=0} + \underbrace{\dot{E}_g}_{=0} - [\underbrace{h(T - T_\infty)}_{=0} + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{viz}^4)]A_{conv,rad} = \rho V c \frac{dT}{dt} \Rightarrow$$

$$-\varepsilon\sigma(T^4 - T_{viz}^4)A_{rad} = \rho V c \frac{dT}{dt} \qquad \theta = \frac{T}{T_{viz}} \qquad \tau = \frac{\varepsilon\sigma A_{rad} T_{viz}^3}{\rho V c} t$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \theta^4 - 1 = 0$$

-Separando as variáveis e integrando de uma temperatura inicial $\theta_i = T_i / T_{viz}$ em $\tau = 0 \ (t = 0)$ até θ em τ, obtém-se:

$$\int_0^\tau d\tau = \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{1 - \theta^4} \qquad \tau = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{\theta + 1}{\theta - 1}\right| - \ln\left|\frac{\theta_i + 1}{\theta_i - 1}\right| + 2(\tan^{-1}\theta - \tan^{-1}\theta_i) \right]$$

-Deve ser notado que não é possível explicitar θ em função de τ..

8-SEM RADIAÇÃO E CONVECÇÃO COM *h* CONSTANTE

$$q_s'' A_s + \dot{E}_g - [h(T - T_\infty) + \underbrace{\varepsilon\sigma(T^4 - T_{viz}^4)}_{=0}] A_{conv,rad} = \rho V c \frac{dT}{dt} \Rightarrow$$

$$q_s'' A_s + \dot{E}_g - h(T - T_\infty) A_{conv} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \qquad a = \frac{q_s'' A_s + \dot{E}_g}{h A_{conv} (T_i - T_\infty)} \qquad \frac{d\theta}{d\tau} + \theta = a$$

-Embora a última equação possa ser resolvida pela soma das suas soluções homogênea e particular, uma abordagem alternativa é eliminar a não-homogeneidade pela introdução da transformação:

$$\theta' = \theta - a$$

$$\frac{d\theta'}{d\tau} + \theta' = 0$$

-Separando as variáveis e integrando de uma temperatura inicial θ_i' em $\tau = 0 \ \ (t = 0)$ até θ' em τ, obtém-se:

$$\frac{\theta'}{\theta_i'} = \exp(-\tau) \qquad \frac{\theta - a}{\theta_i - a} = \exp(-\tau)$$

-A última equação também se aplica aos casos onde $q_s'' = 0,$ $\dot{E}_g = 0$ ou $q_s'' = \dot{E}_g = 0.$

Nesse último caso, $a = 0,$ donde se obtém $\frac{\theta}{\theta_i} = \exp(-\tau).$

EXEMPLO 1 – CONDUÇÃO TRANSIENTE EM UMA MOEDA DESLIZANTE

Uma moeda com raio r_o e espessura δ está em repouso em um plano inclinado e em equilíbrio térmico com o ambiente à T_∞ e coeficiente de transferência de calor h. A moeda é colocada em movimento e começa a deslizar pelo plano. A força de atrito F_f é assumida constante e a velocidade da moeda varia com o tempo de acordo com a expressão $V = ct$, onde c é uma constante. Devido às variações de velocidade, o coeficiente de transferência de calor por convecção varia com o tempo de acordo com a expressão $h = \beta t$, onde β é uma constante. Assumindo que o número de Biot é baixo comparado com a unidade e desprezando a perda de calor para o plano, determine a distribuição de temperaturas transiente na moeda.

-Aplicando um balanço de energia na moeda obtém-se:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s = \dot{E}_{acu}$$

-A taxa de energia adicionada devido ao efeito do atrito pode ser calculada como:

$$\dot{E}_e = F_f V = F_f ct$$

-A taxa de energia que deixa a moeda por convecção pode ser calculada como:

$$\dot{E}_s = (\pi r_o^2 + 2\pi r_o \delta) h (T - T_\infty) = \beta (\pi r_o^2 + 2\pi r_o \delta)(T - T_\infty) t$$

-A taxa de energia acumulada na moeda pode ser calculada como:

$$\dot{E}_{acu} = \rho (\pi r_o^2 \delta) c_p \frac{dT}{dt}$$

$$F_f ct - \beta (\pi r_o^2 + 2\pi r_o \delta)(T - T_\infty) t = \rho (\pi r_o^2 \delta) c_p \frac{dT}{dt}$$ (BALANÇO DE ENERGIA)

$$T(0) = T_\infty$$ C.I.

-Separando as variáveis e integrando obtém-se:

$$\int_0^t t dt = \rho(\pi r_o^2 \delta) c_p \int_{T_\infty}^{T} \frac{dT}{F_f c - \beta(\pi r_o^2 + 2\pi r_o \delta)(T - T_\infty)}$$

-Realizando a integração e rearranjando o resultado obtém-se:

$$\frac{\dfrac{T(t) - T_\infty}{F_f c}}{\dfrac{}{\beta r_o^2 (1 + 2\delta / r_o)}} = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 - e^{-\left[\frac{\beta(1+2\delta/r_o)}{2\rho c_p \delta} \right] t^2} \right\}$$

-A moeda deve alcançar o regime permanente em $t = \infty$:

$$\frac{\dfrac{T(t=\infty) - T_\infty}{F_f c}}{\dfrac{}{\beta r_o^2 (1 + 2\delta / r_o)}} = \frac{1}{\pi}$$

EXEMPLO 2 – CONDUÇÃO TRANSIENTE DEVIDO À RADIAÇÃO TÉRMICA

Antes de ser injetado no interior de uma fornalha, carvão pulverizado a uma temperatura inicial de 25 ºC é preaquecido com a sua passagem através de um duto cilíndrico cuja superfície é mantida a $T_{viz} = 1000$ ºC. As partículas de carvão ficam suspensas no escoamento do ar e se movem a uma velocidade de 3 m/s. Aproximando as partículas por esferas com 1 mm de diâmetro e supondo que elas sejam aquecidas por transferência radiante com a superfície do duto, qual deve ser o comprimento do duto para que o carvão seja aquecido até 600 ºC? Assuma que o número de Biot é baixo comparado com a unidade. As propriedades do carvão pulverizado são: $\rho = 1350$ kg/m^3, $c_p = 1260$ J/(kg.K), $k = 0{,}26$ W/(m.K) e $\varepsilon = 1$.

$$\tau = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{\theta+1}{\theta-1}\right| - \ln\left|\frac{\theta_i+1}{\theta_i-1}\right| + 2(\tan^{-1}\theta - \tan^{-1}\theta_i) \right]$$

$$\theta = \frac{T}{T_{viz}} = \frac{600+273}{1000+273} = 0{,}686 \qquad \theta_i = \frac{T_i}{T_{viz}} = \frac{25+273}{1000+273} = 0{,}234$$

$$\tau = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{0{,}686+1}{0{,}686-1}\right| - \ln\left|\frac{0{,}234+1}{0{,}234-1}\right| + 2(\tan^{-1}0{,}686 - \tan^{-1}0{,}234) \right] = 0{,}487$$

$$\frac{V}{A_s} = \frac{\pi D^3/6}{\pi D^2} = \frac{D}{6} = \frac{1\times10^{-3}}{6} = 1{,}667\times10^{-4}\ \text{m}$$

$$0{,}487 = \frac{1{,}0.5{,}67\times10^{-8}.1273^3}{1350.1{,}667\times10^{-4}.1260}t \Rightarrow t = 1{,}18\ \text{s}$$

$$L = Vt = 3.1{,}18 = 3{,}54\ \text{m}$$

9-EFEITOS ESPACIAIS

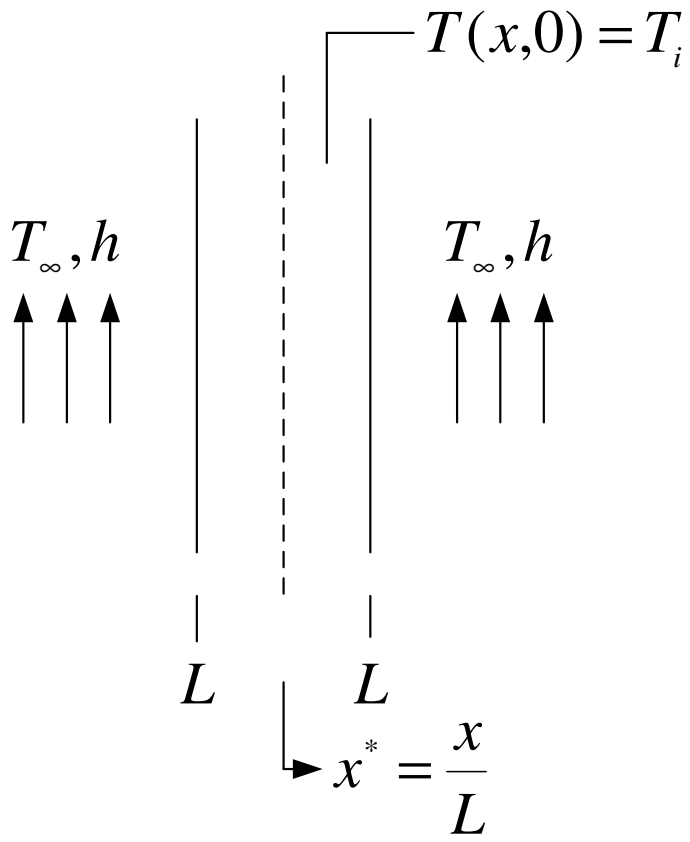
-Com frequência surgem situações nas quais o método da capacidade concentrada é inadequado e abordagens alternativas devem ser utilizadas.

-Independentemente do método a ser considerado, agora devemos reconhecer que os gradientes de temperaturas no interior do meio não são mais desprezíveis.

-Esse tipo de problema é analisado pela equação diferencial parcial de condução, fornecendo a variação da temperatura com o tempo e com as coordenadas espaciais.

-A seguir serão mostradas as soluções dessas equações diferenciais parciais na condição de condução unidimensional transiente, sem geração interna de energia e com condutividade térmica constante.

9.1-A PAREDE PLANA COM CONVECÇÃO



E.D.P. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ (H.)

C.I. $T(x,0) = T_i$ (N.H.)

C.C.1 $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ (H.)

C.C.2 $-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = h[T(L,t) - T_\infty]$ (N.H.)

(FORMULAÇÃO DIMENSIONAL)

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad x^* = \frac{x}{L} \quad \tau^* = \frac{\alpha t}{L^2} = Fo$$ (ADIMENSIONAIS)

(FORMULAÇÃO ADIMENSIONAL)

E.D.P. $$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo}$$ (H.)

C.I: $$\theta^*(x^*,0) = 1$$ (N.H.)

C.C.1: $$\left.\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=0} = 0$$ (H.) C.C.2: $$\left.\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=1} = -Bi\,\theta^*(1,t^*)$$ (H.)

NÚMERO DE BIOT $$Bi = \frac{hL}{k}$$

(x É A DIREÇÃO HOMOGÊNEA)

9.1.1-SOLUÇÃO EXATA

$$\theta^*(x^*, Fo) = X(x^*)\tau(Fo)$$ (SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS)

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial Fo} = \pm\lambda_n^2$$

E.D.O.1: $\frac{d^2 X_n}{dx^{*2}} + \lambda_n^2 X_n = 0$ $X_n(x^*) = A_n \sin(\lambda_n x^*) + B_n \cos(\lambda_n x^*)$

E.D.O.2: $\frac{d\tau_n}{dFo} + \lambda_n^2 \tau_n = 0$ $\tau_n(Fo) = D_n \exp(-\lambda_n^2 Fo)$

(SOLUÇÃO GERAL)

$$\theta^*(x^*, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x^*)\tau_n(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \sin(\lambda_n x^*) + B_n \cos(\lambda_n x^*)][D_n \exp(-\lambda_n^2 Fo)]$$

C.C.1:

$$\left.\frac{\partial \theta_n^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=0} = \left.\frac{\partial [X_n(x^*)\tau_n(Fo)]}{\partial x^*}\right|_{x^*=0} = \tau_n(Fo)\left.\frac{\partial [X_n(x^*)]}{\partial x^*}\right|_{x^*=0} =$$

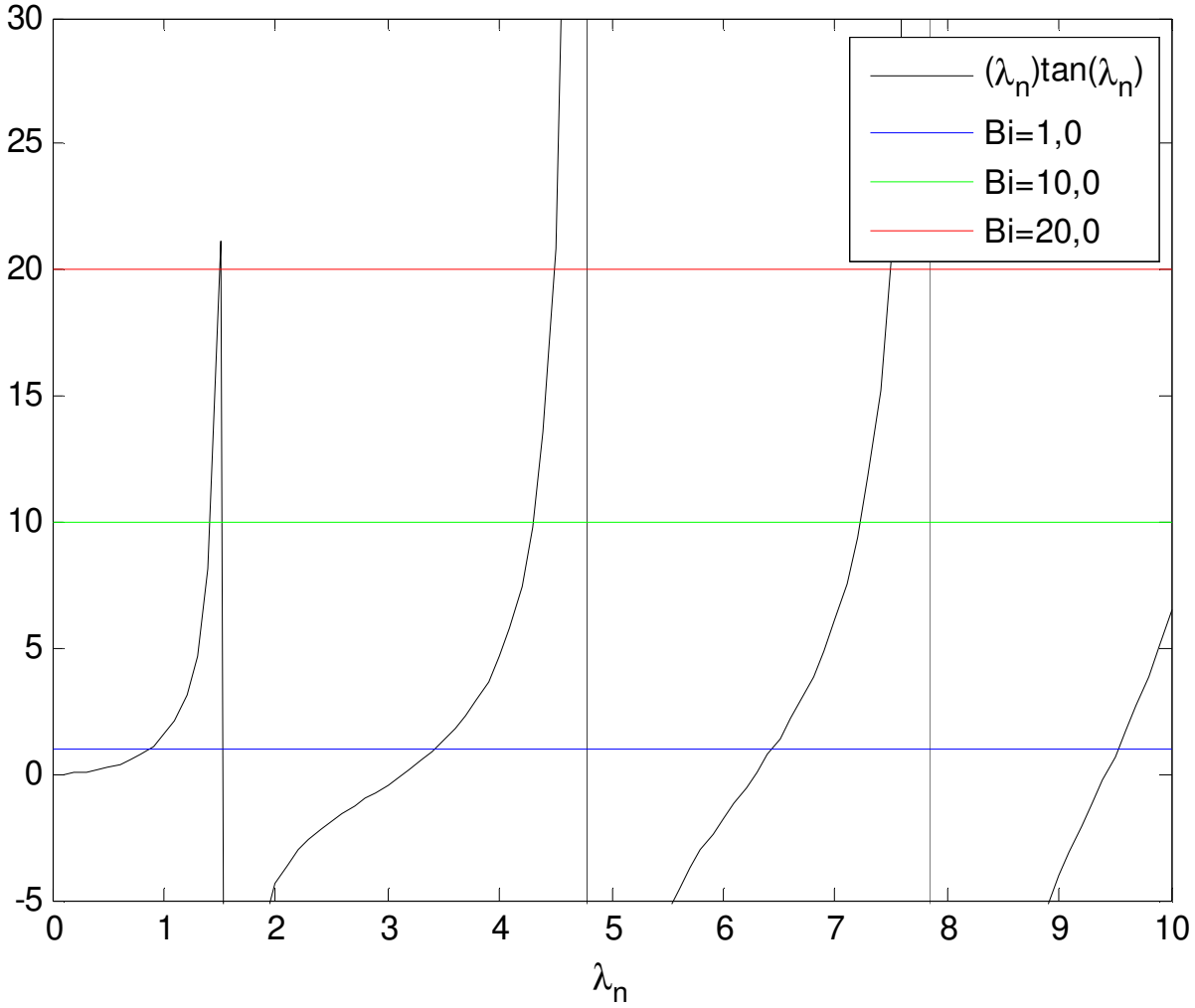
$$\underbrace{\tau_n(Fo)}_{\neq 0}\underbrace{\lambda_n}_{\neq 0}[A_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} - B_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0}] = 0 \Rightarrow A_n = 0$$

C.C.2:

$$\left.\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=1} = \left.\frac{\partial [X_n(1)\tau_n(Fo)]}{\partial x^*}\right|_{x^*=1} = \tau_n(Fo)\left.\frac{\partial [X_n(1)]}{\partial x^*}\right|_{x^*=1} = -\tau_n(Fo)\lambda_n B_n \sin(\lambda_n 1) =$$

$$-Bi\theta^*(1,t^*) = -Bi\tau_n(Fo)B_n \cos(\lambda_n 1)$$

$$\lambda_n \tan(\lambda_n) = Bi$$ (EQUAÇÃO TRANSCENDENTAL PARA λ_n)



Representação gráfica de $\lambda_n \tan(\lambda_n) = Bi$ para diferentes números de Biot.

Quatro primeiras raízes de $\lambda_n \tan(\lambda_n) = Bi$

$Bi = hL/k$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4248
0,01	0,0998	3,1447	6,2847	9,4258
0,1	0,3110	3,1730	6,2990	9,4353
1,0	0,8603	3,4256	6,4372	9,5293
10,0	1,4288	4,3058	7,2281	10,2002
100,0	1,5552	4,6657	7,7763	10,8871

$$\theta^*(x^*, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n x^*) \exp(-\lambda_n^2 Fo) \qquad C_n = B_n D_n$$

C.I.:

$$\theta^*(x^*,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n x^*) \exp(-\lambda_n^2 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n x^*) = 1$$

ORTOGONALIDADE: $w(x^*) = 1$

$$\int_0^1 \cos(\lambda_m x^*) w(x^*) dx^* = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n x^*) \cos(\lambda_m x^*) w(x^*) dx^*$$

$$\int_0^1 \cos(\lambda_m x^*) dx^* = C_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \cos(\lambda_n x^*) \cos(\lambda_m x^*) dx^*$$

$$C_n = \frac{\int_0^1 \cos(\lambda_n x^*) dx^*}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n x^*) dx^*} \qquad C_n = \frac{4\sin(\lambda_n)}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)}$$

9.1.2-SOLUÇÃO APROXIMADA

-Para $Fo < 0{,}2,$ a solução em série pode ser aproximada pelo primeiro termo da série.

-Utilizando essa aproximação e definindo $\theta_o^* = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo),$ a forma adimensional da distribuição de temperaturas é reescrita como:

$$\theta^*(x^*, Fo) = C_1 \cos(\lambda_1 x^*) \exp(-\lambda_1^2 Fo) = \theta_o^* \cos(\lambda_1 x^*)$$

$$\lambda_1 \tan(\lambda_1) = Bi \qquad C_1 = \frac{4\sin(\lambda_1)}{2\lambda_1 + \sin(2\lambda_1)}$$

- Em termos das variáveis originais: $T(x,t) = T_\infty + (T_i - T_\infty) C_1 \cos\left(\lambda_1 \frac{x}{L}\right) \exp\left(-\lambda_1^2 \frac{\alpha t}{L^2}\right)$

9.1.3-TRANSFERÊNCIA TOTAL DE ENERGIA

-Em diversas situações de engenharia, é útil saber a energia total que deixou (ou entrou) a parede até um dado tempo t em um processo transiente.

-A exigência da conservação da energia na forma diferencial pode ser aplicada no intervalo de tempo delimitado pela condição inicial $(t = 0)$ e por qualquer tempo $t > 0$:

$$\underbrace{dE_e}_{=0} - dE_s + \underbrace{dE_g}_{=0} = d(\Delta E_{acu}) \qquad -dE_s = d(\Delta E_{acu})$$

-Igualando a quantidade de energia transferida a partir da parede como sendo $\delta Q = dE_s$ e estabelecendo que $d(\Delta E_{acu}) = dE(x,t) - dE(x,0)$ obtém-se:

$$\delta Q = -[dE(x,t) - dE(x,0)]$$

-Desprezando variações de energia cinética e potencial, a variação da energia total da parede pode ser reescrita em termos da variação da energia interna específica da parede:

$$dE(x,t) - dE(x,0) = dU(x,t) - dU(x,0) = (dm)[u(x,t) - u(x,0)]$$

-Além disso, como a parede plana é um meio incompressível, a variação de energia interna específica é igual ao produto entre o calor específico do material da parede plana (considerado constante) e a variação de temperatura, ou seja:

$$dE(x,t) - dE(x,0) = (dm)c[T(x,t) - T(x,0)]$$

-Finalmente, sabendo que $dm = \rho dV$ e que $T(x,0) = T_i$, obtém-se:

$$\delta Q = -\rho c[T(x,t) - T_i]dV$$

-A quantidade total de energia transferida é obtida pela integração da equação anterior ao longo do volume da parede plana, ou seja:

$$Q = -\int \rho c[T(x,t) - T_i]dV$$

-É conveniente adimensionalizar a equação anterior pela introdução da grandeza:

$$Q_o = \rho c(T_i - T_\infty)V$$

$$\frac{Q}{Q_o} = -\frac{\int \rho c[T(x,t) - T_i]dV}{\rho c(T_i - T_\infty)V} = \frac{1}{V}\int -\left[\frac{T(x,t) - T_i}{T_i - T_\infty}\right]dV$$

-A grandeza Q_o pode ser interpretada como a energia interna inicial da parede com relação à temperatura do fluido. De maneira alternativa Q_o também pode ser interpretada como a máxima transferência de energia que ocorreria entre a parede e o fluido se o processo se estendesse até $t = \infty$.

$$\theta^* = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T(x,t) - T_i + T_i - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T(x,t) - T_i}{T_i - T_\infty} + 1 \Rightarrow -\left[\frac{T(x,t) - T_i}{T_i - T_\infty}\right] = 1 - \theta^*$$

-Substituindo esse resultado e fazendo $V = AL$, $dV = Adx$ e rearranjando obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = \frac{1}{AL}\int (1-\theta^*)Adx = \frac{1}{L}\int (1-\theta^*)dx$$

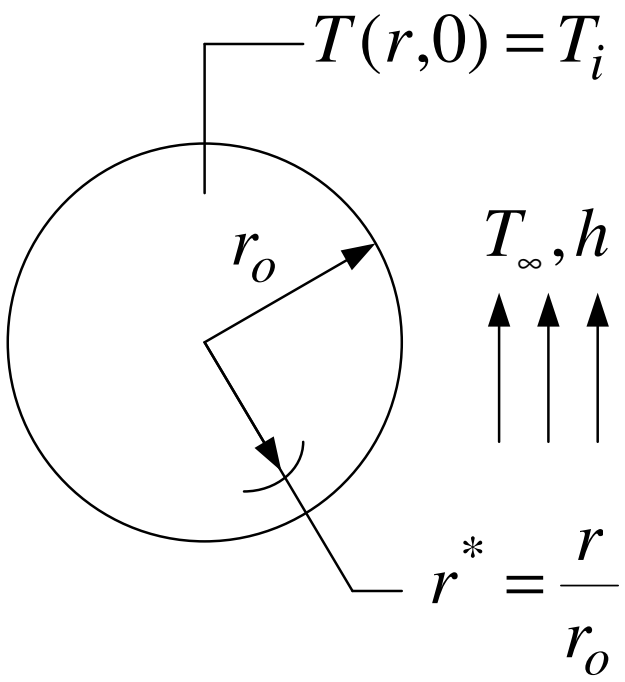
-Sabendo que $\theta^*(x^*, Fo) = \theta_o^* \cos(\lambda_1 x^*)$, $dx = Ldx^*$ e com os limites de integração variando de $x^* = 0$ a $x^* = 1$ obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int_0^1 [1-\theta_o^* \cos(\lambda_1 x^*)]dx^*$$

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}\theta_o^*$$ (QUANTIDADE ADIMENSIONAL DE ENERGIA TRANSFERIDA)

- Em termos das variáveis originais: $$Q(t) = \rho Vc(T_i - T_\infty)\left[1 - \frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1} C_1 \exp\left(-\lambda_1^2 \frac{\alpha t}{L^2}\right)\right]$$

9.2-O CILINDRO LONGO COM CONVECÇÃO



E.D.P. $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ (H.)

C.I. $T(r,0)=T_i$ (N.H.)

C.C.1 $\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0$ (H.)

C.C.2 $-k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_o}=h[T(r_o,t)-T_\infty]$ (N.H.)

(FORMULAÇÃO DIMENSIONAL)

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad r^* = \frac{r}{r_o} \quad \tau^* = \frac{\alpha t}{r_o^2} = Fo$$ (ADIMENSIONAIS)

(FORMULAÇÃO ADIMENSIONAL)

E.D.P. $$\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*}\right) = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo}$$ (H.)

C.I: $\theta^*(r^*,0) = 1$ (N.H.)

C.C.1: $$\left.\frac{\partial \theta^*}{\partial r^*}\right|_{r^*=0} = 0$$ (H.) C.C.2: $$\left.\frac{\partial \theta^*}{\partial r^*}\right|_{r^*=1} = -Bi\,\theta^*(1,t^*)$$ (H.)

NÚMERO DE BIOT $$Bi = \frac{hr_o}{k}$$

(r É A DIREÇÃO HOMOGÊNEA)

9.2.1-SOLUÇÃO EXATA

$$\theta^*(r^*, Fo) = R(r^*)\tau(Fo)$$ (SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS)

$$\frac{1}{Rr^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial R^*}{\partial r^*}\right) = \frac{1}{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial Fo} = \pm\lambda_k^2$$

E.D.O.1: $$r^{*2}\frac{d^2R_k}{dr^{*2}} + r^*\frac{dR_k}{dr^*} + \lambda_k^2 R_k r^{*2} = 0$$ $$R_k(r^*) = A_k J_0(\lambda_k r^*) + B_k Y_0(\lambda_k r^*)$$

E.D.O.2: $$\frac{d\tau_k}{dFo} + \lambda_k^2\tau_k = 0$$ $$\tau_k(Fo) = D_k \exp(-\lambda_k^2 Fo)$$

(SOLUÇÃO GERAL)

$$\theta^*(r^*, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r^*)\tau_k(Fo) = \sum_{k=1}^{\infty}[A_k J_0(\lambda_k r^*) + B_k Y_0(\lambda_k r^*)][D_k \exp(-\lambda_k^2 Fo)]$$

C.C.1:

$$\left.\frac{\partial \theta_k^*}{\partial r^*}\right|_{r^*=0} = \left.\frac{\partial [R_k(r^*)\tau_k(Fo)]}{\partial r^*}\right|_{r^*=0} = \tau_k(Fo)\left.\frac{\partial [R_k(r^*)]}{\partial r^*}\right|_{r^*=0} =$$

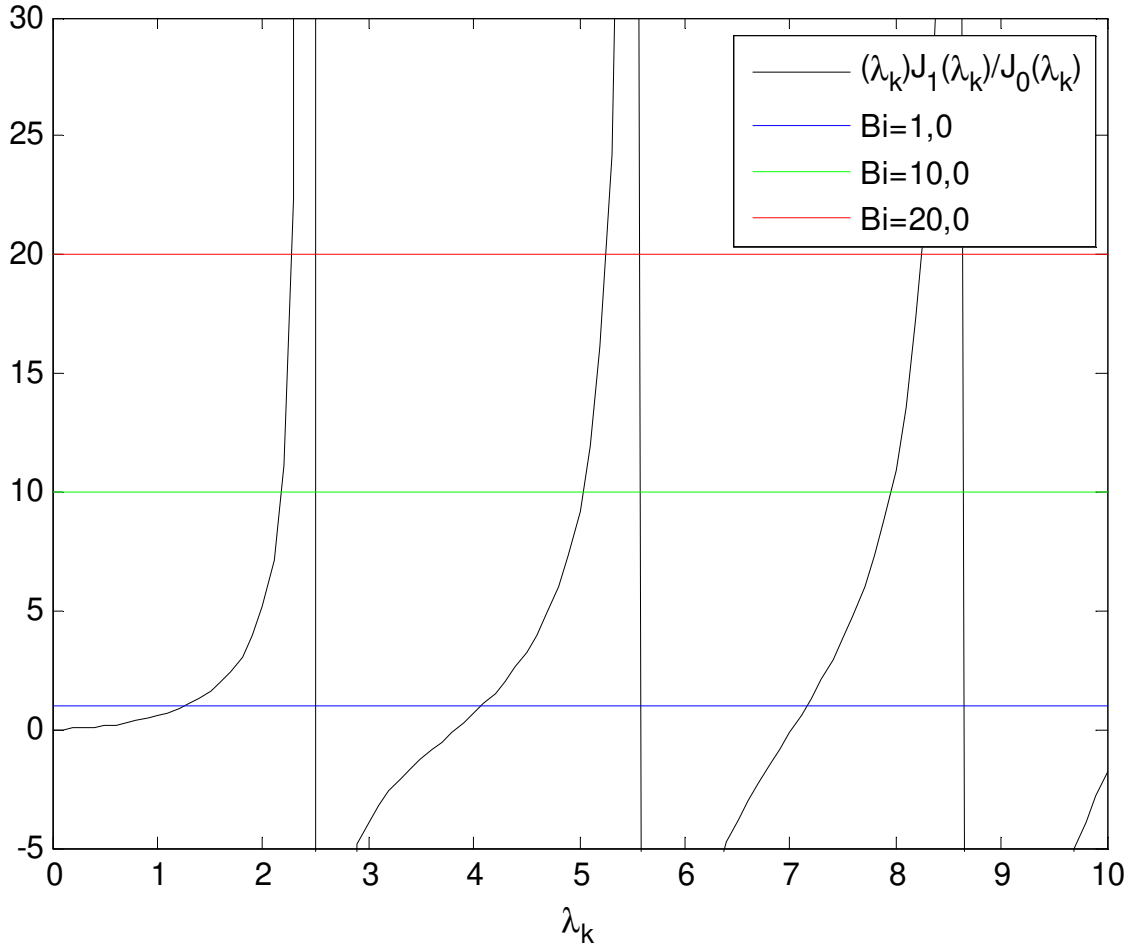
$$\underbrace{\tau_k(Fo)}_{\neq 0}\underbrace{\lambda_k}_{\neq 0}[-A_k\underbrace{J_1(\lambda_k 0)}_{=0} - B_k\underbrace{Y_1(\lambda_k 0)}_{=-\infty}] = 0 \Rightarrow B_k = 0$$

C.C.2:

$$\left.\frac{\partial \theta^*}{\partial r^*}\right|_{r^*=1} = \left.\frac{\partial [R_k(1)\tau_k(Fo)]}{\partial r^*}\right|_{r^*=1} = \tau_k(Fo)\left.\frac{\partial [R_k(1)]}{\partial r^*}\right|_{r^*=1} = -\tau_k(Fo)\lambda_k A_k J_1(\lambda_k 1) =$$

$$-Bi\theta^*(1,t^*) = -Bi\tau_k(Fo)A_k J_0(\lambda_k 1)$$

$$\lambda_k \frac{J_1(\lambda_k)}{J_0(\lambda_k)} = Bi$$ (EQUAÇÃO TRANSCENDENTAL PARA λ_k)



Representação gráfica de $\lambda_k \frac{J_1(\lambda_k)}{J_0(\lambda_k)} = Bi$ para diferentes números de Biot.

Quatro primeiras raízes de $\lambda_k \dfrac{J_1(\lambda_k)}{J_0(\lambda_k)} = Bi$

$Bi = hr_o/k$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0,1	0,4416	3,8577	7,0298	10,1832
1,0	1,2557	4,0794	7,1557	10,2709
2,5	1,7060	4,3818	7,3507	10,4117
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223

$$\theta^*(r^*, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k r^*) \exp(-\lambda_k^2 Fo) \qquad C_k = A_k D_k$$

C.I.:

$$\theta^*(r^*,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k r^*) \exp(-\lambda_k^2 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k r^*) = 1$$

ORTOGONALIDADE: $w(r^*) = r^*$

$$\int_0^1 J_0(\lambda_i r^*) w(r^*) dr^* = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k r^*) J_0(\lambda_i r^*) w(r^*) dr^*$$

$$\int_0^1 r^* J_0(\lambda_i r^*) dr^* = C_k \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 r^* J_0(\lambda_k r^*) J_0(\lambda_i r^*) dr^*$$

$$C_k = \frac{\int_0^1 r^* J_0(\lambda_k r^*) dr^*}{\int_0^1 r^* J_0^2(\lambda_k r^*) dr^*} \qquad C_k = \frac{2}{\lambda_k} \frac{J_1(\lambda_k)}{J_0^2(\lambda_k) + J_1^2(\lambda_k)}$$

9.2.2-SOLUÇÃO APROXIMADA

-Para $Fo < 0{,}2,$ a solução em série pode ser aproximada pelo primeiro termo da série.

-Utilizando essa aproximação e definindo $\theta_o^* = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo),$ a forma adimensional da distribuição de temperaturas é reescrita como:

$$\theta^*(r^*, Fo) = C_1 J_0(\lambda_1 r^*) \exp(-\lambda_1^2 Fo) = \theta_o^* J_0(\lambda_1 r^*)$$

$$\lambda_1 \frac{J_1(\lambda_1)}{J_0(\lambda_1)} = Bi \qquad C_1 = \frac{2}{\lambda_1} \frac{J_1(\lambda_1)}{J_0^2(\lambda_1) + J_1^2(\lambda_1)}$$

- Em termos das variáveis originais: $T(r,t) = T_\infty + (T_i - T_\infty) C_1 J_0\left(\lambda_1 \frac{r}{r_o}\right) \exp\left(-\lambda_1^2 \frac{\alpha t}{r_o^2}\right)$

9.2.3-TRANSFERÊNCIA TOTAL DE ENERGIA

$$\frac{Q}{Q_o} = -\frac{\int \rho c[T(r,t) - T_i]dV}{\rho c(T_i - T_\infty)V} = \frac{1}{V}\int -\left[\frac{T(r,t) - T_i}{T_i - T_\infty}\right]dV$$

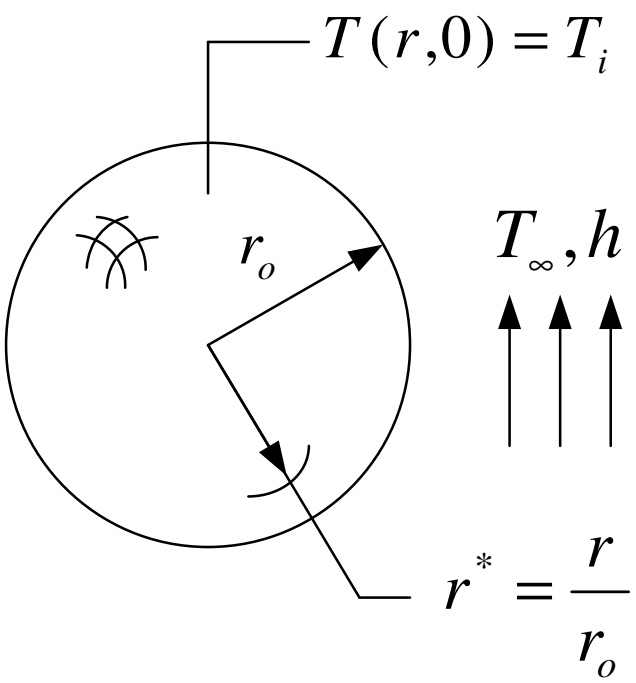
$$-\left[\frac{T(r,t) - T_i}{T_i - T_\infty}\right] = 1 - \theta^* \quad V = \pi r_o^2 L \quad dV = 2\pi r L dr \quad \frac{Q}{Q_o} = \int (1-\theta^*)2\frac{r}{r_o}\frac{dr}{r_o}$$

-Sabendo que $r/r_o = r^*$, $dr/r_o = dr^*$ e que nesse caso os limites de integração são de $r^* = 0$ a $r^* = 1$ obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int_0^1 [2r^* - 2\theta_o^* r^* J_0(\lambda_1 r^*)]dr^* \quad \frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{2\theta_o^*}{\lambda_1} J_1(\lambda_1)$$

- Em termos das variáveis originais: $$Q(t) = \rho V c(T_i - T_\infty)\left[1 - \frac{2}{\lambda_1} C_1 \exp\left(-\lambda_1^2 \frac{\alpha t}{r_o^2}\right) J_1(\lambda_1)\right]$$

9.3-A ESFERA COM CONVECÇÃO



E.D.P. $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ (H.)

C.I. $T(r,0) = T_i$ (N.H.)

C.C.1 $\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$ (H.)

C.C.2 $-k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_o} = h[T(r_o,t) - T_\infty]$ (N.H.)

(FORMULAÇÃO DIMENSIONAL)

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad r^* = \frac{r}{r_o} \quad \tau^* = \frac{\alpha t}{r_o^2} = Fo$$ (ADIMENSIONAIS)

(FORMULAÇÃO ADIMENSIONAL)

E.D.P. $$\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo}$$ (H.)

C.I: $\theta^*(r^*,0) = 1$ (N.H.)

C.C.1: $$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0$$ (H.) C.C.2: $$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = -Bi\,\theta^*(1,t^*)$$ (H.)

NÚMERO DE BIOT $$Bi = \frac{hr_o}{k}$$

(r É A DIREÇÃO HOMOGÊNEA)

9.3.1-SOLUÇÃO EXATA

$$\theta^*(r^*, Fo) = R(r^*)\tau(Fo)$$ (SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS)

$$\frac{1}{Rr^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^{*2}\frac{\partial R^*}{\partial r^*}\right) = \frac{1}{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial Fo} = \pm\lambda_k^2$$

E.D.O.1: $r^{*2}\frac{d^2R_k}{dr^{*2}} + 2r^*\frac{dR_k}{dr^*} + \lambda_k^2 R_k r^{*2} = 0$ $R_k(r^*) = r^{*-1/2}[A_k J_{1/2}(\lambda_k r^*) + B_k J_{-1/2}(\lambda_k r^*)]$

E.D.O.2: $\frac{d\tau_k}{dFo} + \lambda_k^2\tau_k = 0$ $\tau_k(Fo) = D_k \exp(-\lambda_k^2 Fo)$

(SOLUÇÃO GERAL) $J_{1/2}(\lambda_k r^*) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_k}}\frac{\sin(\lambda_k r^*)}{r^{*1/2}}$ $J_{-1/2}(\lambda_k r^*) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_k}}\frac{\cos(\lambda_k r^*)}{r^{*1/2}}$

$$\theta^*(r^*, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r^*)\tau_k(Fo) = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_k}}\frac{1}{r}[A_k \sin(\lambda_k r^*) + B_k \cos(\lambda_k r^*)][D_k \exp(-\lambda_k^2 Fo)]$$

C.C.1: $$\left.\frac{\partial \theta_k^*}{\partial r^*}\right|_{r^*=0} = \left.\frac{\partial [R_k(r^*)\tau_k(Fo)]}{\partial r^*}\right|_{r^*=0} = \tau_k(Fo)\left.\frac{\partial [R_k(r^*)]}{\partial r^*}\right|_{r^*=0} =$$

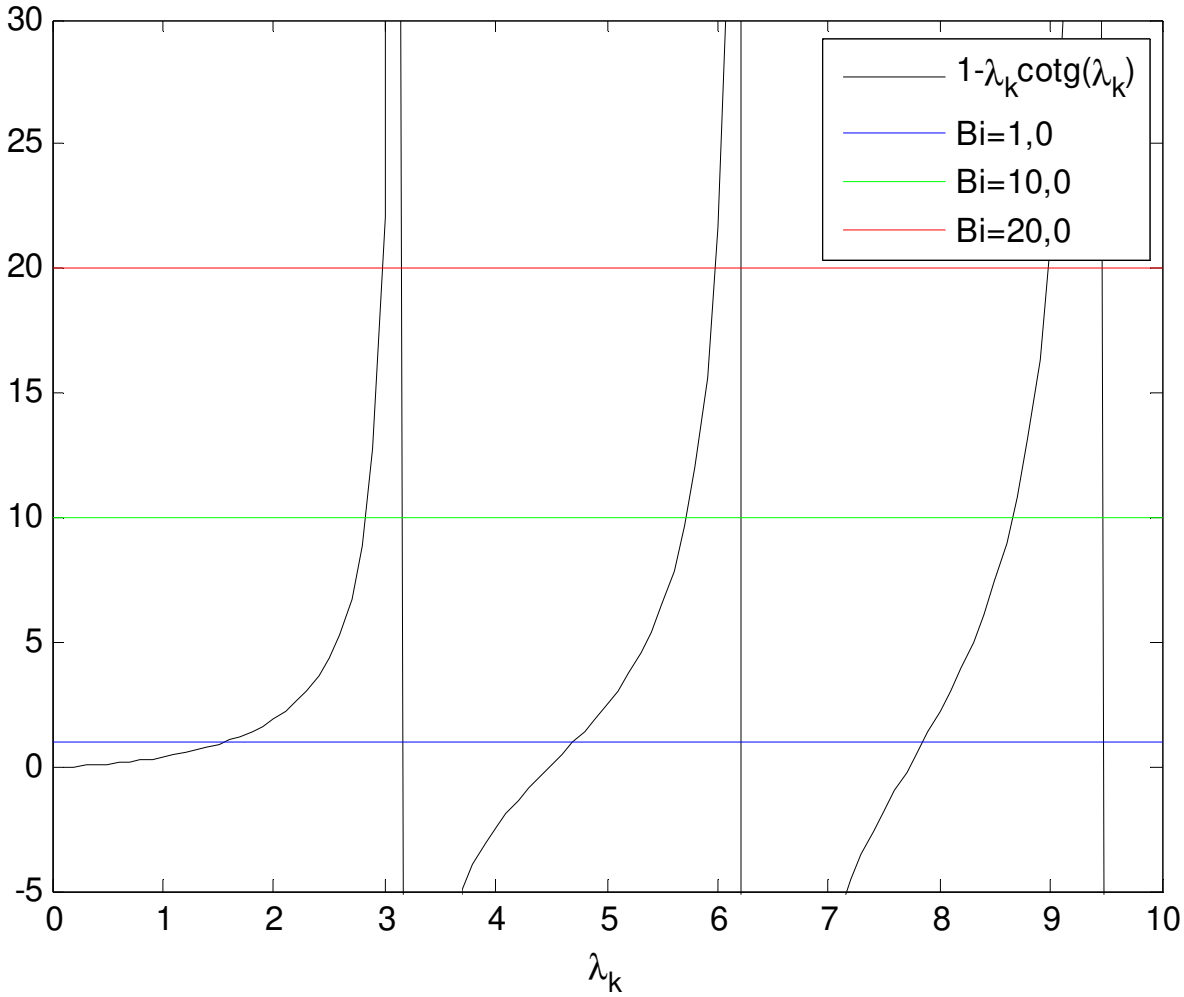
$$\underbrace{\tau_k(Fo)}_{\neq 0}\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_k}}\left\{A_k\left[\underbrace{\frac{\lambda_k 0\cos(\lambda_k 0)-\sin(\lambda_k 0)}{0^2}}_{0/0}\right]+B_k\left[\underbrace{\frac{-\lambda_k 0\sin(\lambda_k 0)-\cos(\lambda_k 0)}{0^2}}_{-1/0}\right]\right\}=0$$

APLICA-SE L'HOSPITAL DUAS VEZES PARA CONTORNAR AS INDETERMINAÇÕES, OBTÉNDO-SE $B_k = 0$

C.C.2: $$\left.\frac{\partial \theta^*}{\partial r^*}\right|_{r^*=1} = \left.\frac{\partial [R_k(r)\tau_k(Fo)]}{\partial r^*}\right|_{r^*=1} = \tau_k(Fo)\left.\frac{\partial [R_k(r)]}{\partial r^*}\right|_{r^*=1} = \tau_k(Fo)\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_k}}A_k\left[\frac{\lambda_k 1\cos(\lambda_k 1)-\sin(\lambda_k 1)}{1^2}\right]$$

$$-Bi\theta^*(1,t^*) = -Bi\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_k}}\frac{1}{1}A_k\sin(\lambda_k 1)\tau_k(Fo)$$

$1-\lambda_k\cot(\lambda_k) = Bi$ (EQUAÇÃO TRANSCENDENTAL PARA λ_k)



Representação gráfica de $1-\lambda_k \cot(\lambda_k) = Bi$ para diferentes números de Biot.

Quatro primeiras raízes de $1-\lambda_k \cot(\lambda_k) = Bi$

$Bi = hr_o/k$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1,0	1,5707	4,7123	7,8539	10,9955
5,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3348
10,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532
100,0	2,9349	5,8852	8,8605	11,8633

$$\theta^*(r^*, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{*-1} \sin(\lambda_k r^*) \exp(-\lambda_k^2 Fo)$$

$$C_K = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_k}} A_k D_k$$

C.I.:

$$\theta^*(r^*,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{*-1} \sin(\lambda_k r^*) \exp(-\lambda_k^2 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\sin(\lambda_k r^*)}{r^*} = 1$$

ORTOGONALIDADE: $w(r^*) = r^{*2}$

$$\int_0^1 \frac{\sin(\lambda_i r^*)}{r^*} w(r^*) dr^* = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\sin(\lambda_k r^*)}{r^*} \frac{\sin(\lambda_i r^*)}{r^*} w(r^*) dr^*$$

$$\int_0^1 r^* \sin(\lambda_i r^*) dr^* = C_k \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \sin(\lambda_k r^*) \sin(\lambda_i r^*) dr^*$$

$$C_k = \frac{\int_0^1 r^* \sin(\lambda_k r^*) dr^*}{\int_0^1 \sin^2(\lambda_k r^*) dr^*} \qquad C_k = \frac{4[\sin(\lambda_k) - \lambda_k \cos(\lambda_k)]}{\lambda_k [2\lambda_k - \sin(2\lambda_k)]}$$

9.3.2-SOLUÇÃO APROXIMADA

-Para $Fo < 0{,}2,$ a solução em série pode ser aproximada pelo primeiro termo da série.

-Utilizando essa aproximação e definindo $\theta_o^* = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo),$ a forma adimensional da distribuição de temperaturas é reescrita como:

$$\theta^*(r^*, Fo) = C_1 \frac{\sin(\lambda_1 r^*)}{r^*} \exp(-\lambda_1^2 Fo) = \theta_o^* \frac{\sin(\lambda_1 r^*)}{r^*}$$

$$1 - \lambda_1 \cot(\lambda_1) = Bi \qquad C_1 = \frac{4[\sin(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1)]}{\lambda_1[2\lambda_1 - \sin(2\lambda_1)]}$$

- Em termos das variáveis originais: $T(r,t) = T_\infty + (T_i - T_\infty) C_1 \sin\left(\frac{\lambda_1 r^*}{r^*}\right) \exp\left(-\lambda_1^2 \frac{\alpha t}{r_o^2}\right)$

9.3.3-TRANSFERÊNCIA TOTAL DE ENERGIA

$$\frac{Q}{Q_o} = -\frac{\int \rho c[T(r,t) - T_i]dV}{\rho c(T_i - T_\infty)V} = \frac{1}{V}\int -\left[\frac{T(r,t) - T_i}{T_i - T_\infty}\right]dV$$

$$-\left[\frac{T(r,t) - T_i}{T_i - T_\infty}\right] = 1 - \theta^* \quad V = (4/3)\pi r_o^3 \quad dV = 4\pi r^2 dr \quad \frac{Q}{Q_o} = \int (1-\theta^*)3\frac{r^2}{r_o^2}\frac{dr}{r_o}$$

-Sabendo que $r^2/r_o^2 = r^{*2}$, $dr/r_o = dr^*$ e que nesse caso os limites de integração são de $r^* = 0$ a $r^* = 1$ obtém-se:

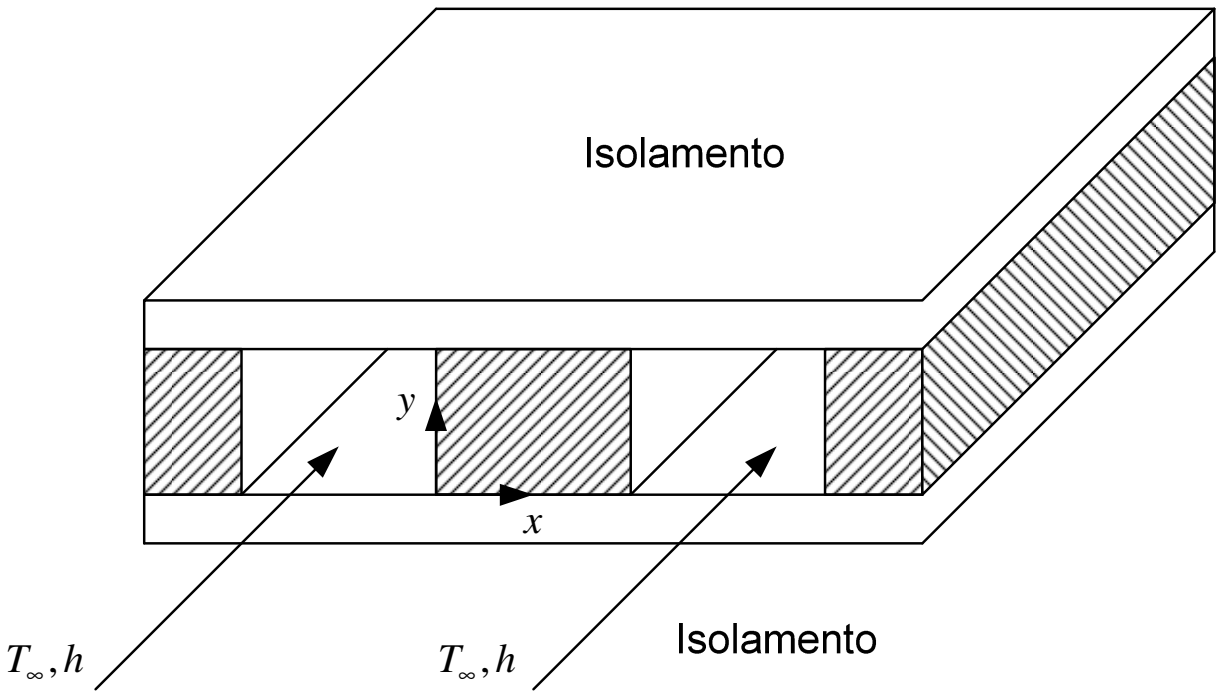
$$\frac{Q}{Q_o} = \int_0^1 [3r^{*2} - 3r^*\theta_o^* \sin(\lambda_1 r^*)]dr^* \qquad \frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{3\theta_o^*}{\lambda_1^2}[\sin(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1)]$$

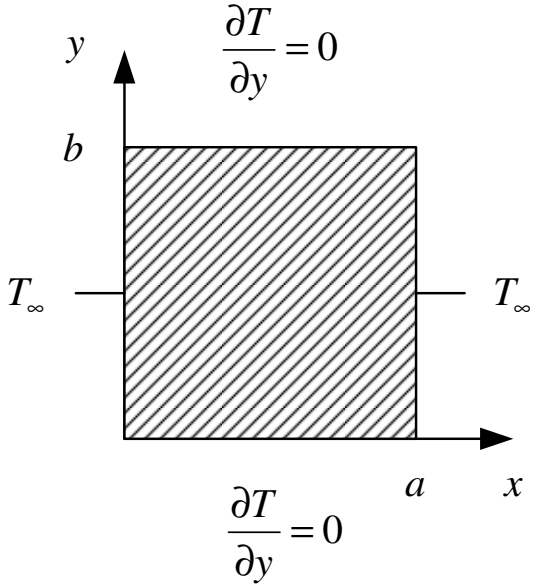
- Em termos das variáveis originais:

$$Q(t) = \rho V c(T_i - T_\infty)\left\{1 - \frac{3C_1}{\lambda_1^2}\exp\left(-\lambda_1^2\frac{\alpha t}{r_o^2}\right)[\sin(\lambda_1) - \lambda_1\cos(\lambda_1)]\right\}$$

EXEMPLO 3 – CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE RETANGULAR

Em uma barra utilizada para armazenamento de energia térmica, um fluido quente é circulado através de canais conforme a figura abaixo. As superfícies superior e inferior da barra estão isoladas. Desprezando efeitos de entrada, pode ser assumido que o fenômeno da condução térmica junto a parede separando dois canais vizinhos é bidimensional. Se no início da operação de armazenamento de energia térmica, a distribuição de temperaturas na parede é $T(x, y,0) = f(x, y)$, e a bomba de circulação de fluido é subitamente ligada, determine a distribuição de temperaturas transiente na parede. Assuma que o coeficiente de transferência de calor entre as superfícies da parede e o fluido é bastante elevado ($h \to \infty$), que a condutividade térmica da parede é constante e que não há geração interna de energia.


Isolamento
y
x
T_∞, h
T_∞, h
Isolamento


y
$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
b
T_∞
T_∞
a
x
$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

E.D.P. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ (H.)

C.C.1 $T(0,y,t)=T_\infty$ (N.H.) C.C.2 $T(a,y,t)=T_\infty$ (N.H)

C.C.3 $\frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y}=0$ (H.) C.C.4 $\frac{\partial T(x,b,t)}{\partial y}=0$ (H.) C.I. $T(x,y,0)=f(x,y)$ (N.H.)

$\theta(x,y,t)=T(x,y,t)-T_\infty$ (EXCESSO DE TEMPERATURAS)

E.D.P. $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$ (H.)

C.C.1 $\theta(0,y,t)=0$ (H.) C.C.2 $\theta(a,y,t)=0$ (H.)

C.C.3 $\frac{\partial \theta(x,0,t)}{\partial y}=0$ (H.) C.C.4 $\frac{\partial \theta(x,b,t)}{\partial y}=0$ (H.)

C.I. $\theta(x,y,0)=f(x,y)-T_\infty$ (N.H.)

$$\theta(x,y,t) = X(x)Y(y)\tau(t)$$ (SOLUÇÃO PRODUTO)

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha\tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}$$ (SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS)

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + \lambda_n^2 X_n = 0 \qquad \frac{d^2 Y_m}{dx^2} + \beta_m^2 Y_m = 0 \qquad \frac{d\tau_{nm}}{dt} + \alpha(\lambda_n^2 + \beta_m^2)\tau_{nm} = 0$$

(SOLUÇÃO GERAL)

$$\theta(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x)][C_m \sin(\beta_m y) + D_m \cos(\beta_m y)]$$

$$\exp[-\alpha(\lambda_n^2 + \beta_m^2)t]$$

C.C.1:

$$\theta_{nm}(0,y,t) = [A_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0} + B_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1}]\underbrace{Y(y)}_{\neq 0}\underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

C.C.3:

$$\frac{\partial\theta(x,0,t)}{\partial y} = X(x)\tau(t)\frac{\partial[Y(0)]}{\partial y} = \underbrace{X(x)}_{\neq 0}\underbrace{\tau(t)}_{\neq 0}\underbrace{\lambda_m}_{\neq 0}[C_m \underbrace{\cos(\beta_m 0)}_{=1} - D_m \underbrace{\sin(\beta_m 0)}_{=0}] = 0 \Rightarrow C_m = 0$$

C.C.2:

$$\theta(a,y,t) = [\underbrace{A_n}_{\neq 0}\sin(\lambda_n a)]\underbrace{Y(y)}_{\neq 0}\underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \sin(\lambda_n a) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{a},\ n = 1,2,3,...$$

C.C.4:

$$\frac{\partial\theta(x,b,t)}{\partial y} = X(x)\frac{\partial[Y(b)]}{\partial y}\tau(t) = \underbrace{X(x)}_{\neq 0}[\underbrace{D_m}_{\neq 0}\cos(\beta_m b)]\underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \cos(\beta_m b) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{b}, m = 1,2,3,...$$

$$\theta(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\exp\left[-\alpha\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)t\right] \qquad a_{nm}=A_nD_m$$

C.I.:

$$\theta(x,y,0)=f(x,y)-T_\infty=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

(DUPLA ORTOGONALIDADE COM $w(x)=1$ E $w(y)=1$)

$$\int_0^b\int_0^a[f(x,y)-T_\infty]w(x)w(y)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{i\pi}{b}y\right)dxdy=$$

$$\int_0^b\int_0^a\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}w(x)w(y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{i\pi}{b}y\right)dxdy$$

$$a_{nm} = \frac{\int_0^b \int_0^a [f(x,y) - T_\infty] \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dxdy}{\int_0^b \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dxdy}$$

(SOLUÇÃO FINAL)

$$T(x,y,t) = T_\infty + \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^b \int_0^a [f(x,y) - T_\infty] \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dxdy \right\} \times$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \exp\left[-\alpha\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t \right]$$

10-O MÉTODO DA SIMILARIDADE

-Às vezes é possível que a solução de certos tipos de problemas de condução de calor possua a propriedade da similaridade.

-Para problemas que possuam a propriedade da similaridade é possível introduzir uma variável de transformação que converte a equação diferencial governante de parcial para ordinária, usualmente mais simples de ser resolvida.

-A mesma transformação deve ser aplicada nas condições de contorno.

-Esse tipo de transformação reduz a dificuldade envolvida na obtenção da solução do problema em termos de sua ordem de magnitude (modelo matemático envolvendo equações diferenciais parciais versus modelo matemático envolvendo equações diferenciais ordinárias).

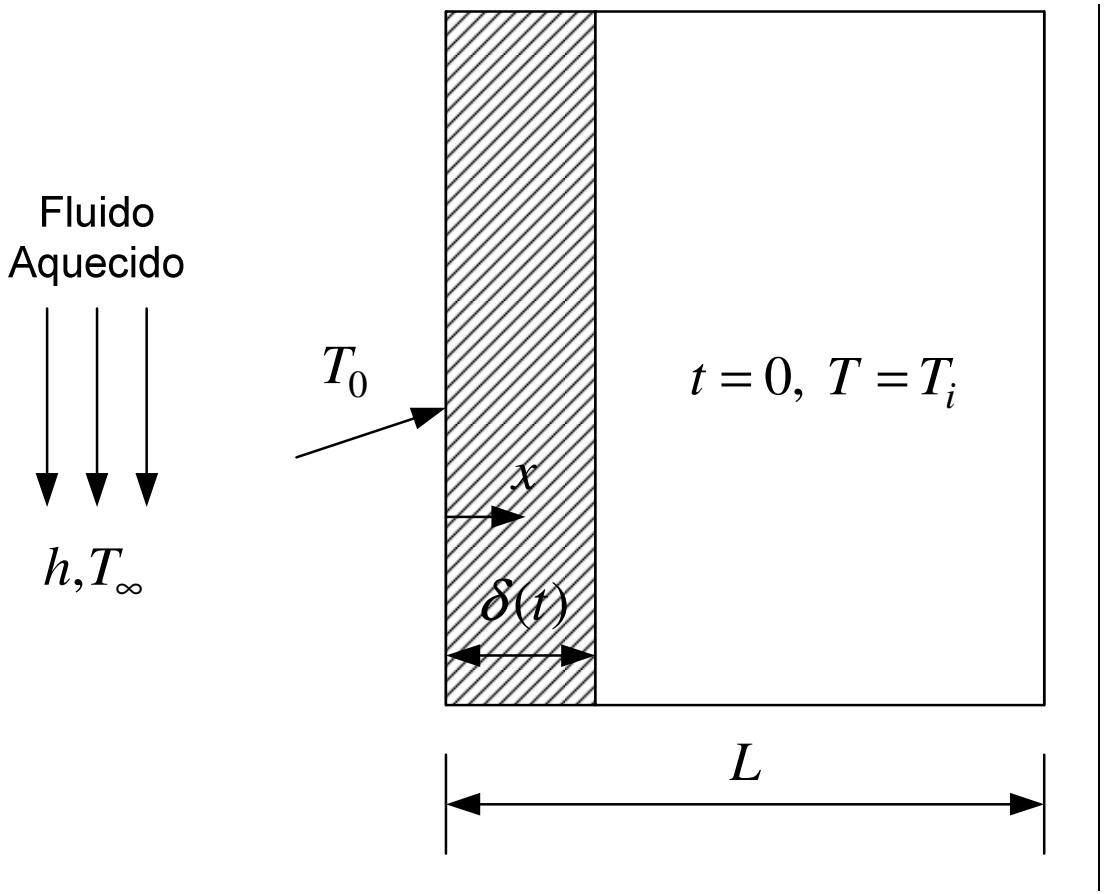
-O método de solução que utiliza a propriedade da similaridade é conhecido como método de solução por similaridade.

-Duas condições básicas devem ser satisfeitas para que o método da similaridade seja aplicável:

1) Todas as derivadas parciais tanto na equação governante quanto nas condições de contorno precisam ser transformadas em derivadas ordinárias,
2) A dimensão de espaço no problema de interesse deve ser semi-infinita (de zero a infinito). Como na prática todo corpo é finito, essa afirmação pode ser interpretada como: é a região do corpo na qual efeitos térmicos (aquecimento ou resfriamento) são sentidos, sendo esta região pequena quando comparada com a extensão física do corpo. Nesse caso o corpo é dito infinito com relação a região termicamente afetada.

EXEMPLO 4 – SIMILARIDADE EM CONDUÇÃO TRANSIENTE

Uma parede espessa, inicialmente com temperatura uniforme T_i, é subitamente colocada em contato térmico com um escoamento de um fluido aquecido com temperatura T_0, conforme a figura abaixo. É assumido contato térmico perfeito entre o fluido e a parede. Com o passar do tempo, parte da parede é aquecida devido ao contato com o fluido aquecido. Obtenha a distribuição de temperaturas unidimensional transiente na parede e o fluxo de calor na superfície da parede em contato com o fluido utilizando o método da similaridade. Considere que a condutividade térmica da parede é constante e que não existem efeitos de geração interna de energia térmica.



E.D.P. $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

C.C.1 $T(0,t) = T_0$

C.C.2 $T(\infty,t) = T_i$

C.I. $T(x,0) = T_i$

-Deve-se inicialmente é definir a variável de similaridade.

-Ela é uma combinação das variáveis independentes do problema (x, t), sendo responsável pela transformação das equações diferenciais parciais do problema em equações diferenciais ordinárias.

-A definição da variável de similaridade envolve tanto argumentos matemáticos quanto físicos, além de um pouco de abstração e conhecimento do fenômeno físico em análise.

-Para uma geometria semi-infinita não existe uma dimensão característica. Como a solução de todos os problemas físicos pode ser expressa na forma adimensional (a natureza não conhece escalas de medida) deve haver alguma maneira de adimensionalizar a solução desse problema.

-A única maneira possível é fazendo com que as variáveis apareçam juntas em um grupo adimensional.

-Analisando o denominador da E.D.P., é aparente que x^2 e αt tem as mesmas dimensões, e, portanto, $x^2/\alpha t = x/\sqrt{\alpha t}$ é adimensional.

-A solução, de alguma forma, deve ser expressa em termos desta quantidade para que seja adimensional, ou seja:

$$\eta = A\frac{x}{(\alpha t)^{1/2}}$$

-η é a variável de similaridade e A é uma constante que será definida posteriormente de maneira a simplificar a álgebra do problema

-Deve-se reescrever a formulação do problema original em termos da variável de similaridade.

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{dT}{d\eta}\frac{\partial}{\partial t}\left[A\frac{x}{(\alpha t)^{1/2}}\right]=\frac{dT}{d\eta}\left(-\frac{A}{2}\frac{t^{-3/2}}{\alpha^{1/2}}x\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{dT}{d\eta}\frac{\partial}{\partial x}\left[A\frac{x}{(\alpha t)^{1/2}}\right]=\frac{dT}{d\eta}\frac{A}{(\alpha t)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{d}{d\eta}\left[\frac{dT}{d\eta}\frac{A}{(\alpha t)^{1/2}}\right]\frac{\partial}{\partial x}\left[A\frac{x}{(\alpha t)^{1/2}}\right]=\frac{d^2T}{d\eta^2}\frac{A^2}{\alpha t}$$

$$-\frac{1}{2A^2}\eta\frac{dT}{d\eta}=\frac{d^2T}{d\eta^2}\ \text{(E.D.O.)}$$

-Nesse ponto deverá ser escolhido o valor para a constante A. Em princípio, qualquer valor arbitrário pode ser escolhido e a diferença entre as escolhas reside no fato de que mais ou menos passos algébricos deverão ser realizados em função dessa escolha.

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} + 2\eta\frac{dT}{d\eta} = 0 \qquad A = \frac{1}{2}$$

C.C.1: $T(\eta = 0) = T_0$ C.C.2: $T(\eta = \infty) = T_i$

- Separando variáveis e integrando uma 1ª vez:

$$\frac{d(dT/d\eta)}{d\eta} = -2\eta\frac{dT}{d\eta} \Rightarrow \frac{d(dT/d\eta)}{dT/d\eta} = -2\eta d\eta \Rightarrow \ln\left(\frac{dT}{d\eta}\right) = -\eta^2 + C_1$$

$$\frac{dT}{d\eta} = e^{-\eta^2 + C_1} = e^{-\eta^2}e^{C_1} = C_1 e^{-\eta^2}$$

-Integrando uma 2ª vez:

$T(\eta = \xi) = C_1\int_0^{\xi} e^{-\eta^2}d\eta + C_2$ (ξ É UM VALOR ARBITRÁRIO DE η)

C.C.1:

$$T(\eta=0)=C_1\int_0^0 e^{-0^2}\,d\eta+C_2=T_0\Rightarrow C_2=T_0$$

C.C.2:

$$T(\eta=\infty)=C_1\int_0^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta+T_0=T_i\Rightarrow C_1=\frac{T_i-T_0}{\int_0^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta}$$

$$T(\eta=\xi)=C_1\int_0^\xi e^{-\eta^2}\,d\eta+C_2=\frac{T_i-T_0}{\int_0^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta}\int_0^\xi e^{-\eta^2}\,d\eta+T_0$$

$$\frac{T(\eta=\xi)-T_0}{T_i-T_0}=\frac{\int_0^\xi e^{-\eta^2}\,d\eta}{\int_0^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta}$$

- As integrais que aparecem no lado direito são as definições matemática da função erro, obtendo-se:

$$erf(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta \qquad erf(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1$$

$$\frac{T(\eta = \xi) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{\int_0^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta}{\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} = \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} = \frac{erf(\xi)}{erf(\infty)} = erf(\eta) = erf\left(A \frac{x}{(\alpha t)^{1/2}} \right)$$

$$\frac{T(x,t) - T_0}{T_i - T_0} = erf\left(\frac{1}{2} \frac{x}{(\alpha t)^{1/2}} \right) \Rightarrow \frac{T(x,t) - T_0}{T_i - T_0} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right)$$

-O fluxo de calor na superfície da parede pode ser calculado pela lei de Fourier em conjunto com a variável de similaridade e a expressão anterior, ou seja:

$$q_s''(t) = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -k\left(\frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{\eta=0} = -k\left(\frac{dT}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \right)_{\eta=0} = -\frac{k}{2\sqrt{\alpha t}} \left(\frac{dT}{d\eta} \right)_{\eta=0}$$

$$\left.\frac{dT}{d\eta}\right|_{\eta=0} = C_1 e^{-0^2} = C_1 = \frac{T_i - T_0}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = \frac{T_i - T_0}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(\infty)} = \frac{2(T_i - T_0)}{\sqrt{\pi}}$$

$$q_s''(t) = \frac{k(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

-Claramente, o fluxo de calor local em $x = 0$ decresce proporcionalmente a $t^{-1/2}$ conforme *t* aumenta (e conforme a parede se aquece).

11-O MÉTODO INTEGRAL

-O método integral é um método aproximado que oferece uma alternativa matematicamente menos rigorosa do que os métodos utilizados nesse capítulo.

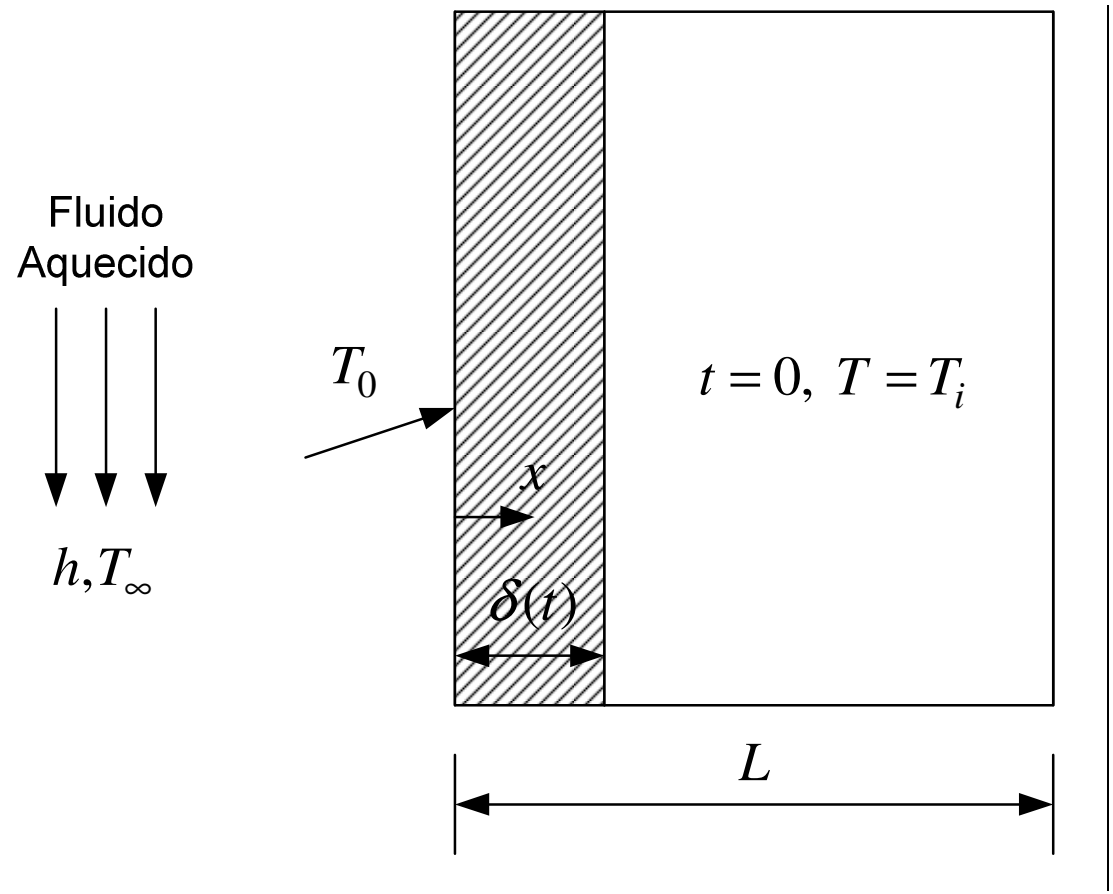
-Ele é particularmente atrativo para problemas unidimensionais transientes pois combina simplicidade e resultados com precisão aceitável.

-O método integral foi amplamente utilizado no passado para estudar problemas de condução envolvendo fusão e solidificação.

-Os principais conceitos desse método são idênticos aqueles utilizados por von Kármán e Pohlhausen no seu tratamento clássico do escoamento laminar na camada limite.

-Para ilustrar esse método será analisado novamente o EXEMPLO 4, só que agora pelo método integral.

EXEMPLO 5 – MÉTODO INTEGRAL EM CONDUÇÃO TRANSIENTE



E.D.P. $\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

C.C.1 $T(0,t) = T_0$

C.C.2 $T(\infty,t) = T_i$

C.I. $T(x,0) = T_i$

-1º PASSO: integrar a E.D.P. em x de $x=0$ a $x=\delta(t)$, obtendo-se:

$$\int_{x=0}^{x=\delta(t)} \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}dx = \int_{x=0}^{x=\delta(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\int_{x=0}^{x=\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial t}dx = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\delta(t)} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$$

-$\delta(t)$ é a camada de penetração térmica ou camada limite térmica na qual o efeito de aquecimento ou resfriamento da fronteira é sentido pelo corpo.

-Fora da camada limite o corpo está na sua temperatura inicial.

-O lado esquerdo da equação anterior pode ser reescrito utilizando a regra de Leibniz:

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt}[f(x,t)]dx = \frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx + f[x,a(t)]\frac{d}{dt}[a(t)] - f[x,b(t)]\frac{d}{dt}[b(t)]$$

-Assim, utilizando a regra de Leibniz obtém-se:

$$\int_{x=0}^{x=\delta(t)} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dx = \frac{d}{dt}\int_0^{\delta(t)} T(x,t)dx - T[x,\delta(t)]\frac{d\delta(t)}{dt}$$

(EQUAÇÃO DA ENERGIA NA FORMA INTEGRAL)

$$\frac{1}{\alpha}\left[\frac{d}{dt}\int_0^{\delta} Tdx - (T)_{x=\delta}\frac{d\delta}{dt}\right] = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\delta} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$$

-2º PASSO: assumir uma expressão geral para a distribuição de temperaturas *T*, sendo a forma mais comum uma expressão polinomial com coeficientes desconhecidos que podem ser determinados pelas condições de contorno do problema.

-Se necessário (devido a presença de mais coeficientes que condições de contorno), pode-se utilizar condições de contorno adicionais, como por exemplo, avaliar a equação da energia e suas derivadas nos limites da região de interesse ($x = 0$ e $x = \delta$).

$$\frac{T(x) - T_i}{T_0 - T_i} = A + B\frac{x}{\delta} + C\left(\frac{x}{\delta}\right)^2 + D\left(\frac{x}{\delta}\right)^3$$

C.C.1 ORIGINAL: $T(0) = T_0$

C.C.2 MODIFICADA: $T(\delta) = T_i$

C.C.3 (FLUXO DE CALOR): $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\delta} = 0$

C.C.4 (TEMPERATURA ESPECIFICADA CONSTANTE): $\frac{1}{\alpha}\underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x=0}}_{=0} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{x=0}$

$$T(x) = T_i + (T_0 - T_i)\left[A + B\frac{x}{\delta} + C\left(\frac{x}{\delta}\right)^2 + D\left(\frac{x}{\delta}\right)^3 \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_0 - T_i)\left[\frac{B}{\delta} + \frac{2Cx}{\delta^2} + \frac{3Dx^2}{\delta^3} \right] \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (T_0 - T_i)\left[\frac{2C}{\delta^2} + \frac{6Dx}{\delta^3} \right]$$

C.C.4: $$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{x=0} = (T_0 - T_i)\left[\frac{2C}{\delta^2} + \frac{6D0}{\delta^3} \right] = 0 \Rightarrow C = 0$$

C.C.1: $$T(0) = T_i + (T_0 - T_i)\left[A + B\frac{0}{\delta} + D\left(\frac{0}{\delta}\right)^3 \right] = T_0 \Rightarrow A = 1$$

C.C.3: $$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\delta} = (T_0 - T_i)\left[\frac{B}{\delta} + \frac{3D\delta^2}{\delta^3} \right] = 0 \Rightarrow B = -3D$$

C.C.2: $$T(\delta) = T_i + (T_0 - T_i)\left[1 - 3D\frac{\delta}{\delta} + D\left(\frac{\delta}{\delta}\right)^3 \right] = T_i \Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

$$T(x) = T_i + (T_0 - T_i)\left[1 - \frac{3}{2}\frac{x}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\delta}\right)^3\right] \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = (T_0 - T_i)\left[-\frac{3}{2\delta} + \frac{3x^2}{2\delta^3}\right]$$

-3º PASSO: substituir a equação do perfil e sua derivada na equação integral da energia:

$$\frac{1}{\alpha}\left[\frac{d}{dt}\int_0^\delta T dx - (T)_{x=\delta}\frac{d\delta}{dt}\right] = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\delta} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$$

$$\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{d}{dt}\int_0^\delta \left\{T_i + (T_0 - T_i)\left[1 - \frac{3}{2}\frac{x}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\delta}\right)^3\right]\right\}dx - \left\{T_i + (T_0 - T_i)\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\delta}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta}\right)^3\right]\right\}\frac{d\delta}{dt}\right\} =$$

$$(T_0 - T_i)\left[-\frac{3}{2\delta} + \frac{3\delta^2}{2\delta^3}\right] - (T_0 - T_i)\left[-\frac{3}{2\delta} + \frac{3.0^2}{2\delta^3}\right]$$

$$\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{d}{dt}\int_0^{\delta}\left\{T_i+(T_0-T_i)\left[1-\frac{3}{2}\frac{x}{\delta}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\delta}\right)^3\right]\right\}dx-T_i\frac{d\delta}{dt}\right\}=\frac{3}{2\delta}(T_0-T_i)$$

$$\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{d}{dt}\left\{T_0[x]_0^{\delta}-(T_0-T_i)\frac{3}{4\delta}[x^2]_0^{\delta}+(T_0-T_i)\frac{1}{8\delta^3}[x^4]_0^{\delta}\right\}-T_i\frac{d\delta}{dt}\right\}=\frac{3}{2\delta}(T_0-T_i)$$

$$2\delta d\delta=8\alpha dt$$

-Integrando de $\delta=0$ em $t=0$ à δ em t, ou seja:

$$\int_{\delta=0}^{\delta(t)}2\delta d\delta=\int_{t=0}^{t}8\alpha dt \qquad \delta(t)=\sqrt{8\alpha t}$$

-4º PASSO: substituir $\delta(t)$ na distribuição de temperaturas transiente adimensional:

$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_0-T_i}=1-\frac{3}{2}\frac{x}{\sqrt{8\alpha t}}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{8\alpha t}}\right)^3$$

-O fluxo de calor na superfície da parede pode ser determinado utilizando a lei de Fourier:

$$q_s''(t) = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = -k\left\{(T_0 - T_i)\left[-\frac{3}{2\sqrt{8\alpha t}} + \frac{3.0^2}{2\sqrt{8\alpha t}^3}\right]\right\} = \frac{3k(T_0 - T_i)}{4\sqrt{2\alpha t}}$$

-Deve ser notado que a equação anterior fornece um resultado apenas 6 % abaixo daquele calculado pela solução exata obtida pelo método da similaridade.

-Além disso, esse problema também poderia ter sido resolvido utilizando a C.C.4 avaliada $x = \delta$:

$$\frac{1}{\alpha}\underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x=\delta}}_{=0} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{x=\delta}$$

- Nessa condição pode ser mostrado que os resultados obtidos têm a seguinte forma:

$$\delta(t) = \sqrt{24\alpha t} \qquad \frac{T(x,t) - T_i}{T_0 - T_i} = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{24\alpha t}}\right)^3 \qquad q_s''(t) = \frac{3k(T_0 - T_i)}{\sqrt{6\alpha t}}$$

-Esse resultado está 8,5 % acima daquele calculado pela solução exata obtida pelo método da similaridade. Isso deixa claro que embora o método integral seja de fácil aplicação, a precisão dos resultados depende do perfil de temperaturas assumido e da escolha das condições de contorno a serem satisfeitas.

-Uma escolha que pode melhorar a precisão dos resultados consiste em se utilizar um polinômio de 4º grau com 5 constantes a serem determinadas, utilizando a equação de condução avaliada tanto em $x = 0$ quanto em $x = \delta$.