CONDUÇÃO TÉRMICA (PEM 00135)

PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

CAPÍTULO 5 – CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

santiago@feb.unesp.br

- Condução bidimensional em regime permanente é governada por uma equação diferencial parcial de segunda ordem.
- A solução para esse tipo de problema deve satisfazer a equação diferencial e quatro condições de contorno.
- O método da separação de variáveis será utilizado para construir essa solução.
- Serão mostradas inicialmente as ferramentas necessárias para a aplicação desse método.
- Na sequência serão apresentados diversos exemplos resolvidos para ilustrar a aplicação desse método na solução de problemas de condução de calor bidimensionais.

1-A EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR

- Considerando condução de calor em regime permanente com propriedades constantes e escolhendo duas coordenadas de maneira arbitrária, exemplos de EDP's nos três sistemas coordenados são mostrados abaixo:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{1}{\alpha}\left(U\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0 \quad \text{(RETANGULAR)}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}-\frac{1}{\alpha}\left(V_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{V_\phi}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0 \quad \text{(CILÍNDRICO)}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}-\frac{1}{\alpha}\left(V_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0 \quad \text{(ESFÉRICO)}$$

- Para o caso especial de meio estacionário sem geração interna de energia, as equações anteriores são simplificadas para:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}=0 \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}=0$$

- As seis equações anteriores com $\dot{q}=0$ são casos especiais de uma equação diferencial mais geral escrita na seguinte forma:

$$f_2(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+f_1(x)\frac{\partial T}{\partial x}+f_0(x)T+g_2(y)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+g_1(y)\frac{\partial T}{\partial y}+g_0(y)T=0$$

- Essa equação geral é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, homogênea e com coeficientes variáveis, que pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis para um conjunto especificado de condições de contorno.

2-MÉTODO DE SOLUÇÃO E LIMITAÇÕES

- A ideia básica dessa aproximação é substituir a equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias.
- O número de equações diferenciais ordinárias é igual ao número de variáveis independentes da equação diferencial parcial.
- Assim, para condução bidimensional em regime permanente, a equação de condução é substituída por duas equações diferenciais ordinárias.
- De maneira similar, para condução tridimensional em regime permanente, a equação de condução é substituída por três equações diferenciais ordinárias.

- Existem duas limitações importantes desse método:

1) Ele é aplicável em equações lineares. Uma equação é dita linear se a variável dependente e suas derivadas aparecem elevadas a primeira potência e se não houver o produto entre a variável dependente e suas derivadas. Assim, as seis primeiras equações mostradas são lineares;

2) A geometria da região deve ser representada por um sistema de coordenadas ortogonal. Exemplos são: quadrados, retângulos, cilindros e esferas maciços ou ocos, seções de cilindros e esferas. Isso exclui problemas envolvendo triângulos, trapézios e outros domínios de formato irregular.

3-EQUAÇÃO DIFERENCIAL HOMOGÊNEA E CONDIÇÕES DE CONTORNO HOMOGÊNEAS

- Como a homogeneidade de equações lineares desempenha um papel crucial no método da separação de variáveis, é importante entender o seu significado.
- Uma equação linear é dita homogênea se ela não se alterar quando a variável dependente for multiplicada por uma constante.
- A mesma definição serve para as condições de contorno.
- Utilizando essa definição para checar a equação abaixo, multiplica-se a variável dependente T por uma constante c, faz-se a operação de derivada e divide-se a expressão resultante por c, donde se obtém:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{1}{\alpha}\left(U\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0 \quad \frac{\partial^2 (cT)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 (cT)}{\partial y^2}-\frac{1}{\alpha}\left(U\frac{\partial (cT)}{\partial x}+V\frac{\partial (cT)}{\partial y}\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{1}{\alpha}\left(U\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\dot{q}}{ck}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{1}{\alpha}\left(U\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0 \text{ (N.H.)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \quad \frac{\partial^2 (cT)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 (cT)}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \text{ (H.)}$$

- Para aplicar esse teste em condições de contorno, considere a condição de contorno convectiva:

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty) \quad -k\frac{\partial (cT)}{\partial x}=h(cT-T_\infty) \Rightarrow -k\frac{\partial T}{\partial x}=h\left(T-\frac{T_\infty}{c}\right) \text{ (N.H.)}$$

- O método da separação de variáveis pode ser estendido para resolver problemas onde a equação diferencial e/ou as condições de contorno são não-homogêneas.

- Para isso deve-se realizar algum tipo de transformação matemática na variável dependente para garantir que a equação diferencial parcial e pelo menos três das quatro condições de contorno sejam homogêneas.

- Por exemplo, se for definida a variável $\theta(x) = T(x) - T_\infty$, a condição de contorno convectiva é rescrita como:

$$-k\frac{\partial\theta}{\partial x} = h\theta \quad -k\frac{\partial(c\theta)}{\partial x} = hc\theta \Rightarrow \quad -k\frac{\partial\theta}{\partial x} = h\theta \text{ (H.)}$$

4-PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DE STURM-LIOUVILLE: ORTOGONALIDADE

- A ideia básica do método da separação de variáveis é substituir a equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias.
- Tal conjunto pertence a uma classe de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem chamada de *problemas de valor de contorno de Sturm-Liouville*.
- A forma geral da equação de Sturm-Liouville é:

$$\frac{d^2\phi_n}{dx^2} + a_1(x)\frac{d\phi_n}{dx} + [a_2(x) + \lambda_n^2 a_3(x)]\phi_n = 0 \text{ (1ª FORMA)}$$

- A equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\phi_n}{dx}\right]+[q(x)+\lambda_n^2 w(x)]\phi_n=0 \text{ (2ª FORMA)}$$

$$p(x)=e^{\int a_1 dx} \quad q(x)=a_2\,p(x) \quad w(x)=a_3\,p(x)$$

1) A função $w(x)$ é chamada de função peso.

2) A equação anterior representa um conjunto de n equações correspondentes a n valores de λ_n. As soluções correspondentes são representadas por ϕ_n.

3) As soluções ϕ_n são conhecidas como funções características.

- Uma propriedade importante do problema de Sturm-Liouville, que é utilizada na aplicação do método da separação de variáveis, é chamada de *ortogonalidade*.

- Duas funções, $\phi_n(x)$ e $\phi_m(x)$, são ortogonais dentro de um intervalo (a,b) com relação à função peso $w(x)$, se:

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)w(x)dx = 0 \qquad n \neq m$$

-As funções características do problema de Sturm-Liouville são ortogonais se as funções $p(x)$, $q(x)$ e $w(x)$ são reais, e se as condições de contorno em $x = a$ e em $x = b$ são homogêneas e escritas na seguinte forma:

$$\phi_n = 0 \text{ (TEMPERATURA ZERO)}$$

$$\frac{d\phi_n}{dx} = 0 \text{ (FRONTEIRA ISOLADA)}$$

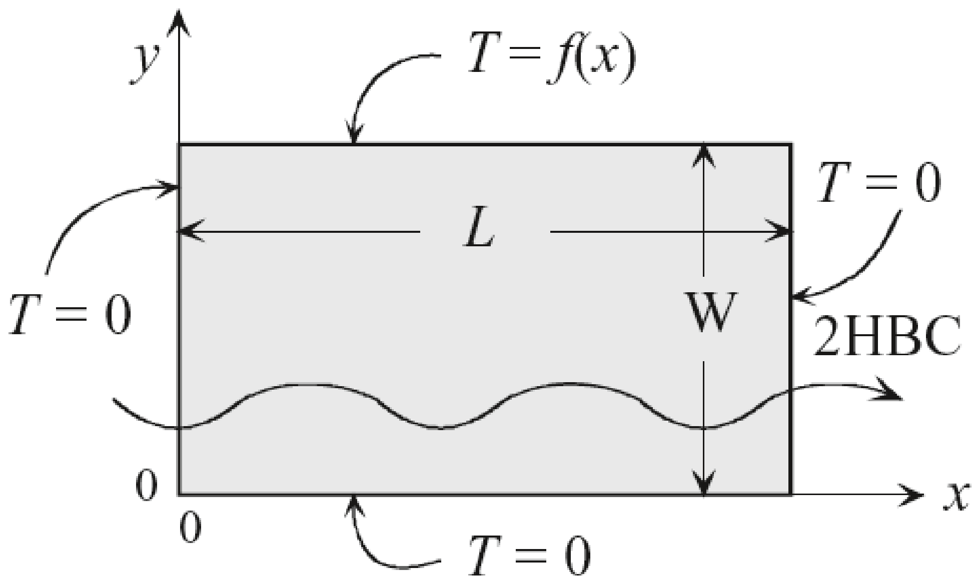
$$\phi_n + \beta\frac{d\phi_n}{dx} = 0 \text{ (SUPERFÍCIE COM CONVECÇÃO)}$$

- Para o caso especial de $p(x) = 0$ em $x = a$ ou em $x = b$, essas condições podem ser estendidas para incluir:

$$\phi_n(a) = \phi_n(b) \quad \text{(CONTINUIDADE DE TEMPERATURAS)}$$

$$\frac{d\phi_n(a)}{dx} = \frac{d\phi_n(b)}{dx} \quad \text{(CONTINUIDADE DE FLUXO E CALOR)}$$

EXEMPLO 1 – Considere condução bidimensional em regime permanente na placa estacionária mostrada abaixo. Três lados estão mantidos a uma temperatura igual a zero. Ao longo do quarto lado a temperatura varia espacialmente com x. Determine a distribuição de temperaturas $T(x, y)$ na placa.



(1) Considerações. (1) condução bidimensional, (2) regime permanente, (3) sem geração de energia, (4) condutividade térmica constante e (5) placa estacionária.

(2) Equações governantes.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \text{ (H.)}$$

C.C.1: $T(0,y)=0$ (H.) C.C.2: $T(L,y)=0$ (H.)

C.C.3: $T(x,0)=0$ (H.) C.C.4: $T(x,W)=f(x)$ (Ñ.H.)

(3) *x* é a direção homogênea (2 HBC na figura)

(4) Solução. Espera-se uma solução $T(x,y)$ que satisfaça a E.D.P. e as 4 condições de contorno, sendo construída na forma de um produto de duas funções: uma que depende somente de x, $X(x)$, e outra que depende somente de y, $Y(y)$. Assim:

$T(x,y) = X(x)Y(y)$ (o problema consiste em determinar essas funções)

$$\frac{\partial^2[X(x)Y(y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2[X(x)Y(y)]}{\partial y^2} = 0 \quad Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

- Separando as variáveis e rearranjando obtém-se:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

- O lado esquerdo é função somente de x e o lado direito é função somente de y:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \pm\lambda_n^2$$

- λ_n^2 é conhecida como constante de separação. Algumas observações podem ser feitas com relação a essa constante:

(1) A constante de separação está elevada ao quadrado. Isso é somente por conveniência. A solução será expressa em termos da raiz quadrada da constante escolhida. Assim, começando com uma constante elevada ao quadrado evita-se ficar escrevendo o sinal da raiz quadrada em todo o procedimento de solução.

(2) A constante tem um sinal negativo e outro positivo. Isso foi feito pois ambas as possibilidades satisfazem a condição de igualdade. Embora somente um sinal forneça a solução correta, nesse momento ainda não sabemos qual é.

(3) A constante tem um subscrito n que é introduzido para enfatizar que diversas constantes podem satisfazer a condição de igualdade. As constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, são conhecidas como autovalores ou valores característicos. A possibilidade de uma dessas constantes ser zero também deve ser considerada.

(4) A igualdade dupla representa o conjunto de duas E.D.O.'s:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} \pm \lambda_n^2 X_n = 0 \qquad \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \pm \lambda_n^2 Y_n = 0$$

(5) Selecionando o sinal dos termos λ_n^2. A regra é escolher o *sinal positivo* para a equação diferencial ordinária representando a direção homogênea. A outra equação diferencial recebe o sinal negativo.

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + \lambda_n^2 X_n = 0 \qquad \frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \lambda_n^2 Y_n = 0$$

(6) Solução das equações diferenciais ordinárias. As E.D.O.'s podem ser resolvidas pela técnica da equação característica.

$$X_n(x) = A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x)$$

$$Y_n(x) = C_n \sinh(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y)$$

$$T_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) \text{ (solução produto)}$$

- Como a E.D.P. é linear, a soma de todas as soluções também é uma solução, ou seja:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y)$$

(7) Aplicação das condições de contorno. Para completar a solução, as constantes A_n, B_n, C_n, D_n e os valores característicos λ_n devem ser determinados.

C.C.1: $T_n(0, y) = X_n(0)\underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X_n(0) = 0 \Rightarrow A_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0} + B_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} = 0 \Rightarrow B_n = 0$

C.C.2: $T_n(L, y) = X_n(L)\underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X_n(L) = 0 \Rightarrow \underbrace{A_n}_{\neq 0} \sin(\lambda_n L) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda_n L) = 0$

$$\lambda_n L = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \ldots \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- A última expressão é chamada de equação característica. Todas as soluções obtidas pelo método da separação de variáveis devem incluir uma equação característica para a determinação dos valores característicos de λ_n.

C.C.3: $T_n(x,0) = \underbrace{X_n(x)}_{\neq 0} Y_n(0) = 0 \Rightarrow Y_n(0) = 0 \Rightarrow C_n \underbrace{\sinh(\lambda_n 0)}_{=0} + D_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} = 0 \Rightarrow D_n = 0$

$X_n(x) = A_n \sin(\lambda_n x)$ $Y_n(x) = C_n \sinh(\lambda_n y)$ $T_n(x,y) = A_n \sin(\lambda_n x) C_n \sinh(\lambda_n y)$

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n y) \qquad a_n = A_n C_n$$

C.C.4: $T(x,W) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n W)$ (SOLUÇÃO GERAL)

- A expressão anterior não pode ser resolvida para a_n por causa da variável x e pelo sinal de somatório. Para prosseguir deve-se utilizar o conceito de ortogonalidade.

(8) Ortogonalidade. Para determinar a_n deve-se aplicar ortogonalidade na direção homogênea, cuja função $\sin(\lambda_n x)$ é solução da E.D.O. da direção homogênea.

- Ortogonalidade pode ser aplicada na solução geral somente se a E.D.O. da direção homogênea for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em $x=0$ e $x=L$ foram homogêneas:

$$\frac{d^2X_n}{dx^2}+\lambda_n^2 X_n=0 \quad \frac{d^2\phi_n}{dx^2}+a_1(x)\frac{d\phi_n}{dx}+[a_2(x)+\lambda_n^2 a_3(x)]\phi_n=0 \quad \text{(COMPARANDO)}$$

$$a_1(x)=a_2(x)=0 \quad \text{e} \quad a_3(x)=1$$

$$p(x)=e^{\int a_1 dx}=e^{\int 0 dx}=1 \quad q(x)=a_2 p(x)=0.1=0 \quad w(x)=a_3 p(x)=1.1=1$$

- Como as duas condições de contorno de $X_n(x) = \sin(\lambda_n x)$ são homogêneas, conclui-se que as funções características $\phi_n(x) = \sin(\lambda_n x)$ e $\phi_m(x) = \sin(\lambda_m x)$ são ortogonais com relação a função peso $w(x) = 1$.

- Agora estamos prontos para aplicar a ortogonalidade na solução geral para determinar a_n.

$$\int_0^L f(x) \underbrace{w(x)\sin(\lambda_m x)dx}_{\text{termo adicionado}} = \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x)\sinh(\lambda_n W) \right] \underbrace{w(x)\sin(\lambda_m x)dx}_{\text{termo adicionado}}$$

- Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que $w(x) = 1$ obtém-se:

$$\int_0^L f(x)\sin(\lambda_m x)dx = a_n \sinh(\lambda_n W) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_m x)dx$$

- De acordo com o princípio da ortogonalidade, a integral do lado direito é nula quando $m \neq n$. Assim, todas as integrais que surgem devido ao sinal de somatório são nulas, exceto no caso quando $m = n$, ou seja:

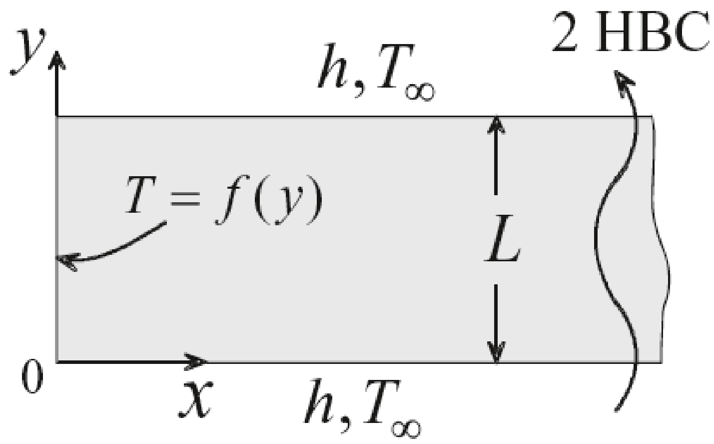
$$\int_0^L f(x)\sin(\lambda_n x)dx = a_n \sinh(\lambda_n W)\int_0^L \sin^2(\lambda_n x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L\sinh(\lambda_n W)}\int_0^L f(x)\sin(\lambda_n x)dx$$

- A forma final da distribuição de temperaturas é escrita substituindo a_n e a equação característica para λ_n, obtendo-se:

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L\sinh\left(\frac{n\pi}{L}W\right)}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right),\ n=1,2,3,\ldots$$

EXEMPLO 2 – Considere condução bidimensional em uma placa semi-infinita estacionária conforme a figura abaixo. A placa troca calor por convecção com um ambiente a T_∞. O coeficiente de transferência de calor é h e a altura da placa é L. Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente na placa semi-infinita.



(1) Observações. (i) em $x = \infty$, a placa atinge T_∞ e (ii) as quatro condições de contorno são não-homogêneas. Entretanto, definindo $\theta(x, y) = T(x, y) - T_\infty$, 3 das 4 C.C.'s tornam-se homogêneas, tornando o método da separação de variáveis aplicável.

(2) Formulação.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\,(\text{H.}) \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0\,(\text{H.})$$

C.C.1: $k\dfrac{\partial T(x,0)}{\partial y} = h[T(x,0) - T_\infty]\,(\tilde{\text{N}}.\text{H}.) \Rightarrow k\dfrac{\partial \theta(x,0)}{\partial y} = h\theta(x,0)\,(\text{H}.)$

C.C.2: $-k\dfrac{\partial T(x,L)}{\partial y} = h[T(x,L) - T_\infty]\,(\tilde{\text{N}}.\text{H}.) \Rightarrow -k\dfrac{\partial \theta(x,L)}{\partial y} = h\theta(x,L)\,(\text{H}.)$

C.C.3: $T(\infty, y) = T_\infty\,(\tilde{\text{N}}.\text{H}.) \Rightarrow \theta(\infty, y) = 0\,(\text{H}.)$

C.C.4: $T(0, y) = f(y)\,(\tilde{\text{N}}.\text{H}.) \Rightarrow \theta(0, y) = f(y) - T_\infty\,(\tilde{\text{N}}.\text{H}.)$

(3) Solução.

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \pm\lambda_n^2$$

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} \pm \lambda_n^2 X_n = 0 \qquad \frac{d^2Y_n}{dy^2} \pm \lambda_n^2 Y_n = 0$$

- A variável y tem duas condições de contorno homogêneas, o termo $\lambda_n^2 Y_n$ deve ser sinal positivo:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} - \lambda_n^2 X_n = 0 \qquad \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \lambda_n^2 Y_n = 0$$

$$X_n(x) = A_n \exp(-\lambda_n x) + B_n \exp(\lambda_n x) \qquad Y_n(y) = C_n \sin(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y)$$

$$\theta_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) \qquad \theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y)$$

C.C.1:

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[X_n(x) Y_n(y)] = X_n(x) \frac{\partial}{\partial y}[Y_n(y)] = X_n(x) \frac{\partial}{\partial y}[C_n \sin(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y)] =$$

$$X_n(x)[C_n \lambda_n \cos(\lambda_n y) - D_n \lambda_n \sin(\lambda_n y)]$$

$$\frac{\partial\theta_n(x,0)}{\partial y} = X_n(x)[C_n\lambda_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} - D_n\lambda_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0}] = X_n(x)C_n\lambda_n$$

$$\theta_n(x,0) = X_n(x)Y_n(0) = X_n(x)\left[C_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0} + D_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1}\right] = X_n(x)D_n$$

$$kX_n(x)C_n\lambda_n = hX_n(x)D_n \Rightarrow C_n = \left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)D_n$$

C.C.2: $\dfrac{\partial\theta_n}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}[X_n(x)Y_n(y)] = X_n(x)\dfrac{\partial}{\partial y}[Y_n(y)] = X_n(x)\dfrac{\partial}{\partial y}[C_n\sin(\lambda_n y) + D_n\cos(\lambda_n y)] =$

$$X_n(x)[C_n\lambda_n\cos(\lambda_n y) - D_n\lambda_n\sin(\lambda_n y)]$$

$$\frac{\partial\theta_n(x,L)}{\partial y} = X_n(x)[C_n\lambda_n\cos(\lambda_n L) - D_n\lambda_n\sin(\lambda_n L)]$$

$$\theta_n(x,L) = X_n(x)Y_n(L) = X_n(x)[C_n\sin(\lambda_n L) + D_n\cos(\lambda_n L)]$$

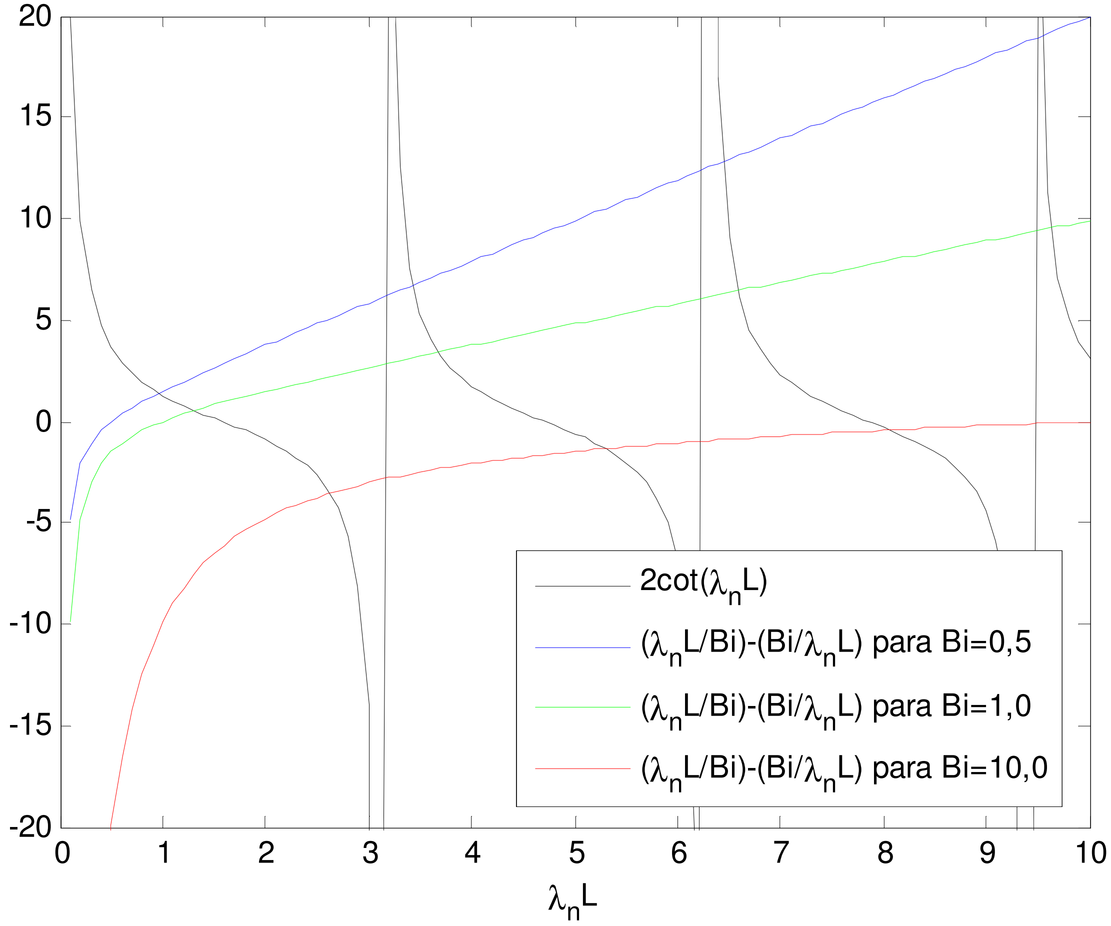
$$-kX_n(x)[C_n\lambda_n\cos(\lambda_nL)-D_n\lambda_n\sin(\lambda_nL)]=hX_n(x)\left[C_n\sin(\lambda_nL)+D_n\cos(\lambda_nL)\right]$$

$$-k\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)D_n\lambda_n\cos(\lambda_nL)-D_n\lambda_n\sin(\lambda_nL)\right]=h\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)D_n\sin(\lambda_nL)+D_n\cos(\lambda_nL)\right]$$

$$\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\cos(\lambda_nL)-\sin(\lambda_nL)=-\frac{h}{k\lambda_n}\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sin(\lambda_nL)+\cos(\lambda_nL)\right]$$

$$\frac{h}{k\lambda_n}=\frac{hL}{k}\frac{1}{\lambda_nL}=\frac{Bi}{\lambda_nL}$$

$$\frac{\lambda_nL}{Bi}-\frac{Bi}{\lambda_nL}=2\cot(\lambda_nL)$$



C.C.3: $\theta(\infty, y) = X_n(\infty)Y_n(y) = 0 \Rightarrow [A_n \underbrace{\exp(-\lambda_n\infty)}_{=0} + B_n \underbrace{\exp(\lambda_n\infty)}_{=\infty}]\underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow B_n = 0$

- Com os resultados anteriores obtém-se:

$$X_n(x) = A_n \exp(-\lambda_n x) \qquad Y_n(y) = D_n\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L}\right)\sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y)\right]$$

$$\theta_n(x, y) = A_n D_n \exp(-\lambda_n x)\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L}\right)\sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y)\right]$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n x)\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L}\right)\sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y)\right]$$

$$a_n = A_n D_n$$

C.C.4: $\theta(0, y) = f(y) - T_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n 0)\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L}\right)\sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y)\right] =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L}\right)\sin(\lambda_n y)+\cos(\lambda_n y)\right] \text{ (SOLUÇÃO GERAL)}$$

(4) Ortogonalidade. Para determinar a_n deve-se aplicar ortogonalidade na direção homogênea, cuja função $[(Bi/\lambda_n L)\sin(\lambda_n y)+\cos(\lambda_n y)]$ é solução da E.D.O. da direção homogênea.

- Ortogonalidade pode ser aplicada na solução geral somente se a E.D.O. da direção homogênea for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em $y=0$ e $y=L$ foram homogêneas:

$$\frac{d^2Y_n}{dy^2}+\lambda_n^2 Y_n=0 \quad \frac{d^2\phi_n}{dy^2}+a_1(y)\frac{d\phi_n}{dy}+[a_2(y)+\lambda_n^2 a_3(y)]\phi_n=0 \text{ (COMPARANDO)}$$

$$a_1(y)=a_2(y)=0 \quad \text{e} \quad a_3(y)=1$$

$$p(y)=e^{\int a_1 dy}=e^{\int 0 dy}=1 \quad q(y)=a_2 p(y)=0.1=0 \quad w(y)=a_3 p(y)=1.1=1$$

- Como as duas condições de contorno de $Y_n(y) = [(Bi/\lambda_n L)\sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y)]$ são homogêneas, conclui-se que as funções características $\phi_n(y) = [(Bi/\lambda_n L)\sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y)]$ e $\phi_m(y) = [(Bi/\lambda_m L)\sin(\lambda_m y) + \cos(\lambda_m y)]$ são ortogonais com relação a função peso $w(y) = 1$.

- Agora estamos prontos para aplicar a ortogonalidade na solução geral para determinar a_n.

$$\int_0^L [f(y) - T_\infty] \underbrace{w(y)\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_m L}\right)\sin(\lambda_m y) + \cos(\lambda_m y)\right]}_{\text{termo adicionado}} dy =$$

$$\int_0^L \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L}\right)\sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y)\right]\right\} \underbrace{w(y)\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_m L}\right)\sin(\lambda_m y) + \cos(\lambda_m y)\right]}_{\text{termo adicionado}} dy$$

- Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que $w(y)=1$ obtém-se:

$$\int_0^L [f(y)-T_\infty]\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_m L}\right)\sin(\lambda_m y)+\cos(\lambda_m y)\right]dy =$$

$$a_n \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^L \left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L}\right)\sin(\lambda_n y)+\cos(\lambda_n y)\right]\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_m L}\right)\sin(\lambda_m y)+\cos(\lambda_m y)\right]dy$$

- De acordo com o princípio da ortogonalidade, a integral do lado direito é nula quando $m \neq n.$ Assim, todas as integrais que surgem devido ao sinal de somatório são nulas no caso quando $m = n,$ obtendo-se:

$$\int_0^L [f(y)-T_\infty]\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L}\right)\sin(\lambda_n y)+\cos(\lambda_n y)\right]dy = a_n \int_0^L \left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L}\right)\sin(\lambda_n y)+\cos(\lambda_n y)\right]^2 dy$$

- A integral do lado direto é escrita como:

$$\int_0^L \left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right]^2 dy = \left(\frac{L}{2} \right) \left[1 + \left(\frac{Bi}{\lambda_n L} \right)^2 + \frac{2Bi}{(\lambda_n L)^2} \right]$$

- Resolvendo para a_n obtém-se:

$$a_n = \frac{\int_0^L [f(y) - T_\infty] \left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] dy}{\left(\frac{L}{2} \right) \left[1 + \left(\frac{Bi}{\lambda_n L} \right)^2 + \frac{2Bi}{(\lambda_n L)^2} \right]}$$

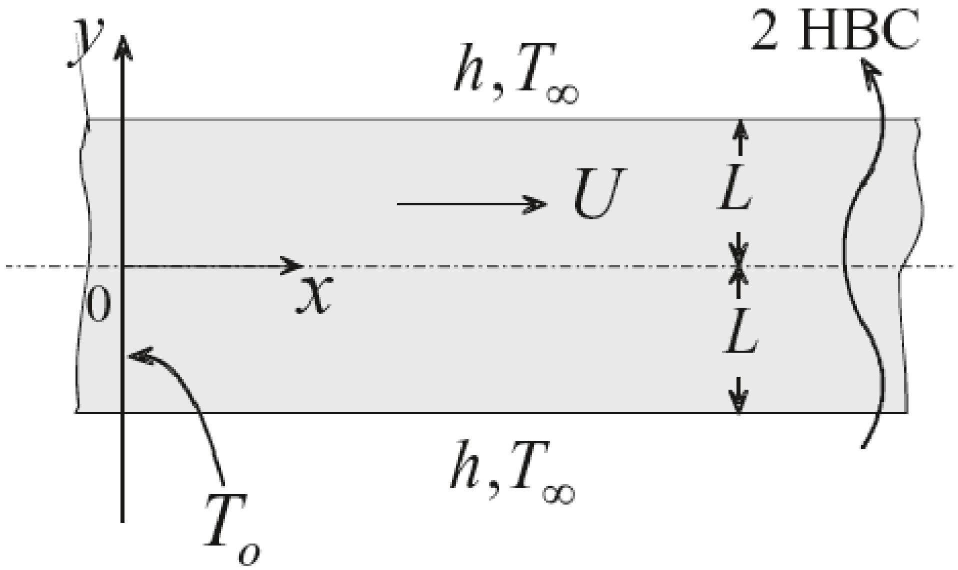
- A forma final da distribuição de temperaturas é escrita como:

$$T(x,y) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^L [f(y) - T_\infty] \left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] dy}{\left(\frac{L}{2} \right) \left[1 + \left(\frac{Bi}{\lambda_n L} \right)^2 + \frac{2Bi}{(\lambda_n L)^2} \right]} \exp(-\lambda_n x) \times$$

$$\left[\left(\frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right]$$

$$\frac{\lambda_n L}{Bi} - \frac{Bi}{\lambda_n L} = 2\cot(\lambda_n L)$$ (EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA)

EXEMPLO 3 – Uma placa semi-infinita de espessura *2L* move-se através de um forno com velocidade *U* e deixa o forno a uma temperatura T_o. Fora do forno a placa é resfriada por convecção. O coeficiente de transferência de calor é h e a temperatura ambiente é T_∞. Determine a distribuição de temperaturas bidimensional em regime permanente na placa.



(1) Formulação. Definindo a variável excesso de temperaturas:

$$\theta(x, y) = T(x, y) - T_\infty$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{\rho c_p U}{k}\frac{\partial T}{\partial x}=0\ (\text{H.}) \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}-2\beta\frac{\partial \theta}{\partial x}=0\ (\text{H.})$$

$$\beta=\frac{\rho c_p U}{2k}$$

C.C.1: $\dfrac{\partial T(x,0)}{\partial y}=0\ (\text{H.}) \Rightarrow \dfrac{\partial \theta(x,0)}{\partial y}=0\ (\text{H.})$

C.C.2: $-k\dfrac{\partial T(x,L)}{\partial y}=h[T(x,L)-T_\infty]\ (\text{Ñ.H.}) \Rightarrow -k\dfrac{\partial \theta(x,L)}{\partial y}=h\theta(x,L)\ (\text{H.})$

C.C.3: $T(\infty,y)=T_\infty\ (\text{Ñ.H.}) \Rightarrow \theta(\infty,y)=0\ (\text{H.})$

C.C.4: $T(0,y)=T_o\ (\text{Ñ.H.}) \Rightarrow \theta(0,y)=T_o-T_\infty\ (\text{Ñ.H.})$

(2) Solução. $\theta(x,y)=X(x)Y(y)$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}-\frac{2\beta}{X}\frac{dX}{dx}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\pm\lambda_n^2$$

$$\frac{d^2X_n}{dx^2}-2\beta\frac{dX_n}{dx}\pm\lambda_n^2X_n=0 \qquad \frac{d^2Y_n}{dy^2}\pm\lambda_n^2Y_n=0$$

$$\frac{d^2X_n}{dx^2}-2\beta\frac{dX_n}{dx}-\lambda_n^2X_n=0 \qquad \frac{d^2Y_n}{dy^2}+\lambda_n^2Y_n=0$$ (direção homogênea)

$$X_n(x)=A_n\exp(\beta x+\sqrt{\beta^2+\lambda_n^2}x)+B_n\exp(\beta x-\sqrt{\beta^2+\lambda_n^2}x)$$

$$Y_n(y)=C_n\sin(\lambda_n y)+D_n\cos(\lambda_n y)$$

$$\theta_n(x,y)=X_n(x)Y_n(y)$$ ou $$\theta(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)Y_n(y)$$

(3) Aplicação das condições de contorno.

C.C.1: $$\frac{\partial \theta_n}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[X_n(x)Y_n(y)\right] = X_n(x)\frac{\partial}{\partial y}\left[Y_n(y)\right] = X_n(x)\frac{\partial}{\partial y}[C_n \sin(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y)] =$$

$$X_n(x)[C_n\lambda_n \cos(\lambda_n y) - D_n\lambda_n \sin(\lambda_n y)]$$

$$\frac{\partial \theta_n(x,0)}{\partial y} = \underbrace{X_n(x)}_{\neq 0}[C_n \underbrace{\lambda_n}_{\neq 0} \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} - D_n\lambda_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0}] = 0 \Rightarrow C_n = 0$$

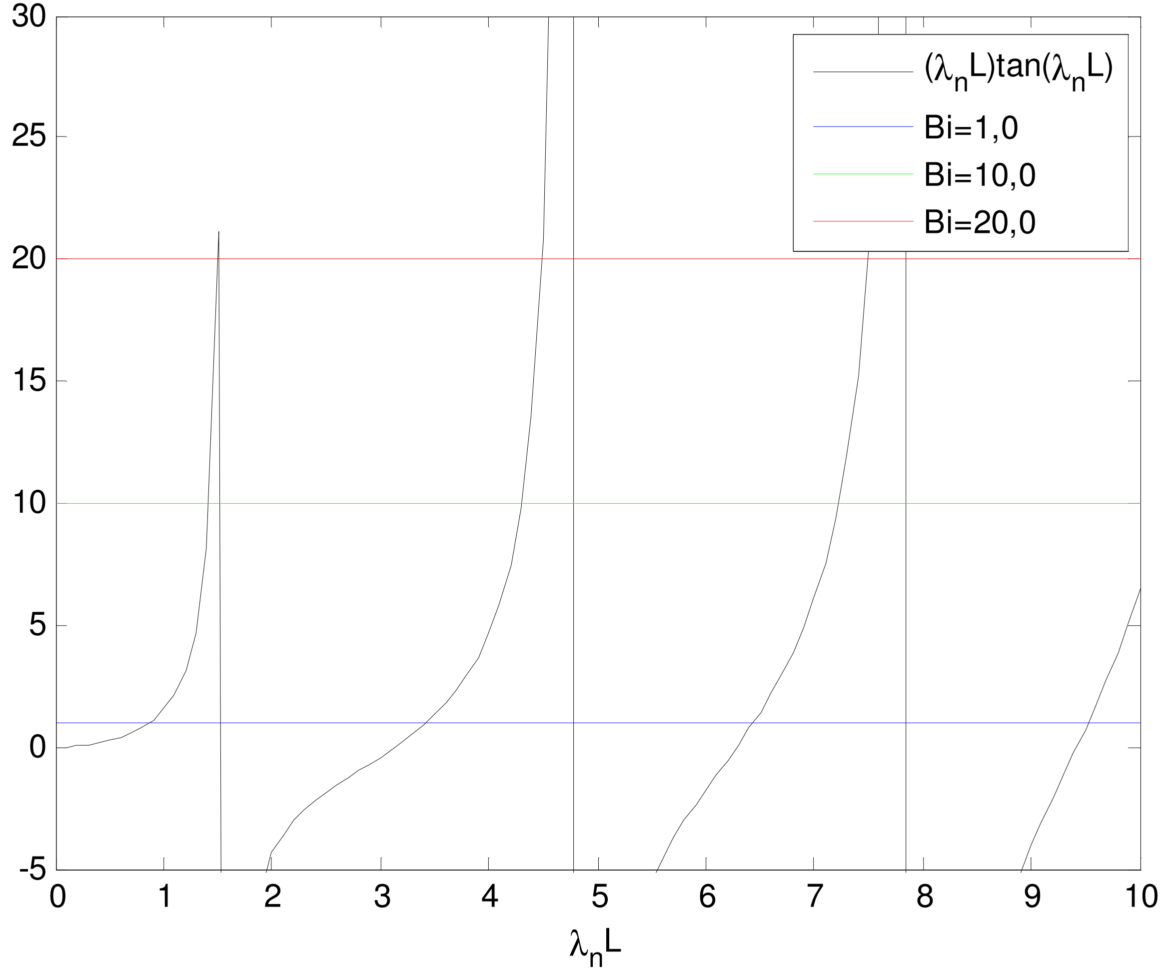
C.C.2: $$\frac{\partial \theta_n}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[X_n(x)Y_n(y)\right] = X_n(x)\frac{\partial}{\partial y}\left[Y_n(y)\right] = X_n(x)\frac{\partial}{\partial y}[C_n \sin(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y)] =$$

$$X_n(x)[C_n\lambda_n \cos(\lambda_n y) - D_n\lambda_n \sin(\lambda_n y)]$$

$$\frac{\partial \theta_n(x,L)}{\partial y} = -X_n(x)D_n\lambda_n \sin(\lambda_n L)$$

$$\theta_n(x,L) = X_n(x)Y_n(L) = X_n(x)D_n \cos(\lambda_n L)$$

$$kX_n(x)D_n\lambda_n \sin(\lambda_n L) = hX_n(x)D_n \cos(\lambda_n L) \qquad \lambda_n L \tan(\lambda_n L) = Bi$$



C.C.3: $\theta(\infty, y) = X_n(\infty)Y_n(y) = 0 \Rightarrow$

$$[A_n \underbrace{\exp(\beta x + \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2}\infty)}_{=\infty} + B_n \underbrace{\exp(\beta x - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2}\infty)}_{=0}]\underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow A_n = 0$$

$$X_n(x) = B_n \exp(\beta x - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2}x) \qquad Y_n(y) = D_n \cos(\lambda_n y)$$

$$\theta_n(x, y) = B_n D_n \exp(\beta x - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2}x)\cos(\lambda_n y)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\beta x - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2}x)\cos(\lambda_n y)$$

$$a_n = B_n D_n$$

C.C.4: $\theta(0, y) = T_o - T_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\beta 0 - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2}0)\cos(\lambda_n y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n y)$

(4) Ortogonalidade.

$$\frac{d^2Y_n}{dy^2}+\lambda_n^2 Y_n=0 \qquad \frac{d^2\phi_n}{dy^2}+a_1(y)\frac{d\phi_n}{dy}+[a_2(y)+\lambda_n^2 a_3(y)]\phi_n=0$$

$$a_1(y)=a_2(y)=0 \quad \text{e} \quad a_3(y)=1$$

$$p(y)=e^{\int a_1 dy}=e^{\int 0 dy}=1, \; q(y)=0.1=0 \text{ e } w(y)=1.1=1.$$

$$Y_n(y)=\cos(\lambda_n y) \quad \phi_n(y)=\cos(\lambda_n y) \quad \phi_m(y)=\cos(\lambda_m y)$$

$$\int_0^L (T_o-T_\infty)\underbrace{w(y)\cos(\lambda_m y)dy}_{\text{termo adicionado}} = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n y)\underbrace{w(y)\cos(\lambda_m y)dy}_{\text{termo adicionado}}$$

$$(T_o-T_\infty)\int_0^L \cos(\lambda_m y)dy = a_n \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^L \cos(\lambda_m y)\cos(\lambda_n y)dy$$

$$(T_o-T_\infty)\int_0^L \cos(\lambda_n y)dy = a_n \int_0^L \cos^2(\lambda_n y)dy$$

$$a_n = \frac{2(T_o - T_\infty)\sin(\lambda_n L)}{\lambda_n L + \sin(\lambda_n L)\cos(\lambda_n L)}$$

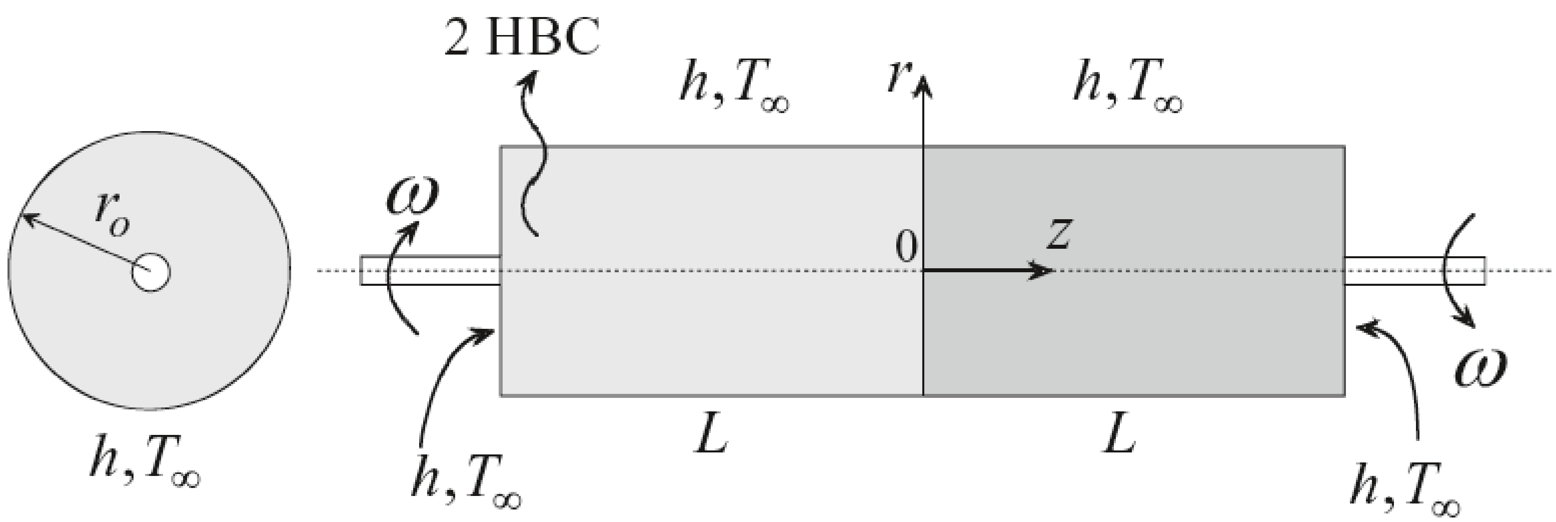
(5) Forma final da distribuição de temperaturas.

$$T(x,y) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(T_o - T_\infty)\sin(\lambda_n L)}{\lambda_n L + \sin(\lambda_n L)\cos(\lambda_n L)}\right]\exp(\beta x - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2}\,x)\cos(\lambda_n y)$$

$$\lambda_n L \tan(\lambda_n L) = Bi$$

$$\beta = \frac{\rho c_p U}{2k}$$

EXEMPLO 4 – Dois cilindros sólidos idênticos de raio r_o e comprimento L são pressionados coaxialmente com uma força F e rotacionados em direções opostas. A velocidade angular é ω e o coeficiente de atrito na interface é μ. As superfícies cilíndricas trocam calor por convecção com um meio a T_∞ e coeficiente de convecção h. Determine a temperatura da interface.



(1) Formulação. Definindo $\theta(r,z) = T(r,z) - T_\infty$ tem-se que:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0 \text{ (H.)}$$

$$\text{C.C.1: } \frac{\partial(0,z)}{\partial r} = 0 \text{(H.)}$$

$$\text{C.C.2: } -k\frac{\partial\theta(r_o,z)}{\partial r} = h\theta(r_o,z) \text{(H.)}$$

$$\text{C.C.3: } -k\frac{\partial\theta(r,L)}{\partial z} = h\theta(r,L) \text{(H.)}$$

$$\text{C.C.4: } -k\frac{\partial\theta(r,0)}{\partial z} = \mu\frac{F}{\pi r_o^2}\omega r = f(r) \text{(N.H.)}$$

(2) Solução.

$$\theta(r,z) = R(r)Z(z)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_k}{dr}\right) \pm \lambda_k^2 R_k = 0$$ (direção homogênea) $$\frac{d^2 Z_k}{dz^2} \pm \lambda_k^2 Z_k = 0$$

$$r^2 \frac{d^2 R_k}{dr^2} + r\frac{dR_k}{dr} + \lambda_k^2 r^2 R_k = 0 \qquad \frac{d^2 Z_k}{dz^2} - \lambda_k^2 Z_k = 0$$

$$R_k(r) = A_k J_0(\lambda_k r) + B_k Y_0(\lambda_k r) \qquad Z_k(z) = C_k \sinh(\lambda_k z) + D_k \cosh(\lambda_k z)$$

$$\theta(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) Z_k(z)$$

(3) Aplicação das condições de contorno.

C.C.1: $$\frac{\partial \theta_k}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[R_k(r) Z_k(z)\right] = Z_k(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[R_k(r)\right] = Z_k(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[A_k J_0(\lambda_k r) + B_k Y_0(\lambda_k r)\right] =$$

$$Z_k(z)\lambda_k\left[-A_k J_1(\lambda_k r) - B_k Y_1(\lambda_k r)\right]$$

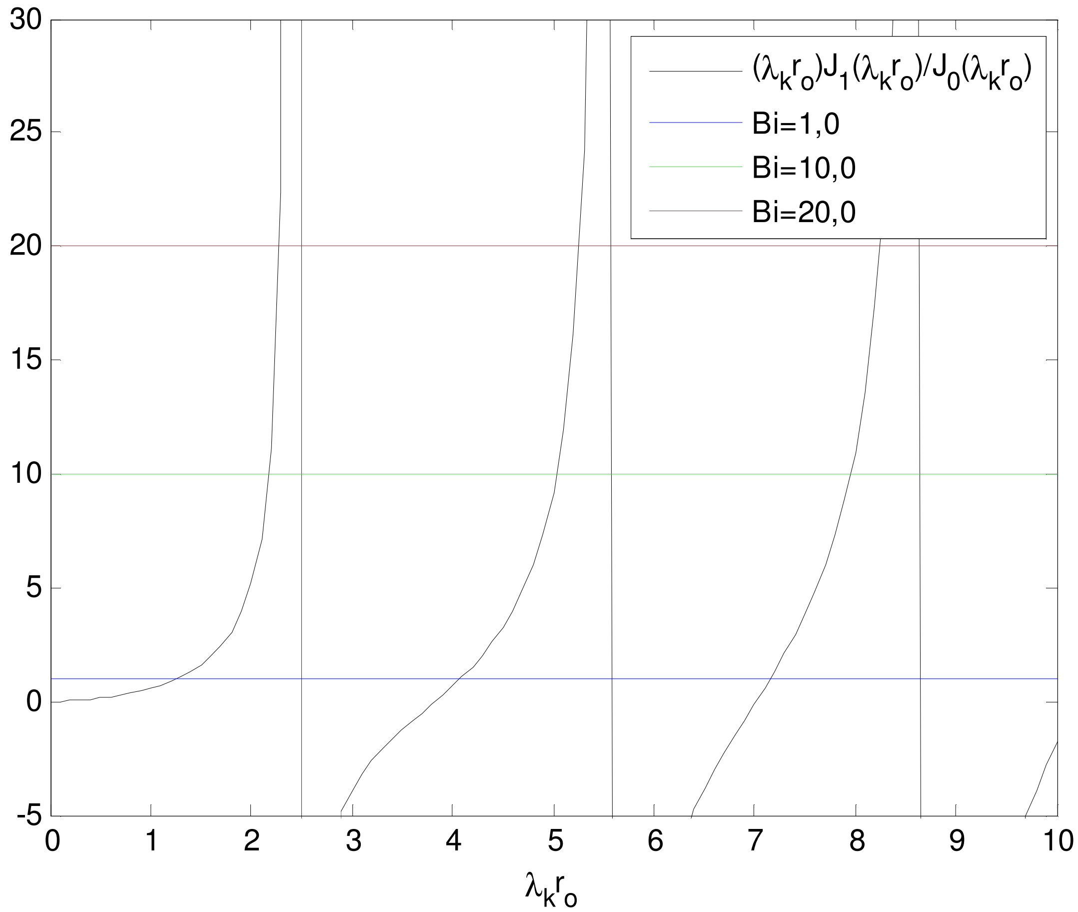
$$\frac{\partial \theta_k(0,z)}{\partial r} = \underbrace{Z_k(z)}_{\neq 0}\left[-A_k \underbrace{J_1(\lambda_k 0)}_{=0} - B_k \underbrace{Y_1(\lambda_k 0)}_{=\infty}\right] = 0 \Rightarrow B_k = 0$$

C.C.2: $$\frac{\partial \theta_k(r_o,z)}{\partial r} = Z_k \lambda_k(z)\left[-A_k J_1(\lambda_k r_o) - \underbrace{B_k}_{=0} Y_1(\lambda_k r_o)\right] = -Z_k(z) A_k \lambda_k J_1(\lambda_k r_o)$$

$$\theta_k(r_o,z) = R_k(r_o) Z_k(z) = [A_k J_0(\lambda_k r_o) + \underbrace{B_k}_{=0} Y_0(\lambda_k r_o)] Z_k(z) = Z_k(z) A_k J_0(\lambda_k r_o)$$

$$-k[-Z_k(z)A_k\lambda_k J_1(\lambda_k r_o)] = hZ_k(z)A_k J_0(\lambda_k r_o)$$

$$(\lambda_k r_o)\frac{J_1(\lambda_k r_o)}{J_0(\lambda_k r_o)} = Bi_{r_o}$$



C.C.3: $$\frac{\partial\theta_k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[R_k(r)Z_k(z)] = R_k(r)\frac{\partial}{\partial z}[Z_k(z)] = R_k(r)\frac{\partial}{\partial z}[C_k\sinh(\lambda_k z) + D_k\cosh(\lambda_k z)] =$$

$$R_k(r)[C_k\lambda_k\cosh(\lambda_k z) + D_k\lambda_k\sinh(\lambda_k z)]$$

$$\frac{\partial\theta_k(r,L)}{\partial z} = R_k(r)[C_k\lambda_k\cosh(\lambda_k L) + D_k\lambda_k\sinh(\lambda_k L)]$$

$$\theta_k(r,L) = R_k(r)Z_k(L) = R_k(r)[C_k\sinh(\lambda_k L) + D_k\cosh(\lambda_k L)]$$

$$-kR_k(r)[C_k\lambda_k\cosh(\lambda_k L) + D_k\lambda_k\sinh(\lambda_k L)] = hR_k(r)[C_k\sinh(\lambda_k L) + D_k\cosh(\lambda_k L)]$$

$$D_k = -C_k\frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L)\sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L)\cosh(\lambda_k L)} \qquad Bi_L = hL/k$$

$$R_k(r) = A_k J_0(\lambda_k r)$$

$$Z_k(z) = C_k\left[\sinh(\lambda_k z) - \frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L)\sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L)\cosh(\lambda_k L)}\cosh(\lambda_k z)\right]$$

$$\theta(r,z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k J_0(\lambda_k r)\left[\sinh(\lambda_k z)-\frac{\cosh(\lambda_k L)+(Bi_L/\lambda_k L)\sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L)+(Bi_L/\lambda_k L)\cosh(\lambda_k L)}\cosh(\lambda_k z)\right]$$

$$a_k = A_k C_k$$

C.C.4:

$$\frac{\partial\theta(r,z)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}a_k J_0(\lambda_k r)\left[\sinh(\lambda_k z)-\frac{\cosh(\lambda_k L)+(Bi_L/\lambda_k L)\sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L)+(Bi_L/\lambda_k L)\cosh(\lambda_k L)}\cosh(\lambda_k z)\right]\right\}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k \lambda_k J_0(\lambda_k r)\left[\cosh(\lambda_k z)-\frac{\cosh(\lambda_k L)+(Bi_L/\lambda_k L)\sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L)+(Bi_L/\lambda_k L)\cosh(\lambda_k L)}\sinh(\lambda_k z)\right]$$

$$\frac{\partial\theta(r,0)}{\partial z}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k \lambda_k J_0(\lambda_k r)\left[\cosh(\lambda_k 0)-\frac{\cosh(\lambda_k L)+(Bi_L/\lambda_k L)\sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L)+(Bi_L/\lambda_k L)\cosh(\lambda_k L)}\sinh(\lambda_k 0)\right]=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k \lambda_k J_0(\lambda_k r) \qquad -k\sum_{k=0}^{\infty}a_k \lambda_k J_0(\lambda_k r)=f(r)$$

(4) Ortogonalidade.

$$\frac{d^2R_k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_k}{dr}+\lambda_k^2R_k=0 \qquad \frac{d^2\phi_k}{dr^2}+a_1(r)\frac{d\phi_k}{dr}+[a_2(r)+\lambda_k^2a_3(r)]\phi_k=0$$

$$a_1(r)=1/r,\ a_2(r)=0 \quad \text{e} \quad a_3(r)=1$$

$$p(r)=e^{\int a_1 dr}=e^{\int \frac{dr}{r}}=r,\quad q(r)=0.r=0 \ \text{e}\ w(r)=1.r=r$$

$$R_k(r)=J_0(\lambda_k r) \qquad \phi_k(r)=J_0(\lambda_k r) \qquad \phi_i(r)=J_0(\lambda_i r)$$

$$\int_0^{r_o} f(r)\underbrace{w(r)J_0(\lambda_i r)dr}_{\text{termo adicionado}}=-\int_0^{r_o} k\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_k J_0(\lambda_k r)\underbrace{w(r)J_0(\lambda_i r)dr}_{\text{termo adicionado}}$$

$$\int_0^{r_o} f(r)rJ_0(\lambda_i r)dr=-ka_k\lambda_k\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{r_o} rJ_0(\lambda_k r)J_0(\lambda_i r)dr$$

$$\int_0^{r_o} f(r)rJ_0(\lambda_k r)dr=-ka_k\lambda_k\int_0^{r_o} rJ_0^2(\lambda_k r)dr$$

$$a_k = -\frac{2\lambda_k \int_0^{r_o} f(r) r J_0(\lambda_k r) dr}{k[(hr_o/k)^2 + (\lambda_k r_o)^2] J_0^2(\lambda_k r_o)}$$

- Distribuição de temperaturas:

$$T(r,z) = T_\infty - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k \int_0^{r_o} f(r) r J_0(\lambda_k r) dr}{k[(hr_o/k)^2 + (\lambda_k r_o)^2] J_0^2(\lambda_k r_o)} J_0(\lambda_k r) \Big[\sinh(\lambda_k z) -$$

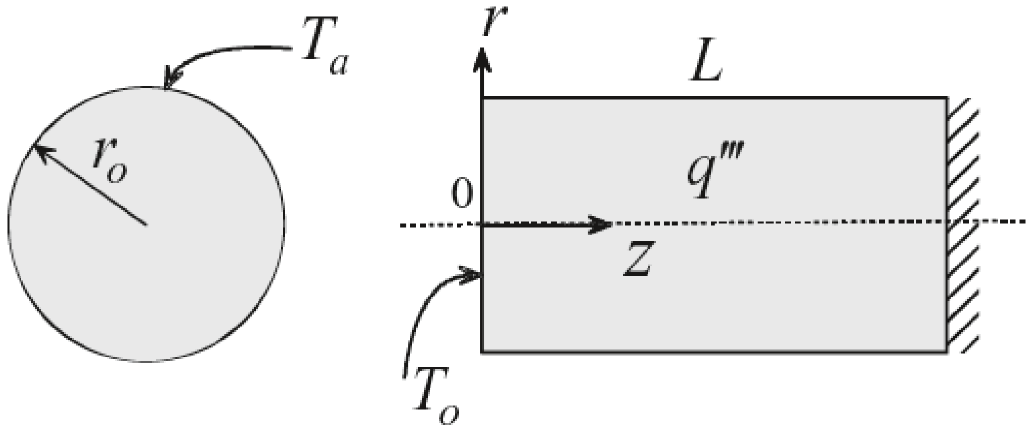
$$\frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L)\sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L)\cosh(\lambda_k L)} \cosh(\lambda_k z)\Big]$$

- A temperatura na interface é determinada substituindo $z = 0$ na expressão anterior:

$$T(r,0) = T_\infty +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k \int_0^{r_o} f(r) r J_0(\lambda_k r) dr}{k[(hr_o/k)^2 + (\lambda_k r_o)^2] J_0^2(\lambda_k r_o)} \left[\frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L)\sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L)\cosh(\lambda_k L)}\right] J_0(\lambda_k r)$$

EXEMPLO 5 – Em um cilindro sólido estacionário de raio r_o e comprimento L existe geração de energia térmica volumétrica a uma taxa uniforme $\dot{q}$. Uma das superfícies planas está mantida a T_o enquanto a outra superfície está isolada. A superfície cilíndrica está mantida a uma temperatura T_a. Determine a distribuição de temperaturas no cilindro em regime permanente.



(1) Formulação. Definindo $\theta(r,z) = T(r,z) - T_a$ obtém-se:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \text{ (N.H.)}$$

C.C.1: $\dfrac{\partial\theta(0,z)}{\partial r} = 0$ (H.) C.C.2: $\theta(r_o, z) = 0$ (H.)

C.C.3: $\dfrac{\partial\theta(r,L)}{\partial z} = 0$ (H.) C.C.4: $\theta(r,0) = T_o - T_a$ (N.H.)

(2) Solução. A E.D.P. é não-homogênea devido ao termo de geração de energia. Assim, nós não podemos prosseguir diretamente com o método da separação de variáveis. Ao invés disso, podemos assumir uma solução na forma:

$\theta(r,z) = \psi(r,z) + \phi(z)$ (solução composta) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \dfrac{d^2\phi}{dz^2} + \dfrac{\dot{q}}{k} = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}=0 \text{ (E.D.P.H.)} \qquad \frac{d^2\phi}{dz^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0 \text{ (E.D.O.N.H.)}$$

C.C.1: $\frac{\partial \theta(0,z)}{\partial r}=\frac{\partial \psi(0,z)}{\partial r}+\underbrace{\frac{\partial \phi(z)}{\partial r}}_{=0}=0 \Rightarrow \frac{\partial \psi(0,z)}{\partial r}=0$ (H.)

C.C.2: $\theta(r_o,z)=\psi(r_o,z)+\phi(z)=0 \Rightarrow \psi(r_o,z)=-\phi(z)$ (N.H.)

C.C.3: $\frac{\partial \theta(r,L)}{\partial z}=\frac{\partial \psi(r,L)}{\partial z}+\underbrace{\frac{d\phi(L)}{dz}}_{=0}=0$

(C.C.1 para ϕ) $\frac{d\phi(L)}{dz}=0$ e $\frac{\partial \psi(r,L)}{\partial z}=0$ (H.)

C.C.4: $\theta(r,0)=\psi(r,0)+\phi(0)=T_o-T_a$

(CONVENIÊNCIA) $\psi(r,0)=0$ (H.) e $\phi(0)=T_o-T_a$ (C.C.2 para ϕ)

- Note que a separação das condições de contorno é guiada pela regra que, quando possível, as condições de contorno da equação diferencial parcial são escolhidas tal que elas sejam homogêneas.

- 1º PROBLEMA:

(E.D.O.N.H.) $\dfrac{d^2\phi}{dz^2}+\dfrac{\dot{q}}{k}=0$ C.C.1: $\dfrac{d\phi(L)}{dz}=0$ C.C.2: $\phi(0)=T_o-T_a$

$$\phi(z)=-\frac{\dot{q}z^2}{2k}+Ez+F$$

$$\frac{d\phi(L)}{dz}=-\frac{\dot{q}L}{k}+E=0\Rightarrow E=\frac{\dot{q}L}{k} \qquad \phi(0)=-\frac{\dot{q}0^2}{2k}+E0+F=T_o-T_a\Rightarrow F=T_o-T_a$$

$$\phi(z)=\frac{\dot{q}L^2}{2k}\left[2\left(\frac{z}{L}\right)-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right]+(T_o-T_a)$$

- 2º PROBLEMA:

$$\text{(E.D.P.H.)}\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0$$

$$\text{C.C.1: } \frac{\partial\psi(0,z)}{\partial r}=0 \text{ (H.)} \quad \text{C.C.2: } \psi(r_o,z)=-\phi(z) \text{ (N.H.)}$$

$$\text{C.C.3: } \frac{\partial\psi(r,L)}{\partial z}=0 \text{ (H.)} \quad \text{C.C.4: } \psi(r,0)=0 \text{ (H.)}$$

$$\psi(r,z)=R(r)Z(z)$$

$$\frac{d^2Z_k}{dz^2}\pm\lambda_k^2 Z_k=0 \text{ (direção homogênea)} \quad r^2\frac{d^2R_k}{dr^2}+r\frac{dR_k}{dr}\pm\lambda_k^2 r^2 R_k=0$$

$$\frac{d^2Z_k}{dz^2}+\lambda_k^2 Z_k=0 \quad r^2\frac{d^2R_k}{dr^2}+r\frac{dR_k}{dr}-\lambda_k^2 r^2 R_k=0$$

$$Z_k(z)=A_k\sin(\lambda_k z)+B_k\cos(\lambda_k z) \quad R_k(r)=C_k I_0(\lambda_k r)+D_k K_0(\lambda_k r)$$

$$\psi(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}R_k(r)Z_k(z)$$

(3) Aplicação das condições de contorno.

C.C.1: $$\frac{\partial\psi_k(r,z)}{\partial r}=\frac{\partial[R_k(r)Z_k(z)]}{\partial r}=Z_k(z)\frac{\partial[R_k(r)]}{\partial r}=Z_k(z)\frac{\partial}{\partial r}[C_kI_0(\lambda_kr)+D_kK_0(\lambda_kr)]$$

$$=Z_k(z)\lambda_k\frac{\partial}{\partial r}[C_kI_1(\lambda_kr)-D_kK_1(\lambda_kr)]$$

$$\frac{\partial\psi_k(0,z)}{\partial r}=\underbrace{Z_k(z)}_{\neq0}\underbrace{\lambda_k}_{\neq0}[C_k\underbrace{I_1(\lambda_k0)}_{=0}-D_k\underbrace{K_1(\lambda_k0)}_{=\infty}]=0\Rightarrow D_k=0$$

C.C.4: $$\psi_k(r,0)=R_k(r)Z_k(0)=0\Rightarrow\underbrace{R_k(r)}_{\neq0}[A_k\underbrace{\sin(\lambda_k0)}_{=0}+B_k\underbrace{\cos(\lambda_k0)}_{=1}]=0\Rightarrow B_k=0$$

C.C.3: $$\frac{\partial \psi_k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[R_k(r)Z_k(z)] = R_k(r)\frac{\partial}{\partial z}[Z_k(z)] = R_k(r)\frac{\partial}{\partial z}[A_k \sin(\lambda_k z) + B_k \cos(\lambda_k z)] =$$

$$R_k(r)\lambda_k[A_k \cos(\lambda_k z) - B_k \sin(\lambda_k z)]$$

$$\frac{\partial \psi_k(r,L)}{\partial z} = \underbrace{R_k(r)}_{\neq 0}\underbrace{\lambda_k}_{\neq 0}[\underbrace{A_k}_{\neq 0} \cos(\lambda_k L) - \underbrace{B_k}_{=0} \sin(\lambda_k L)] = 0 \Rightarrow \cos(\lambda_k L) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_k L = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \Rightarrow \lambda_k = \frac{\pi}{2L}, \frac{3\pi}{2L}, \frac{5\pi}{2L}, \ldots \Rightarrow \lambda_k = \frac{(2j-1)\pi}{2L}, \; j = 1,2,3,\ldots$$

$$Z_k(z) = A_k \sin(\lambda_k z) \qquad R_k(r) = C_k I_0(\lambda_k r)$$

$$\psi(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k I_0(\lambda_k r)\sin(\lambda_k z) \qquad a_k = A_k C_k$$

$$\text{C.C.2:}\ -\frac{\dot{q}L^2}{2k}\left[2\left(\frac{z}{L}\right)-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right]-(T_o-T_a)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k I_0(\lambda_k r_o)\sin(\lambda_k z)$$

(4) Ortogonalidade.

$$\frac{d^2Z_k}{dz^2}+\lambda_k^2 Z_k=0 \qquad \frac{d^2\phi_k}{dz^2}+a_1(z)\frac{d\phi_k}{dz}+[a_2(z)+\lambda_k^2 a_3(z)]\phi_k=0$$

$$a_1(z)=a_2(z)=0 \quad \text{e} \quad a_3(z)=1$$

$$p(z)=e^{\int a_1 dz}=e^{\int 0 dz}=1,\ q(z)=0.1=0 \ \text{e}\ w(z)=1.1=1.$$

$$Z_k(z)=\sin(\lambda_k z) \qquad \phi_k(z)=\sin(\lambda_k z) \qquad \phi_i(z)=\sin(\lambda_i z)$$

$$\int_0^L \left\{ -\frac{\dot{q}L^2}{2k}\left[2\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right] - (T_o - T_a) \right\} \underbrace{w(z)\sin(\lambda_i z)dz}_{\text{termo adicionado}} =$$

$$\int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} a_k I_0(\lambda_k r_o)\sin(\lambda_k z) \underbrace{w(z)\sin(\lambda_i z)dz}_{\text{termo adicionado}}$$

$$\int_0^L \left\{ -\frac{\dot{q}L^2}{2k}\left[2\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right] - (T_o - T_a) \right\} \sin(\lambda_i z)dz = a_k I_0(\lambda_k r_o) \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^L \sin(\lambda_k z)\sin(\lambda_i z)dz$$

(ORTOGONALIDADE)

$$\int_0^L \left\{ -\frac{\dot{q}L^2}{2k}\left[2\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right] - (T_o - T_a) \right\} \sin(\lambda_k z)dz = a_k I_0(\lambda_k r_o) \int_0^L \sin^2(\lambda_k z)dz$$

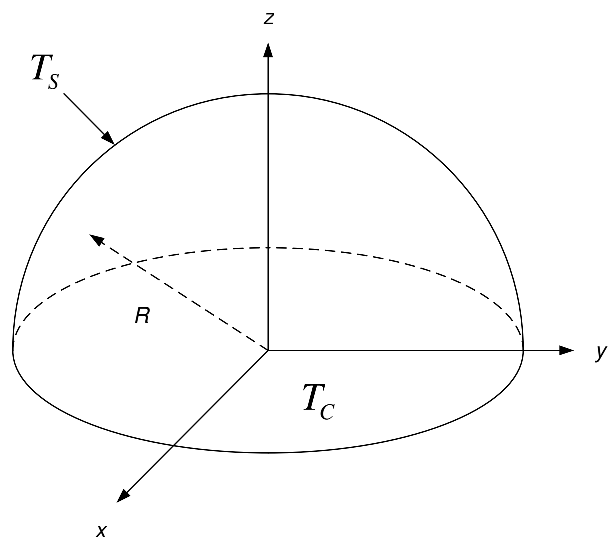
$$a_k = \frac{-2}{(\lambda_k L) I_0(\lambda_k r_o)} [(T_o - T_a) + \dot{q}/k\lambda_k^2]$$

$$T(r,z) = T_a + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{-2}{(\lambda_k L) I_0(\lambda_k r_o)} [(T_o - T_a) + \dot{q} / k\lambda_k^2] \right\} I_0(\lambda_k r) \sin(\lambda_k z) +$$

$$\frac{\dot{q} L^2}{2k} \left[2\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right] + (T_o - T_a)$$

$$\lambda_k = \frac{(2j-1)\pi}{2L}, \; j = 1,2,3,...$$

EXEMPLO 6 – Uma gota condensando sobre uma superfície plana horizontal pode ser modelada como um hemisfério de raio R. A temperatura da base da gota, T_C, é assumida menor que a temperatura da superfície convexa. Pode-se também assumir que a temperatura da superfície convexa é igual a temperatura de saturação do líquido, T_S. Determine a distribuição de temperaturas na gota. Despreze efeitos de convecção e considere que a taxa de variação da massa da gota com o tempo é desprezível.



(1) Equações governantes.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=0 \text{ (H.)}$$

$$\text{(1) } T(R,\theta)=T_S \text{ (N.H.)} \quad \text{(2) } \frac{\partial T(0,\theta)}{\partial r}=0 \text{ (H.)}$$

$$\text{(3) } T(r,\pi/2)=T_C \text{ (N.H.)} \quad \text{(4) } \frac{\partial T(r,0)}{\partial\theta}=0 \text{ (H.)}$$

$$\Theta(r,\theta)=T(r,\theta)-T_C \text{ (EXCESSO DE TEMPERATURAS)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=0 \text{ (H.)}$$

$$\text{(1) } \Theta(R,\theta)=T_S-T_C=\Theta_S \text{ (N.H.)} \quad \text{(2) } \frac{\partial\Theta(0,\theta)}{\partial r}=0 \text{ (H.) ou } \Theta(0,\theta)=\text{finito}$$

(3) $\Theta(r,\pi/2)=0$ (H.) (4) $\dfrac{\partial\Theta(r,0)}{\partial\theta}=0$ (H.) ou $\Theta(r,0)=\text{finito}$

(2) Solução produto.

$$\Theta(r,\theta)=G(r)H(\theta)$$

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right)=-\frac{1}{H\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial H}{\partial\theta}\right)=\pm\lambda^2$$

$$r^2\frac{d^2G}{dr^2}+2r\frac{dG}{dr}-\lambda^2G=0$$ (EQUAÇÃO DE EULER)

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right)+\lambda^2(\sin\theta)H=0$$ (EQUAÇÃO DE LEGENDRE)

(3) Solução das equações diferenciais ordinárias. A solução geral da equação de Euler é obtida fazendo a transformação $v = \ln r$ de tal forma que as possam ser reescritas na seguinte forma:

$$\frac{dG}{dr} = \frac{dG}{dv}\frac{dv}{dr} = \frac{dG}{dv}\frac{d}{dr}(\ln r) = \frac{1}{r}\frac{dG}{dv}$$

$$\frac{d^2G}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{dG}{dv}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dG}{dv}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dG}{dv} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{dG}{dv}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dG}{dv} + \frac{1}{r}\frac{d(dG/dv)}{dr}$$

$$\frac{d(dG/dv)}{dr} = \frac{d(dG/dv)}{dv}\frac{dv}{dr} = \frac{d^2G}{dv^2}\frac{d}{dr}(\ln r) = \frac{1}{r}\frac{d^2G}{dv^2}$$

$$\frac{d^2G}{dr^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{dG}{dv} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2G}{dv^2}$$

$$r^2\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dG}{dv}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2G}{dv^2}\right)+2r\left(\frac{1}{r}\frac{dG}{dv}\right)-\lambda^2 G=0$$

$$\frac{d^2G}{dv^2}+\frac{dG}{dv}-\lambda^2 G=0$$ (E.D.O. COEFICIENTES CONSTANTES)

$$n^2+n-\lambda^2=0 \qquad n_1=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda^2} \text{ e } n_2=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda^2}$$

- Por simplicidade define-se $n_1=n$ de tal forma n_2 possa ser reescrito como:

$$n_2=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda^2}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda^2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda^2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda^2}=n_1-2\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda^2}$$

- Substituindo $\sqrt{1/4+\lambda^2}=-1/2-n_2$ e rearranjando obtém-se:

$$n_2=n_1-2\left(-\frac{1}{2}-n_2\right)=n_1+1+2n_2 \Rightarrow -n_2=n_1+1 \Rightarrow n_2=-(n_1+1)=-(n+1)$$

- Além disso, o produto $n(n+1)$ fornece que:

$$n(n+1) = n_2^2 + n_2 = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} + \frac{1}{4} + \lambda^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} = \lambda^2$$

- Para raízes reais e distintas a solução geral da equação de Euler é escrita como:

$$G(v) = Ae^{n_1 v} + Be^{n_2 v} = Ae^{nv} + Be^{-(n+1)v} = Ae^{nv} + \frac{B}{e^{(n+1)v}}$$

$$G(r) = Ae^{n \ln r} + \frac{B}{e^{(n+1)\ln r}} = Ae^{\ln_r^n} + \frac{B}{e^{\ln_r^{n+1}}} = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}$$

- Já a solução da equação de Legendre é obtida definindo inicialmente a seguinte variável de transformação:

$$\eta = \cos\theta$$

$$\frac{dH}{d\theta} = \frac{dH}{d\eta}\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{dH}{d\eta}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta\frac{dH}{d\eta}$$ (REGRA DA CADEIA)

$$\frac{d}{d\theta}\left(-\sin^2\theta\frac{dH}{d\eta}\right) + n(n+1)(\sin\theta)H = 0$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[(\cos^2\theta - 1)\frac{dH}{d\eta}\right]\frac{d\eta}{d\theta} + n(n+1)(\sin\theta)H = 0$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dH}{d\eta}\right]\sin\theta + n(n+1)(\sin\theta)H = 0$$

$$(1-\eta^2)\frac{d^2H}{d\eta^2} - 2\eta\frac{dH}{d\eta} + n(n+1)H = 0$$

- A solução geral, conforme o Apêndice, é escrita como:

$$H(\theta) = CP_n(\eta) + DQ_n(\eta) = CP_n(\cos\theta) + DQ_n(\cos\theta)$$

$$\Theta(r,\theta) = G(r)H(\theta)$$

$$\Theta(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right)[CP_n(\cos\theta) + DQ_n(\cos\theta)]$$

(4) Aplicação das condições de contorno. Para completar a solução, as constantes A, B, C e D devem ser determinados.

- Aplicando a condição de contorno 2 obtém-se:

$$\Theta(0,\theta) = \underbrace{H(\theta)}_{\neq 0}\left(\underbrace{A0^n}_{=0} + \frac{B}{\underbrace{0^{n+1}}_{=\infty}}\right) = \text{finito} \Rightarrow B = 0$$

- Aplicando a condição de contorno 4 obtém-se:

$$\Theta(r,0) = G(r)[CP_n(\cos 0) + DQ_n(\cos 0)] = \underbrace{G(r)}_{\neq 0}[C\underbrace{P_n(1)}_{=1} + D\underbrace{Q_n(1)}_{\infty}] = \text{finito} \Rightarrow D = 0$$

- Até o momento a solução é escrita como:

$$\Theta(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Ar^n CP_n(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} ar^n P_n(\eta) \qquad a = AC$$

- Deve ser notado que não foi necessária a aplicação da condição de contorno 3 visto que a constante de separação e as raízes da equação características foram relacionadas entre si, eliminando a necessidade de uma equação para λ.

- Aplicando a condição de contorno 1 obtém-se:

$$\Theta(R,\theta) = \Theta_S = \sum_{n=1}^{\infty} aR^n P_n(\eta)$$

(5) Ortogonalidade.

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}-\frac{2\eta}{(1-\eta^2)}\frac{dH}{d\eta}+\frac{n(n+1)}{(1-\eta^2)}H=0$$

$$\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+a_1(\eta)\frac{d\phi}{d\eta}+[a_2(\eta)+n(n+1)a_3(\eta)]\phi=0$$

$$a_1(\eta)=-\frac{2\eta}{1-\eta^2} \qquad a_2(\eta)=0 \qquad a_3(\eta)=\frac{1}{1-\eta^2}$$

$$p(\eta)=e^{\int a_1 d\eta}=e^{\int\left(-\frac{2\eta}{1-\eta^2}\right)d\eta}=e^{[\ln(\eta-1)+\ln(\eta+1)]}=e^{\ln[(\eta-1)(\eta+1)]}=\eta^2-1$$

$$q(\eta) = a_2(\eta)\,p(\eta) = 0 \times \frac{1}{\eta^2 - 1} = 0 \qquad w(\eta) = a_3(\eta)\,p(\eta) = \frac{\eta^2 - 1}{1 - \eta^2} = -1$$

$$H(\theta) = P_n(\eta) \qquad \phi_n(\eta) = P_n(\eta) \qquad \phi_m(\eta) = P_m(\eta)$$

$$\int_0^1 \Theta_S \underbrace{w(\eta) P_m(\eta) d\eta}_{\text{termo adicionado}} = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} aR^n P_n(\eta) \right] \underbrace{w(\eta) P_m(\eta) d\eta}_{\text{termo adicionado}}$$

$$\Theta_S \int_0^1 P_m(\eta) d\eta = aR^n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 P_n(\eta) P_m(\eta) d\eta$$

(ORTOGONALIDADE)

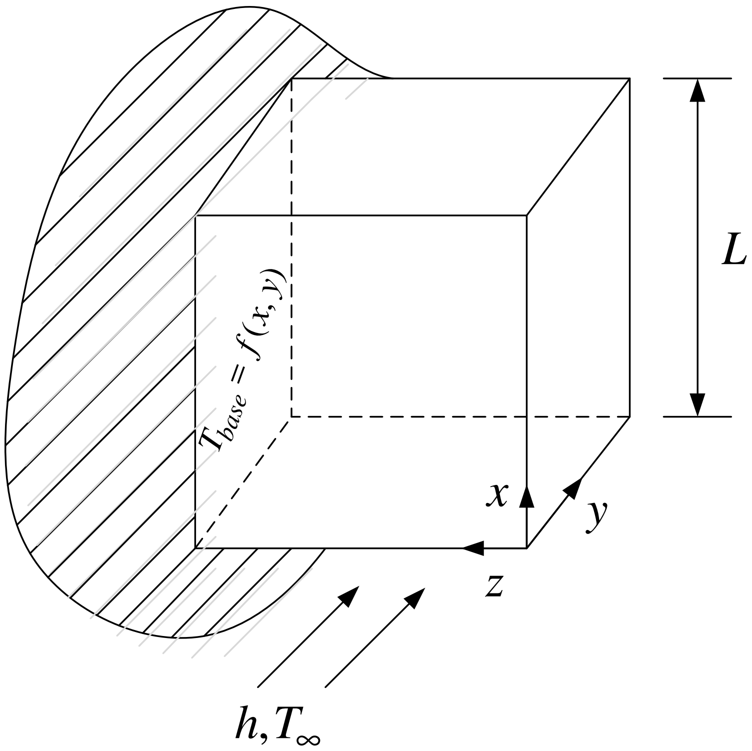
$$a = \frac{\Theta_S \int_0^1 P_n(\eta) d\eta}{R^n \int_0^1 [P_n(\eta)]^2 d\eta} = \frac{\Theta_S}{R^n} [P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)]$$

$$\Theta(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_S}{R^n} [P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)] r^n P_n(\eta)$$

(DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS)

$$T(r,\theta) = T_C + (T_S - T_C) \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)] \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

EXEMPLO 6 – Um sólido estacionário no formato de um cubo com lados de comprimento L e k constante está fixado sobre uma superfície. A distribuição de temperaturas na base do sólido é denotada por $f(x, y)$. Um fluido refrigerante com temperatura T_∞ e coeficiente de transferência de calor h elevado escoa sobre o cubo. Obtenha distribuição de temperaturas $T(x, y, z)$ em regime permanente no sólido.



(1) Formulação.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \text{ (H.)}$$

C.C.1: $T(x, y, 0) = T_\infty$ (N.H.)

C.C.2: $T(x, y, L) = f(x, y)$ (N.H.)

C.C.3: $T(x, 0, z) = T_\infty$ (N.H.)

C.C.4: $T(x, L, z) = T_\infty$ (N.H.)

C.C.5: $T(0, y, z) = T_\infty$ (N.H.)

C.C.6: $T(L, y, z) = T_\infty$ (N.H.)

$\theta(x, y, z) = T(x, y, z) - T_\infty$ (EXCESSO DE TEMPERATURAS)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0 \text{ (H.)}$$

C.C.1: $\theta(x, y, 0) = 0$ (H.) C.C.2: $\theta(x, y, L) = f(x, y) - T_\infty = \phi(x, y)$ (N.H.)

C.C.3: $\theta(x, 0, z) = 0$ (H.) C.C.4: $\theta(x, L, z) = 0$ (H.) (y é direção homogênea)

C.C.5: $\theta(0, y, z) = 0$ (H.) C.C.6: $\theta(L, y, z) = 0$ (H.) (x é direção homogênea)

(2) Solução.

$$\theta(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{\partial^2[X(x)Y(y)Z(z)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2[X(x)Y(y)Z(z)]}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta[X(x)Y(y)Z(z)]}{\partial z^2} = 0$$

$$Y(y)Z(z)\frac{\partial^2[X(x)]}{\partial x^2} + X(x)Z(z)\frac{\partial^2[Y(y)]}{\partial y^2} + X(x)Y(y)\frac{\partial^2\theta[Z(z)]}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2[X(x)]}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2[Y(y)]}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2[Z(z)]}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2[Z(z)]}{\partial z^2} = -\underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2[X(x)]}{\partial x^2}}_{\pm\lambda_n^2} - \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2[Y(y)]}{\partial y^2}}_{\pm\alpha_m^2}$$

$$-\frac{1}{X_n(x)}\frac{\partial^2[X_n(x)]}{\partial x^2}=\pm\lambda_n^2 \Rightarrow \frac{d^2X_n}{dx^2}\pm\lambda_n^2X_n=0$$ (DIREÇÃO HOMOGÊNEA)

$$-\frac{1}{Y_m(x)}\frac{\partial^2[Y_m(y)]}{\partial y^2}=\pm\alpha_m^2 \Rightarrow \frac{d^2Y_m}{dy^2}\pm\alpha_m^2Y_m=0$$ (DIREÇÃO HOMOGÊNEA)

$$\frac{1}{Z_{nm}}\frac{\partial^2[Z_{nm}(z)]}{\partial z^2}=\pm(\lambda_n^2+\alpha_m^2) \Rightarrow \frac{d^2Z_{nm}}{dz^2}\pm(\lambda_n^2+\alpha_m^2)Z_{nm}=0$$

$$\frac{d^2X_n}{dx^2}+\lambda_n^2X_n=0 \qquad \frac{d^2Y_m}{dy^2}+\alpha_m^2Y_m=0 \qquad \frac{d^2Z_{nm}}{dz^2}-(\lambda_n^2+\alpha_m^2)Z_{nm}=0$$

$$X_n(x)=A_n\sin(\lambda_n x)+B_n\cos(\lambda_n x)$$

$$Y_m(y)=C_m\sin(\alpha_m y)+D_m\cos(\alpha_m y)$$

$$Z_{nm}(z) = E_{nm}\sinh(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha_m^2}\,z) + F_{nm}\cosh(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha_m^2}\,z)$$

$$\theta(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[A_n\sin(\lambda_n x) + B_n\cos(\lambda_n x)][C_n\sin(\alpha_m y) + D_n\cos(\alpha_m y)]\times$$

$$[E_{nm}\sinh(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha_m^2}\,z) + F_{nm}\cosh(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha_m^2}\,z)]$$

(3) Aplicação das condições de contorno:

C.C.1: $\theta_{nm}(x,y,0) = \underbrace{X_n(x)}_{\neq 0}\underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0}[E_{nm}\underbrace{\sinh(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha_m^2}\,0)}_{=0} + F_{nm}\underbrace{\cosh(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha_n^2}\,0)}_{=1}] = 0 \Rightarrow F_{nm} = 0$

C.C.3: $\theta_{nm}(x,0,z) = \underbrace{X_n(x)}_{\neq 0}[C_n\underbrace{\sin(\alpha_m 0)}_{=0} + D_n\underbrace{\cos(\alpha_m 0)}_{=1}]\underbrace{Z_{nm}(z)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow D_n = 0$

C.C.5: $\theta_{nm}(0,y,z) = [A_n\underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0} + B_n\underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1}]\underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0}\underbrace{Z_{nm}(z)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow B_n = 0$

$$\theta(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_n\sin(\lambda_n x)C_n\sin(\alpha_m y)E_{nm}\sinh(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha_m^2}\,z)$$

C.C.4: $\theta_{nm}(x,L,z)=\underbrace{X_n(x)}_{\neq 0}\underbrace{C_n}_{\neq 0}\sin(\alpha_m L)\underbrace{Z_{nm}(z)}_{\neq 0}=0\Rightarrow\sin(\alpha_m L)=0\Rightarrow\alpha_m=\dfrac{m\pi}{L},\ m=1,2,3,\ldots$

C.C.6: $\theta_{nm}(L,y,z)=\underbrace{A_n}_{\neq 0}\sin(\lambda_n L)\underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0}\underbrace{Z_{nm}(z)}_{\neq 0}=0\Rightarrow\sin(\lambda_n L)=0\Rightarrow\lambda_n=\dfrac{n\pi}{L},\ n=1,2,3,\ldots$

$$\theta(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\,\frac{z}{L}\right)$$

$$a_{nn}=A_nC_nE_{nm}$$

C.C.2: $\theta(x,y,L)=\phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\dfrac{m\pi y}{L}\right)\sinh(\pi\sqrt{n^2+m^2})$

(4) Dupla ortogonalidade.

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + \lambda_n^2 X_n = 0 \qquad \frac{d^2\phi_n}{dx^2} + a_1(x)\frac{d\phi_n}{dx} + [a_2(x) + \lambda_n^2 a_3(x)]\phi_n = 0$$

$$a_1(x) = a_2(x) = 0 \quad \text{e} \quad a_3(x) = 1$$

$$p(x) = e^{\int a_1 dx} = e^{\int 0 dx} = 1, \; q(x) = 0.1 = 0 \text{ e } w(x) = 1.1 = 1.$$

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/L) \qquad \phi_n(x) = \sin(n\pi x/L) \qquad \phi_k(x) = \sin(k\pi x/L)$$

$$\frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \alpha_m^2 Y_m = 0 \qquad \frac{d^2\phi_m}{dy^2} + a_1(y)\frac{d\phi_m}{dy} + [a_2(y) + \alpha_m^2 a_3(y)]\phi_m = 0$$

$$a_1(y) = a_2(y) = 0 \quad \text{e} \quad a_3(y) = 1$$

$$p(y) = e^{\int a_1 dy} = e^{\int 0 dy} = 1, \; q(y) = 0.1 = 0 \text{ e } w(y) = 1.1 = 1.$$

$$Y_m(y) = \sin(m\pi y/L) \qquad \phi_m(y) = \sin(m\pi y/L) \qquad \phi_i(y) = \sin(i\pi y/L)$$

$$\int_0^L\int_0^L \phi(x,y)\underbrace{w(x)w(y)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{i\pi y}{L}\right)dxdy}_{\text{termo adicionado}} =$$

$$\int_0^L\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\sinh(\pi\sqrt{n^2+m^2})\underbrace{w(x)w(y)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{i\pi y}{L}\right)dxdy}_{\text{termo adicionado}}$$

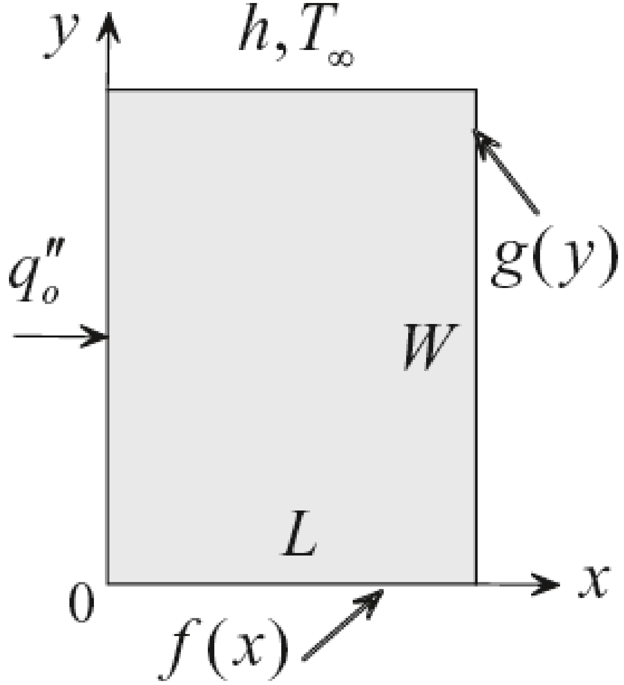
$$a_{nm} = \frac{\int_0^L\int_0^L \phi(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)dxdy}{\sinh(\pi\sqrt{n^2+m^2})\int_0^L\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin^2\left(\frac{m\pi y}{L}\right)dxdy}$$

$$T(x,y,z)=T_\infty+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\int_0^L\int_0^L\phi(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)dxdy}{\sinh(\pi\sqrt{n^2+m^2})\int_0^L\int_0^L\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin^2\left(\frac{m\pi y}{L}\right)dxdy}\right]\times$$

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\,\frac{z}{L}\right)$$

5 – CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-HOMOGÊNEAS: O MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO

- O método da separação de variáveis pode ser aplicado para resolver problemas de condução com condições de contorno não-homogêneas com o auxílio do princípio da superposição.
- Nessa aproximação, um problema é decomposto em problemas mais simples em número igual ao número de condições de contorno não-homogêneas.
- Para cada problema mais simples é atribuída uma condição de contorno não-homogênea de maneira que quando os problemas mais simples e suas condições de contorno são adicionados, retorna-se à formulação do problema original.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ (H.)}$$

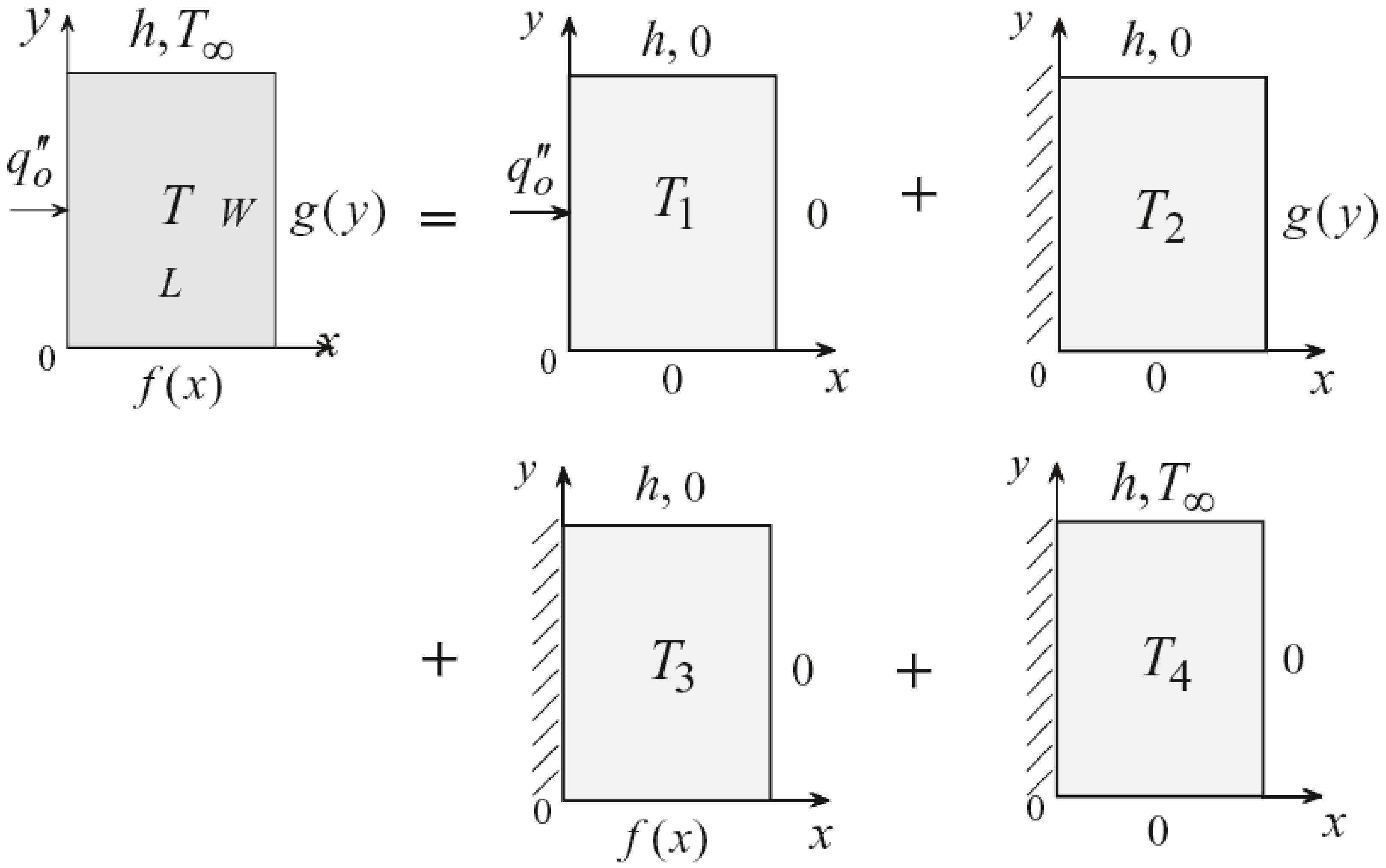
$$\text{C.C.1: } -k\frac{\partial T(0,y)}{\partial x} = q_o^{"} \text{ (N.H.)}$$

$$\text{C.C.2: } T(L,y) = g(y) \text{ (N.H.)}$$

$$\text{C.C.3: } T(x,0) = f(x) \text{ (N.H.)}$$

$$\text{C.C.4: } -k\frac{\partial T(x,W)}{\partial y} = h[T(x,W) - T_\infty] \text{ (N.H.)}$$

- Como todas as 4 condições de contorno são não-homogêneas, pode-se separar o problema original em 4 problemas mais simples, cada um com uma condição de contorno não-homogênea.



$T(x,y) = T_1(x,y) + T_2(x,y) + T_3(x,y) + T_4(x,y)$ (SOLUÇÃO POR SUPERPOSIÇÃO)

- As quatro soluções, $T_n(x, y), n = 1,2,3,4,$ devem satisfazer a E.D.P. e as 4 C.C.'s:

$$\frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} = 0, \ \ n = 1,2,3,4$$

- C.C.1: $-k\frac{\partial T_1(0,y)}{\partial x} = q_o'', \ -k\frac{\partial T_2(0,y)}{\partial x} = 0, \ -k\frac{\partial T_3(0,y)}{\partial x} = 0, \ -k\frac{\partial T_4(0,y)}{\partial x} = 0$

- C.C.2: $T_1(L,y) = 0, \quad T_2(L,y) = g(y), \quad T_3(L,y) = 0, \quad T_4(L,y) = 0$

- C.C.3: $T_1(x,0) = 0, \quad T_2(x,0) = 0, \quad T_3(x,0) = f(x), \quad T_4(x,0) = 0$

- C.C.4: $-k\frac{\partial T_1(x,W)}{\partial y} = hT_1(x,W), \ \ -k\frac{\partial T_2(x,W)}{\partial y} = hT_2(x,W),$

$$-k\frac{\partial T_3(x,W)}{\partial y} = hT_3(x,W), \ \ -k\frac{\partial T_4(x,W)}{\partial y} = h[T_4(x,W) - T_\infty]$$

- É importante verificar se a composição dos problemas fornece a formulação original, ou seja, equação diferencial e condições de contorno.

$$\frac{\partial^2 T_1(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_1(x,y)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T_2(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2(x,y)}{\partial y^2}+$$

$$\frac{\partial^2 T_3(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_3(x,y)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T_4(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_4(x,y)}{\partial y^2}=$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[T_1(x,y)+T_2(x,y)+T_3(x,y)+T_4(x,y)]+$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}[T_1(x,y)+T_2(x,y)+T_3(x,y)+T_4(x,y)]=\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}=0 \text{ (E.D.P.)}$$

$$-k\frac{\partial T_1(0,y)}{\partial x}-k\frac{\partial T_2(0,y)}{\partial x}-k\frac{\partial T_3(0,y)}{\partial x}-k\frac{\partial T_4(0,y)}{\partial x}=$$

$$-k\frac{\partial}{\partial x}[T_1(0,y)+T_2(0,y)+T_3(0,y)+T_4(0,y)]=-k\frac{\partial T(0,y)}{\partial x}=q_o^{''} \quad \text{(C.C.1)}$$

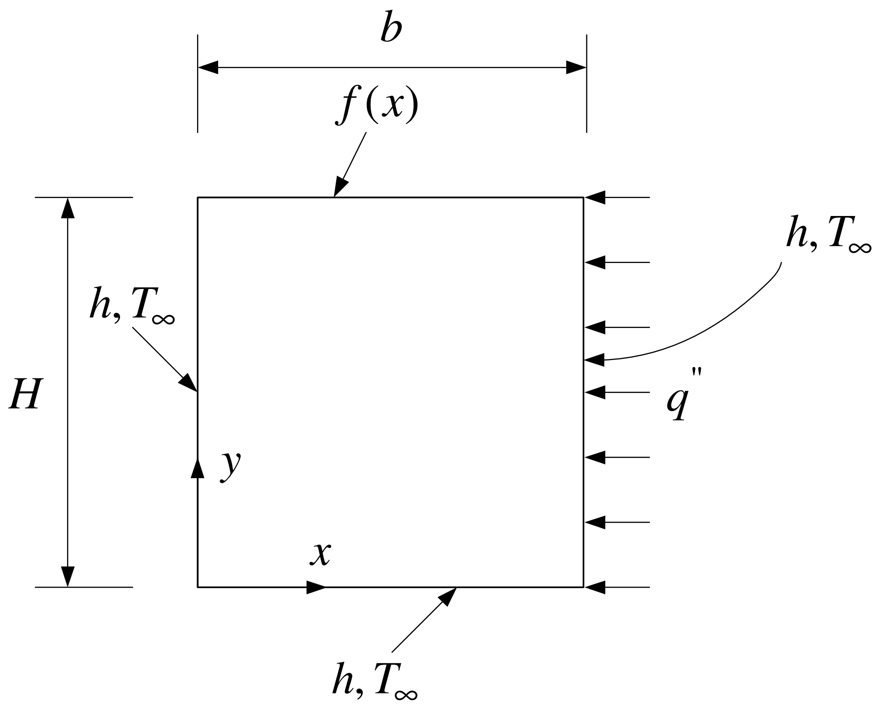
$$T_1(L,y)+T_1(L,y)+T_3(L,y)+T_4(L,y)=T\left(L,y\right)=g(y) \quad \text{(C.C.2)}$$

$$T_1(x,0)+T_2(x,0)+T_3(x,0)+T_4(x,0)=T(x,0)=f(x) \quad \text{(C.C.3)}$$

$$-k\frac{\partial}{\partial y}[T_1(x,W)+T_2(x,W)+T_3(x,W)+T_4(x,W)]=-k\frac{\partial T(x,W)}{\partial y}=$$

$$h[T_1(x,W)+T_2(x,W)+T_3(x,W)+T_4(x,W)-T_\infty]=h[T(x,W)-T_\infty] \quad \text{(C.C.4)}$$

EXEMPLO 6 – Considere condução de calor bidimensional na placa delgada mostrada abaixo. Considerando que a placa está estacionária, que não há geração interna de energia e que sua condutividade térmica é constante, determine a distribuição de temperaturas $T(x, y)$ em regime permanente na placa.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \text{ (H.)}$$

C.C.1: $k\frac{\partial T(0,y)}{\partial x}=h[T(0,y)-T_\infty]$ (N.H.) C.C.2: $-k\frac{\partial T(b,y)}{\partial x}=h[T(b,y)-T_\infty]-q^{"}$ (N.H.)

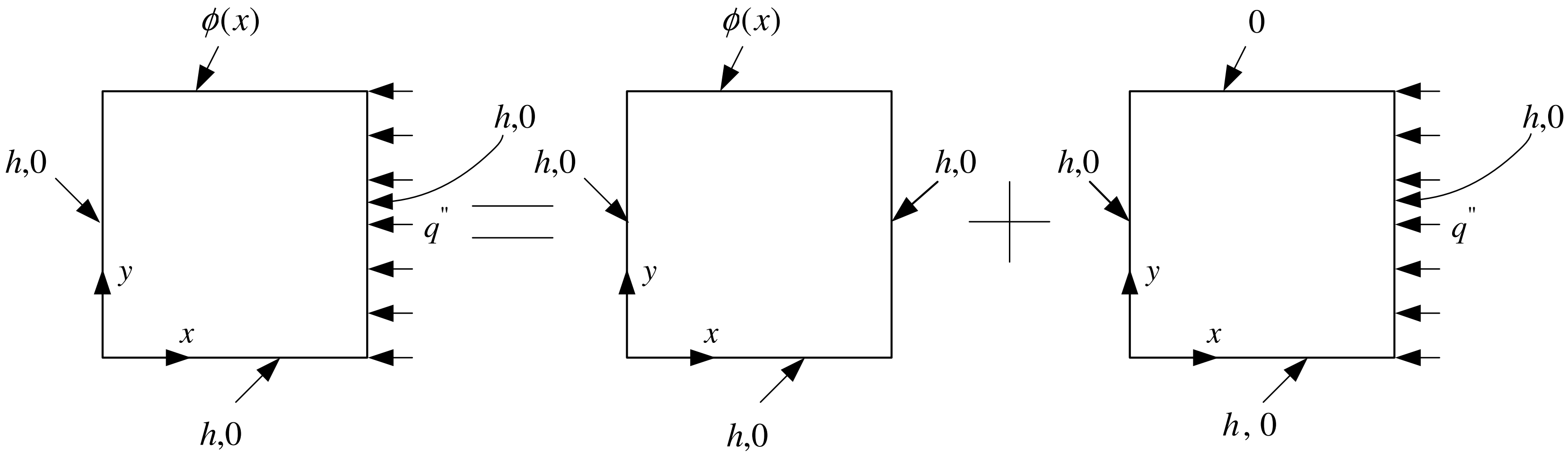
C.C.3: $k\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}=h[T(x,0)-T_\infty]$ (N.H.) C.C.4: $T(x,H)=f(x)$ (N.H.)

$\theta(x,y)=T(x,y)-T_\infty$ (EXCESSO DE TEMPERATURAS)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=0 \text{ (H.)}$$

$k\frac{\partial \theta(0,y)}{\partial x}=h\theta(0,y)$ (H.) $-k\frac{\partial \theta(b,y)}{\partial x}=h\theta(b,y)-q^{"}$ (N.H.)

$k\frac{\partial \theta(x,0)}{\partial y}=h\theta(x,0)$ (H.) $\theta(x,H)=f(x)-T_\infty=\phi(x)$ (N.H.)



$\theta(x,y) = \theta_1(x,y) + \theta_2(x,y)$ (SOLUÇÃO POR SUPERPOSIÇÃO)

PROBLEMA 1: $\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2} = 0$ (H.)

C.C.1: $k\dfrac{\partial\theta_1(0,y)}{\partial x} = h\theta_1(0,y)$ (H.) C.C.2: $-k\dfrac{\partial\theta_1(b,y)}{\partial x} = h\theta_1(b,y)$ (H.)

C.C.3: $k\dfrac{\partial\theta_1(x,0)}{\partial y} = h\theta_1(x,0)$ (H.) C.C.4: $\theta_1(x,H) = \phi(x)$ (N.H.)

PROBLEMA 2: $\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial y^2}=0$ (H.)

C.C.1: $k\dfrac{\partial\theta_2(0,y)}{\partial x}=h\theta_2(0,y)$ (H.) C.C.2: $-k\dfrac{\partial\theta_2(b,y)}{\partial x}=h\theta_2(b,y)-q''$ (N.H.)

C.C.3: $k\dfrac{\partial\theta_2(x,0)}{\partial y}=h\theta_2(x,0)$ (H.) C.C.4: $\theta_2(x,H)=0$ (H.)

E.D.P: $\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2(\theta_1+\theta_2)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(\theta_1+\theta_2)}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0$

C.C.1: $k\dfrac{\partial\theta_1(0,y)}{\partial x}+k\dfrac{\partial\theta_2(0,y)}{\partial x}=k\dfrac{\partial}{\partial x}[\theta_1(0,y)+\theta_2(0,y)]=k\dfrac{\partial\theta(0,y)}{\partial x}=$

$h\theta_1(0,y)+h\theta_2(0,y)=h[\theta_1(0,y)+\theta_2(0,y)]=h\theta(0,y)$

$$\text{C.C.2: } -k\frac{\partial\theta_1(b,y)}{\partial x}-k\frac{\partial\theta_2(b,y)}{\partial x}=-k\frac{\partial}{\partial x}[\theta_1(b,y)+\theta_2(b,y)]=-k\frac{\partial\theta(b,y)}{\partial x}=$$

$$h\theta_1(b,y)+h\theta_2(b,y)-q''=h[\theta_1(b,y)+\theta_2(b,y)]-q''=h\theta(b,y)-q''$$

$$\text{C.C.3: } k\frac{\partial\theta_1(x,0)}{\partial y}+k\frac{\partial\theta_2(x,0)}{\partial y}=k\frac{\partial}{\partial y}[\theta_1(x,0)+\theta_2(x,0)]=k\frac{\partial\theta(x,0)}{\partial y}=$$

$$h\theta_1(x,0)+h\theta_2(x,0)=h[\theta_1(x,0)+\theta_2(x,0)]=h\theta(x,0)$$

$$\text{C.C.4: } \theta_1(x,H)+\theta_2(x,H)=\theta(x,H)=\phi(x)$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

$$T_1(x,y) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^b \phi(x)\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x)\right]dx\right\}\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x)\right]\times$$

$$\frac{\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sinh(\lambda_n y) + \cosh(\lambda_n y)\right]}{\left\{\int_0^b\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x)\right]^2 dx\right\}\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sinh(\lambda_n H) + \cosh(\lambda_n H)\right]}$$

$$\cot(\lambda_n b) = \frac{\lambda_n b}{2\mathrm{Bi}} - \frac{\mathrm{Bi}}{2(\lambda_n b)} \qquad \mathrm{Bi} = hb/k$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

$$T_2(x,y) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dfrac{q''}{k\alpha_n}\displaystyle\int_0^H \left[\left(\frac{h}{k\alpha_n}\right)\sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y)\right] dy}{\sinh(\alpha_n b)\left[1 - \left(\dfrac{h}{k\alpha_n}\right)^2\right]\left\{\displaystyle\int_0^H \left[\left(\frac{h}{k\alpha_n}\right)\sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y)\right]^2 dy\right\}} \times$$

$$\left[\left(\frac{h}{k\alpha_n}\right)\sinh(\alpha_n x) + \cosh(\alpha_n x)\right]\left[\left(\frac{h}{k\alpha_n}\right)\sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y)\right]$$

$$-\tan(\alpha_n H) = \frac{k\alpha_n}{h}$$

SOLUÇÃO FINAL $\cot(\lambda_n b) = \dfrac{\lambda_n b}{2\mathrm{Bi}} - \dfrac{\mathrm{Bi}}{2(\lambda_n b)}$ $\mathrm{Bi} = hb/k$ $-\tan(\alpha_n H) = \dfrac{k\alpha_n}{h}$

$$T(x,y) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\int_0^b \phi(x)\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x)\right]dx\right\}\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x)\right] \times \left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sinh(\lambda_n y) + \cosh(\lambda_n y)\right]}{\left\{\int_0^b \left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x)\right]^2 dx\right\}\left[\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)\sinh(\lambda_n H) + \cosh(\lambda_n H)\right]}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dfrac{q''}{k\alpha_n}\int_0^H \left[\left(\frac{h}{k\alpha_n}\right)\sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y)\right]dy}{\sinh(\alpha_n b)\left[1 - \left(\frac{h}{k\alpha_n}\right)^2\right]\left\{\int_0^H \left[\left(\frac{h}{k\alpha_n}\right)\sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y)\right]^2 dy\right\}} \times$$

$$\left[\left(\frac{h}{k\alpha_n}\right)\sinh(\alpha_n x) + \cosh(\alpha_n x)\right]\left[\left(\frac{h}{k\alpha_n}\right)\sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y)\right]$$