CONDUÇÃO TÉRMICA (PEM 00135)

PROF. DR. SANTIAGO DEL RIO OLIVEIRA

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO A CONDUÇÃO TÉRMICA

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

santiago@feb.unesp.br

TÓPICOS DO CAPÍTULO 1

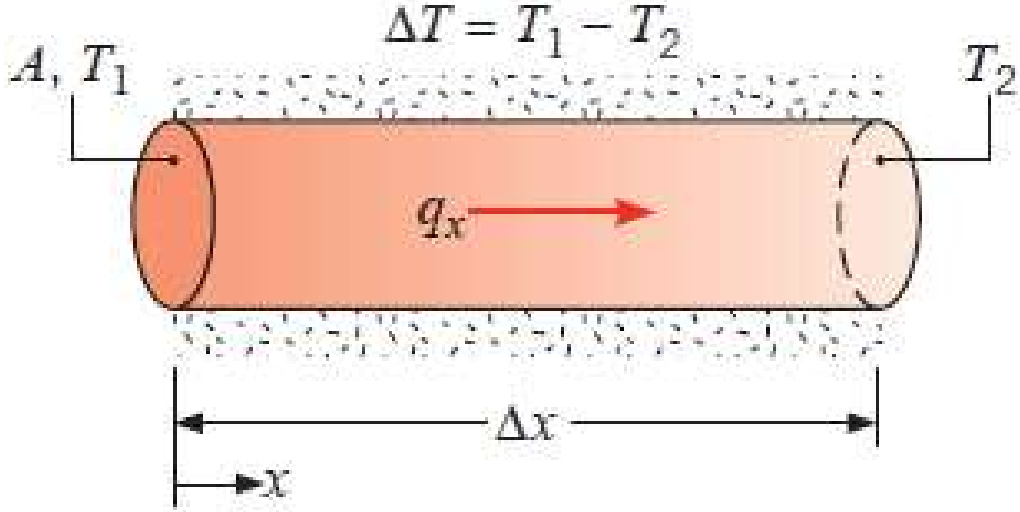
1. ALGUMAS APLICAÇÕES DE CONDUÇÃO TÉRMICA
2. LEI DE FOURIER
3. LEI DE FOURIER PARA MATERIAIS ANISOTRÓPICOS
4. CONDUTIVIDADE TÉRMICA
5. DIFUSIVIDADE TÉRMICA
6. A EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR
7. CONDIÇÕES INICIAL E DE CONTORNO

1.ALGUMAS APLICAÇÕES DE CONDUÇÃO TÉRMICA

- DEFINIÇÃO: é a propagação de calor no interior de um meio estacionário (sólido, líquido ou gasoso), aquecido irregularmente.

- APLICAÇÕES:
    - Isolamento térmico
    - Aletas
    - Escudos de calor
    - Criogenia
    - Processamento de alimentos
    - Fundição

2.LEI DE FOURIER



$$q_x \,\alpha\, A\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$q_x = kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx}$$

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx}$$

$$q'' = -k\nabla T = -k\left(\mathrm{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \mathrm{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$q'' = \mathrm{i}q_x'' + \mathrm{j}q_y'' + \mathrm{k}q_z''$$

$$q_x'' = -k\frac{dT}{dx} \qquad q_y'' = -k\frac{dT}{dy} \qquad q_z'' = -k\frac{dT}{dz}$$

- É uma expressão que possa ser derivada a partir de princípios fundamentais; ao contrário, ela é uma generalização baseada em evidências experimentais.
- Ela é uma expressão que define uma importante propriedade dos materiais, a condutividade térmica.
- A lei de Fourier é uma expressão vetorial, indicando que o fluxo térmico é normal a uma isoterma e no sentido da diminuição das temperaturas.
- A lei de Fourier se aplica a toda a matéria, independentemente de seu estado físico (sólido, líquido ou gás).

3.LEI DE FOURIER PARA MATERIAIS ANISOTRÓPICOS

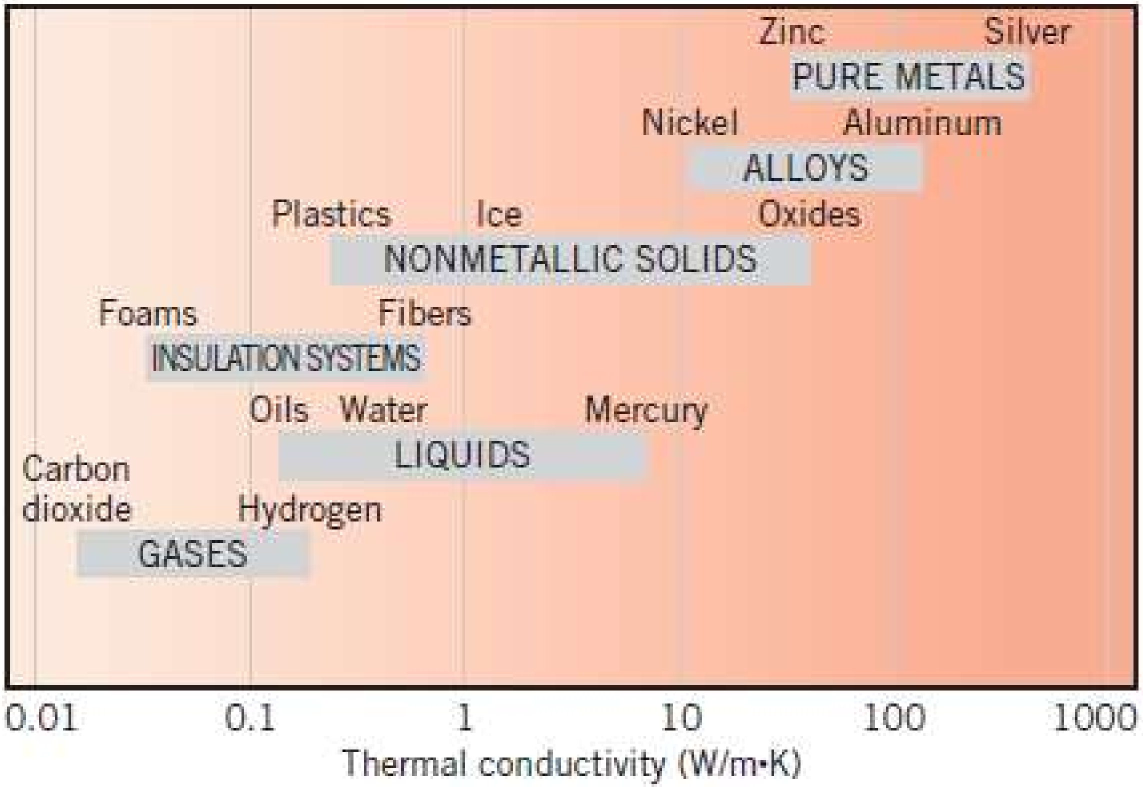
- Cristais, madeira, rochas sedimentadas, folhas laminadas, cabos, materiais de blindagem para veículos espaciais, fibras de reforço de estruturas compostas.

$$q_i'' = -\sum_{j=x,y,z} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \qquad i = x, y, z$$

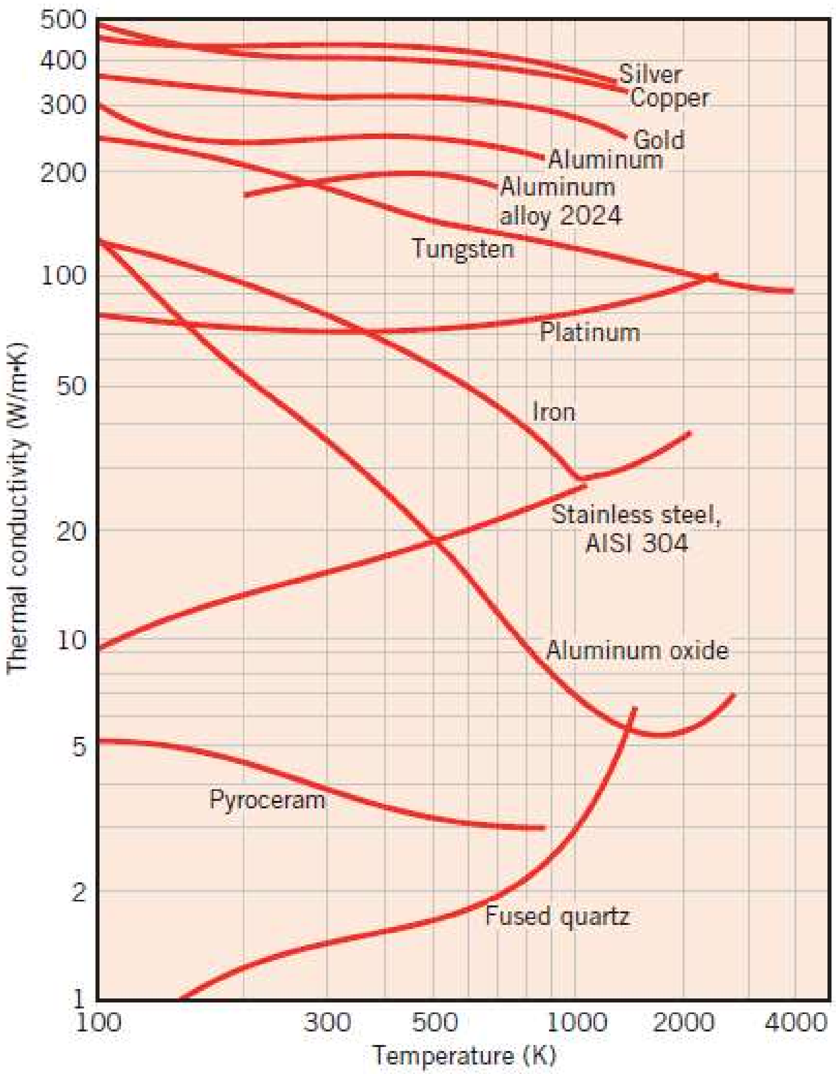
$$q_x'' = -\left(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \qquad q_y'' = -\left(k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$q_z'' = -\left(k_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

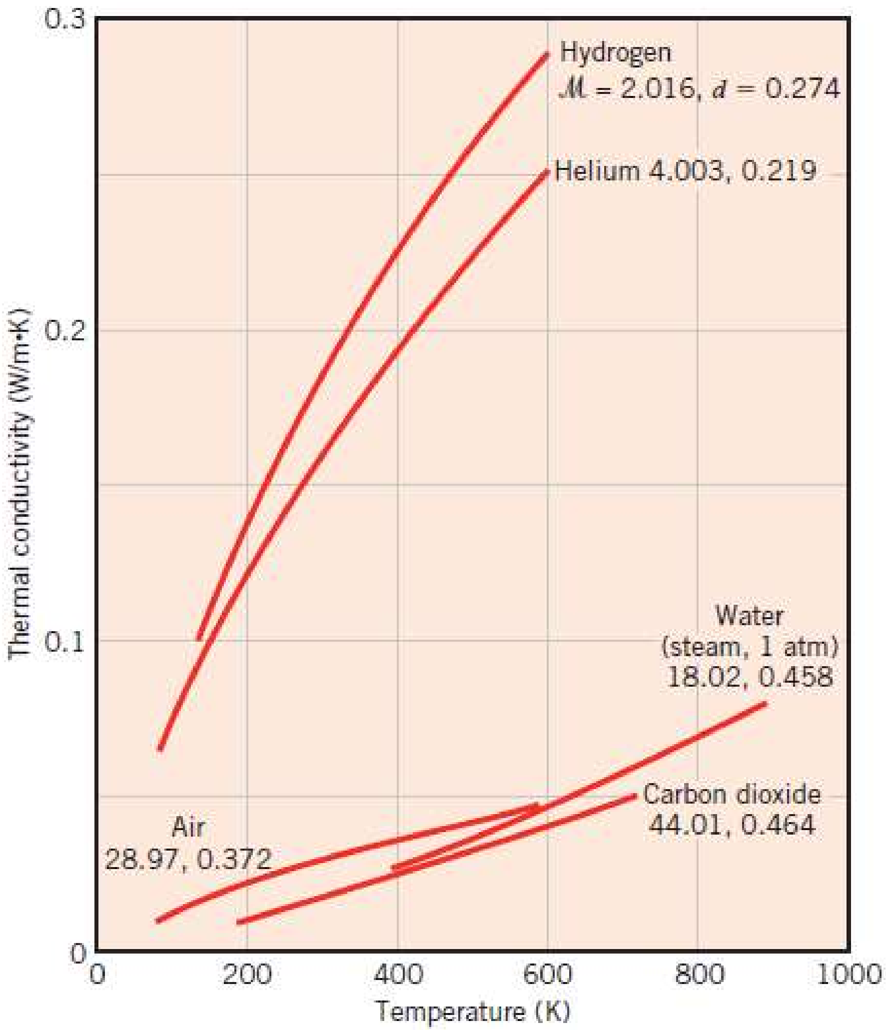
4.CONDUTIVIDADE TÉRMICA



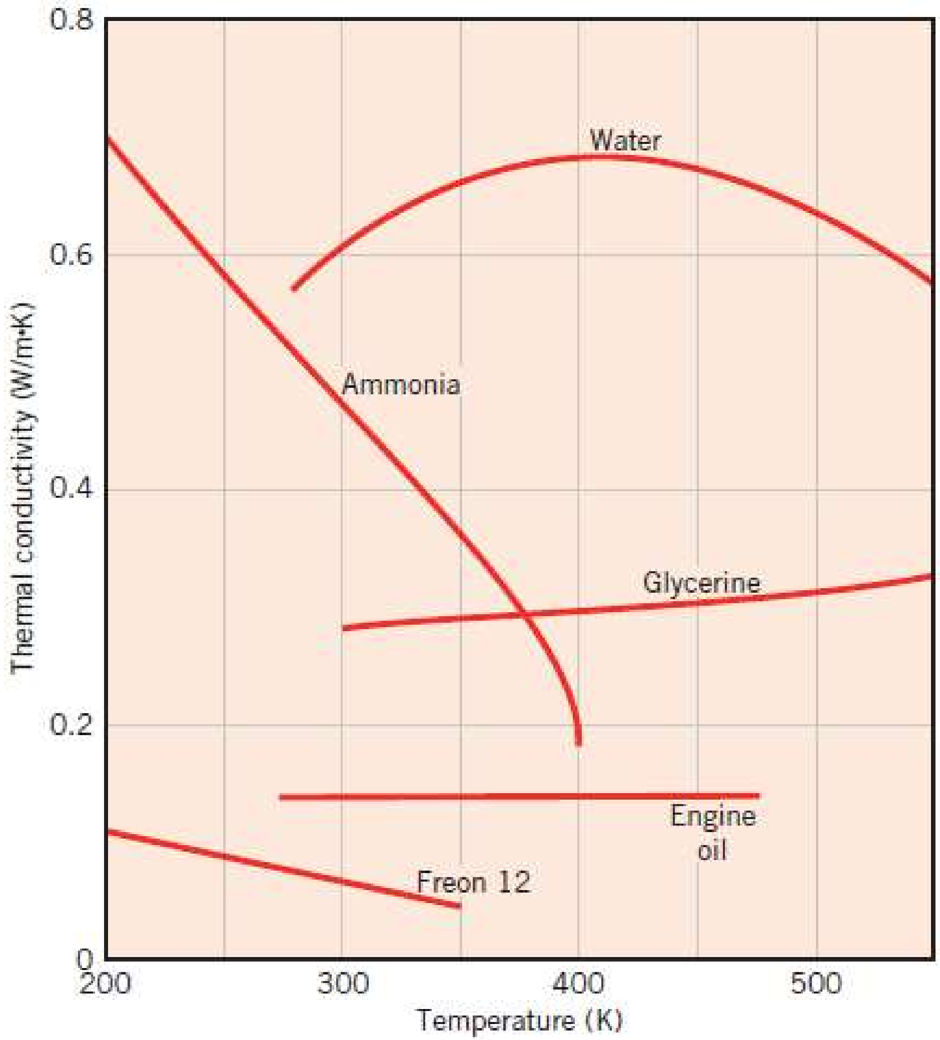
Faixa de condutividade térmica de vários estados da matéria à temperaturas e pressões normais (Fonte: Bergman *et al*. 2014).



A dependência com a temperatura da condutividade térmica de sólidos selecionados (Fonte: Bergman *et al*. 2014).



A dependência com a temperatura da condutividade térmica de gases selecionados a pressões normais (Fonte: Bergman *et al*. 2014).



A dependência com a temperatura da condutividade térmica de líquidos não-metálicos selecionados sob condições saturadas (Fonte: Bergman *et al*. 2014).

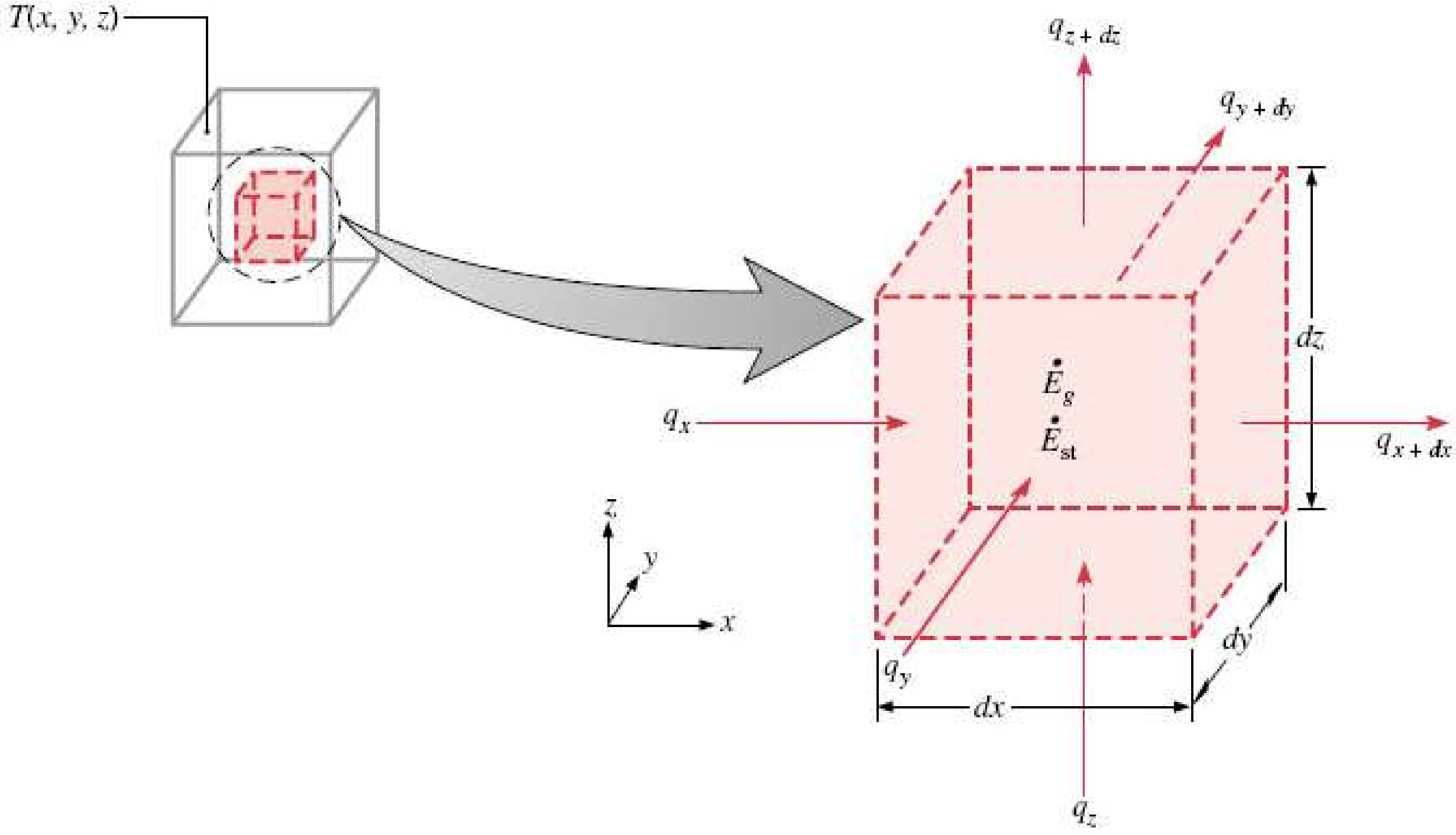
5.DIFUSIVIDADE TÉRMICA

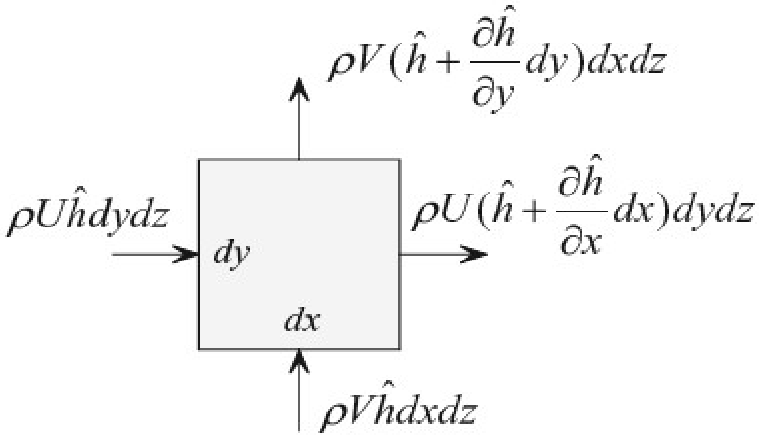
- A razão entre a condutividade térmica e a capacidade calorífica volumétrica é chamada de difusividade térmica α, que possui unidades de (m^2/s):

$$\boxed{\alpha = \frac{k}{\rho c_p}}$$

- Mede a capacidade do material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la.
- Materiais com elevado α responderão rapidamente a mudanças nas condições térmicas, enquanto materiais com reduzido α responderão mais lentamente, levando mais tempo para atingir uma nova condição de equilíbrio.

6.A EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR





$$\vec{\mathrm{V}} = \mathrm{i}U + \mathrm{j}V + \mathrm{k}W.$$

$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = \dot{E}_{acu}$ (conservação da energia)

$$\dot{E}_e = q_x + q_y + q_z + \dot{E}_{massa,x} + \dot{E}_{massa,y} + \dot{E}_{massa,z}$$

$$\dot{E}_s = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) + \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) +$$

$$\left(\dot{E}_{massa,x} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,x}}{\partial x} dx \right) + \left(\dot{E}_{massa,y} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,y}}{\partial y} dy \right) + \left(\dot{E}_{massa,z} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,z}}{\partial z} dz \right)$$

$$q_x = -k(dydz)\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -k(dxdz)\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z = -k(dxdy)\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\dot{E}_{massa,x} = \rho Uhdydz \qquad \dot{E}_{massa,y} = \rho Vhdxdz \qquad \dot{E}_{massa,z} = \rho Whdxdy$$

$$\dot{E}_g = \dot{q}dxdydz \qquad \dot{E}_{acu} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial(udm)}{\partial t} = \frac{\partial(u\rho dxdydz)}{\partial t} = \rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz$$

- Substituindo os termos na 1ª lei da termodinâmica:

$$-k(dydz)\frac{\partial T}{\partial x} - k(dxdz)\frac{\partial T}{\partial y} - k(dxdy)\frac{\partial T}{\partial z} + \rho Uhdydz + \rho Vhdxdz + \rho Whdxdy$$

$$-\left\{-k(dydz)\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[-k(dydz)\frac{\partial T}{\partial x}\right]dx\right\} - \left\{-k(dxdz)\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[-k(dxdz)\frac{\partial T}{\partial y}\right]\right\}$$

$$-\left\{-k(dxdy)\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[-k(dxdy)\frac{\partial T}{\partial z}\right]\right\} - \left[\rho Uhdydz + \frac{\partial(\rho Uhdydz)}{\partial x}dx\right]$$

$$-\left[\rho Vhdxdz + \frac{\partial(\rho Vhdxdz)}{\partial y}dy\right] - \left[\rho Whdxdy + \frac{\partial(\rho Whdxdy)}{\partial z}dz\right]$$

$$+\dot{q}dxdydz = \rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz$$

- Rearranjando obtém-se:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-kdydz\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx - \frac{\partial}{\partial y}\left(-kdxdz\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy - \frac{\partial}{\partial z}\left(-kdxdy\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho Uhdydz)dx - \frac{\partial}{\partial y}(\rho Vhdxdz)dy - \frac{\partial}{\partial z}(\rho Whdxdy)dz + \dot{q}dxdydz = \rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz$$

- Simplificando mais uma vez obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial h}{\partial x}+V\frac{\partial h}{\partial y}+W\frac{\partial h}{\partial z}\right)$$

- Da definição de energia interna específica:

$$u=h-\frac{P}{\rho}$$

- Para P e ρ constantes $\partial u=\partial h=c_p dT$ de forma que:

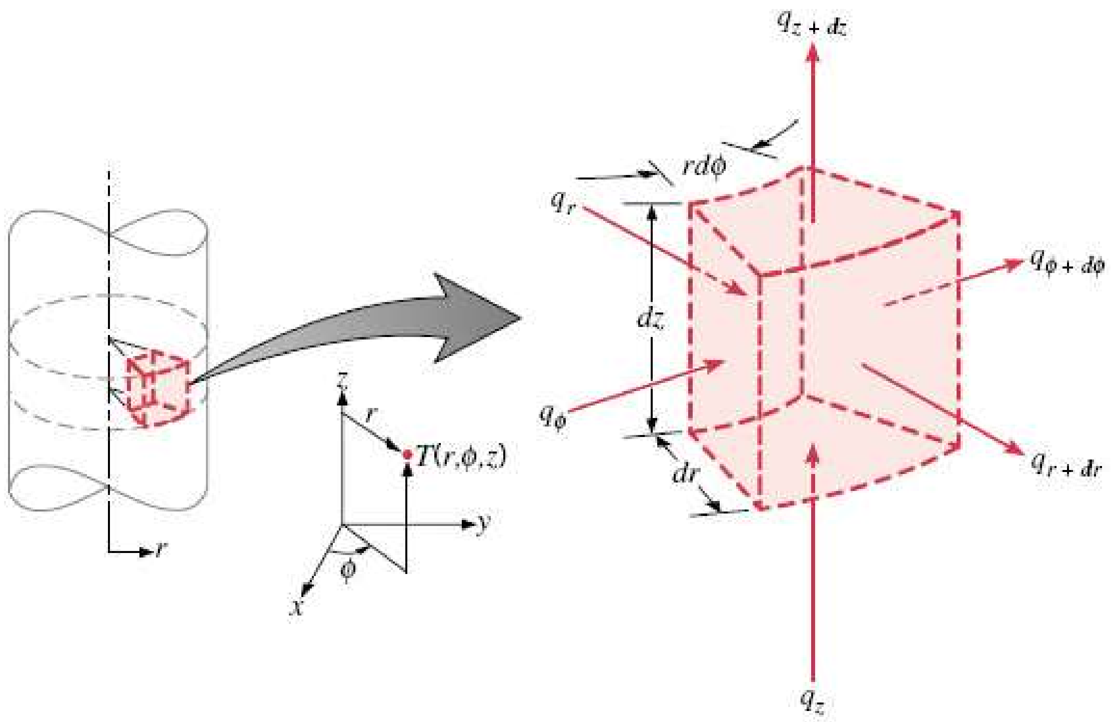
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+U\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y}+W\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

- Essa é a equação de condução de calor em coordenadas retangulares, cuja solução fornece $T=T(x,y,z,t)$.

- Com $T=T(x,y,z,t)$ pode-se calcular o fluxo de calor pela Lei de Fourier.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por condução na}\\ \text{direção } x\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por condução na}\\ \text{direção } y\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por condução na}\\ \text{direção } z\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\dot{q}}_{\substack{\text{taxa}\\ \text{volumétrica}\\ \text{de geração}\\ \text{de energia}\\ \text{térmica}}} =$$

$$\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{\text{taxa de}\\ \text{variação com o tempo}\\ \text{da energia}\\ \text{térmica (sensível)}\\ \text{do meio}\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p U \frac{\partial T}{\partial x}}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por advecção na}\\ \text{direção } x\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p V \frac{\partial T}{\partial y}}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por advecção na}\\ \text{direção } y\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p W \frac{\partial T}{\partial z}}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por advecção na}\\ \text{direção } z\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}}$$



$$q'' = -k\nabla T = -k\left(\mathrm{i}\frac{\partial T}{\partial r} + \mathrm{j}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + \mathrm{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$q''_r = -k\frac{\partial T}{\partial r}$$

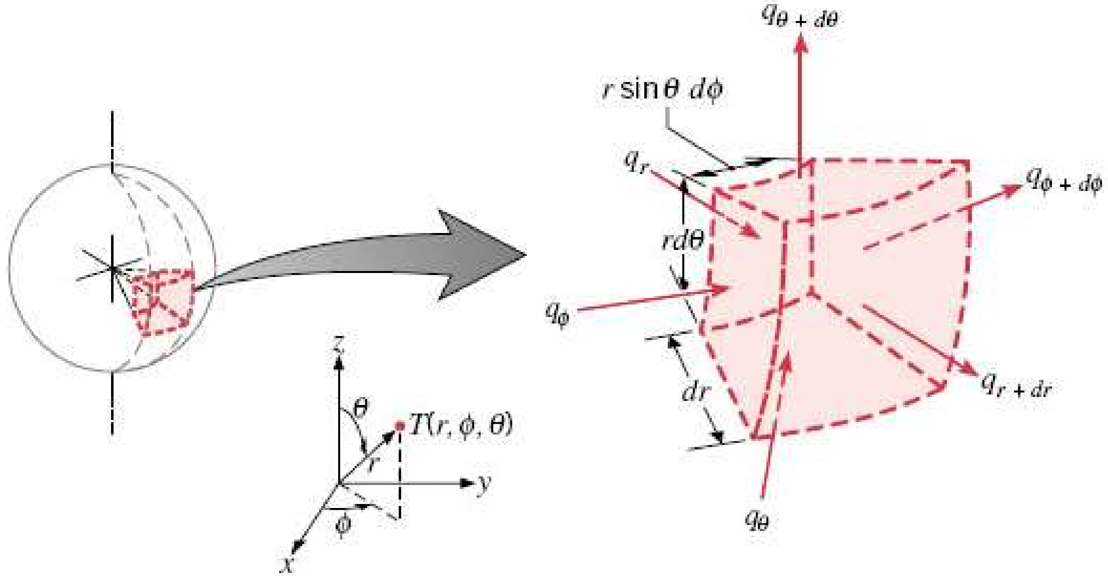
$$q''_\phi = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}$$

$$q''_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + V_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por condução na}\\ \text{direção } r\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por condução na}\\ \text{direção } \phi\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por condução na}\\ \text{direção } z\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\dot{q}}_{\substack{\text{taxa}\\ \text{volumétrica}\\ \text{de geração}\\ \text{de energia}\\ \text{térmica}}} =$$

$$\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{\text{taxa de}\\ \text{variação com o tempo}\\ \text{da energia}\\ \text{térmica (sensível)}\\ \text{do meio}\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p V_r \frac{\partial T}{\partial r}}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por advecção na}\\ \text{direção } r\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\rho c_p V_\phi}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por advecção na}\\ \text{direção } \phi\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p V_z \frac{\partial T}{\partial z}}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por advecção na}\\ \text{direção } z\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}}$$



$$q'' = -k\nabla T = -k\left(\mathrm{i}\frac{\partial T}{\partial r} + \mathrm{j}\frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi} + \mathrm{k}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)$$

$$q''_r = -k\frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q''_\phi = -\frac{k}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}$$

$$q''_\theta = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \dot{q} =$$

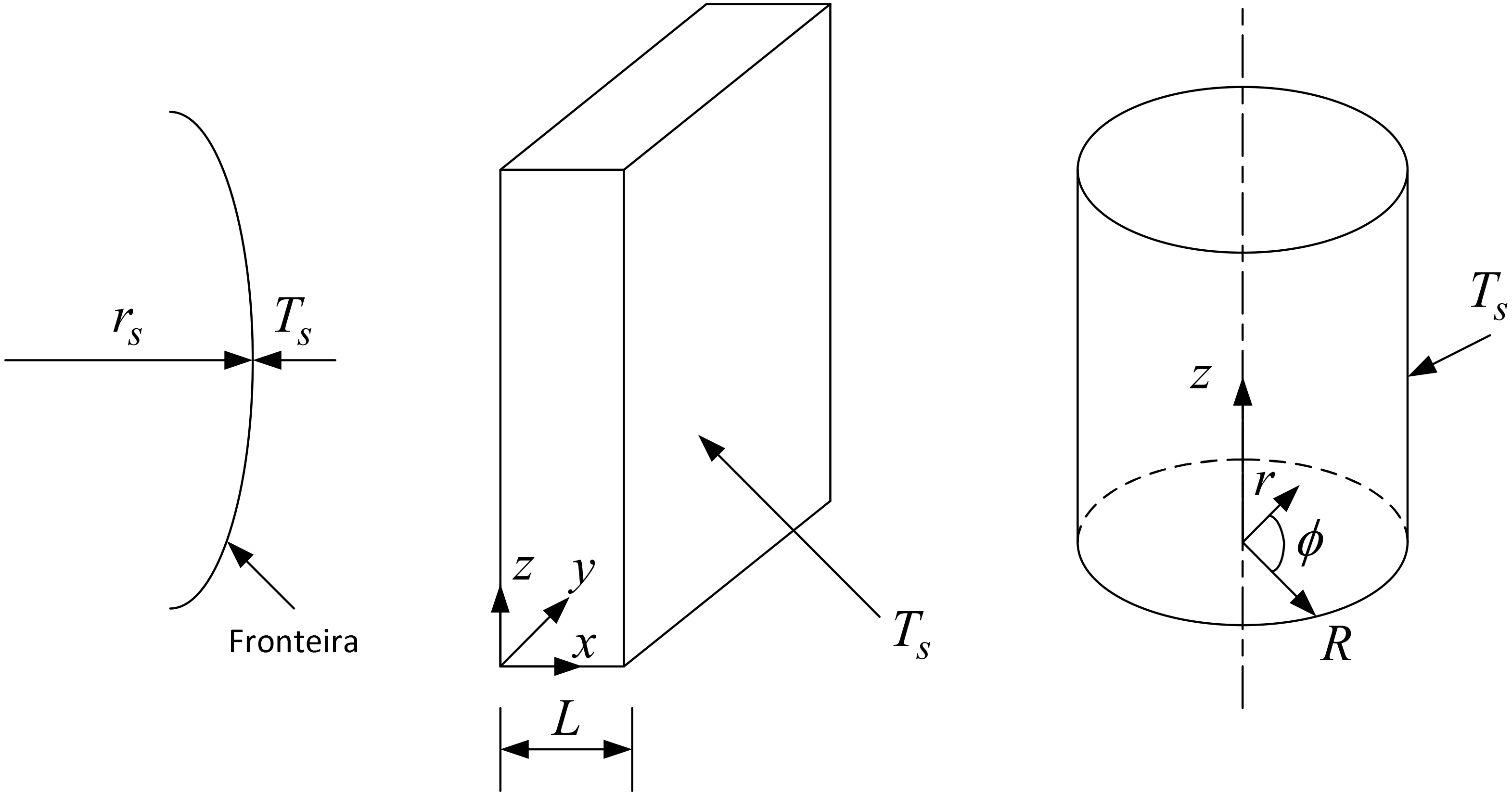
$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)$$

$$\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por condução na}\\ \text{direção } r\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}}+\underbrace{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por condução na}\\ \text{direção } \phi\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}}+\underbrace{\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por condução na}\\ \text{direção } z\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}}+\underbrace{\dot{q}}_{\substack{\text{taxa}\\ \text{volumétrica}\\ \text{de geração}\\ \text{de energia}\\ \text{térmica}}}=$$

$$\underbrace{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{\text{taxa de}\\ \text{variação com o tempo}\\ \text{da energia}\\ \text{térmica (sensível)}\\ \text{do meio}\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}}+\underbrace{\rho c_p V_r\frac{\partial T}{\partial r}}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por advecção na}\\ \text{direção } r\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}}+\underbrace{\frac{\rho c_p V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\phi}}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por advecção na}\\ \text{direção } \phi\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}}+\underbrace{\frac{\rho c_p V_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}}_{\substack{\text{taxa de energia}\\ \text{líquida transferida}\\ \text{por advecção na}\\ \text{direção } \theta\\ \text{por unidade}\\ \text{de volume}}}$$

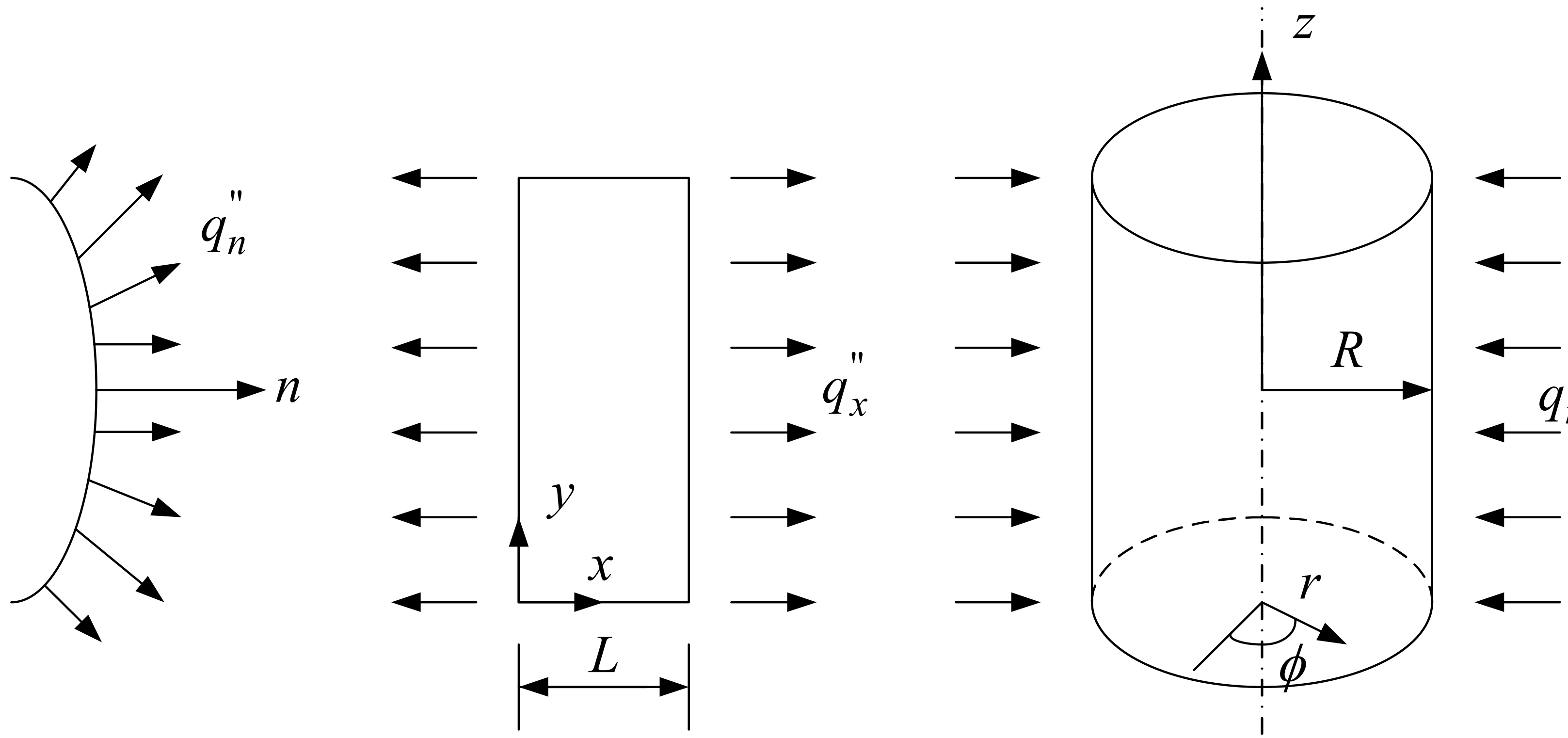
7.CONDIÇÕES INCIAL E DE CONTORNO

- Para determinar a distribuição de temperaturas, é necessário resolver a equação de condução. Tal solução depende das condições físicas existentes nas fronteiras do meio, e, se a situação variar com o tempo, a solução também depende das condições existentes no meio em algum instante inicial.
- Como a equação de condução de calor é de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais, duas condições de contorno devem ser fornecidas para cada coordenada espacial. E como a equação de condução de calor é de primeira ordem em relação ao tempo, apenas uma condição, chamada de condição inicial, deve ser especificada.



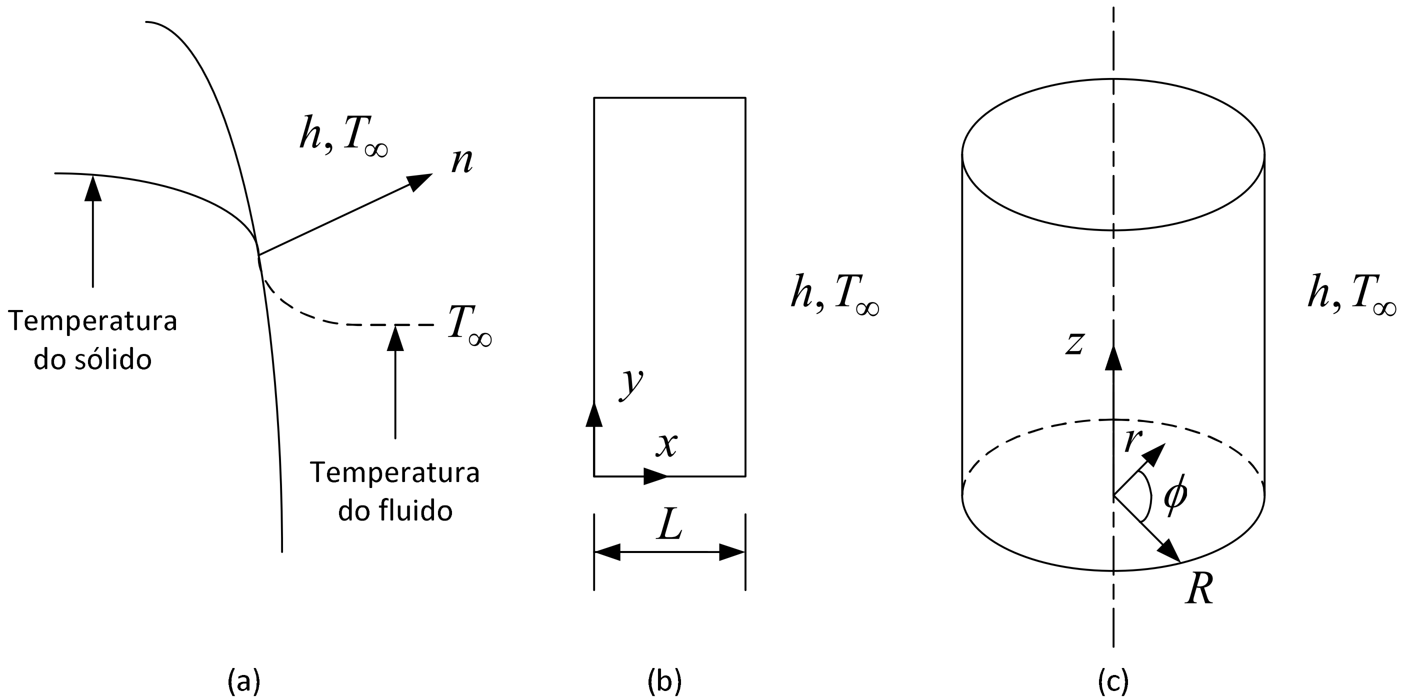
(a) (b) (c)

$T(r_s,t) = T_s$ $T(L,y,z,t) = T_s$ $T(R,\phi,z,t) = T_s$



(a) (b) (c)

$$q_n'' = -k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_s \qquad q_x'' = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} \qquad q_x'' = k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} \qquad q_r'' = k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R}$$



$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_s = h\left(T_s - T_\infty\right)$$

$$k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = h\left(T - T_\infty\right)_{x=0}$$

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = h\left(T - T_\infty\right)_{x=L}$$

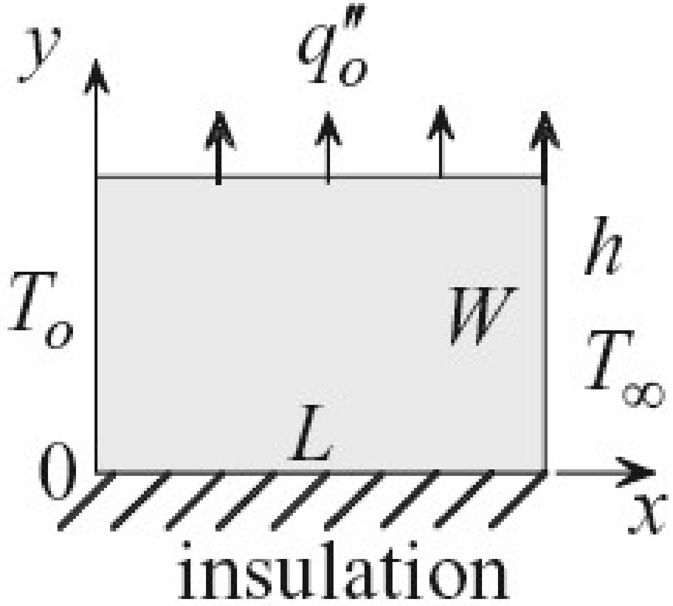
$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = h\left(T - T_\infty\right)_{r=R}$$

$$q_{rad} = \varepsilon\sigma A(T_s^4 - T_{viz}^4)$$ (troca líquida por radiação térmica)

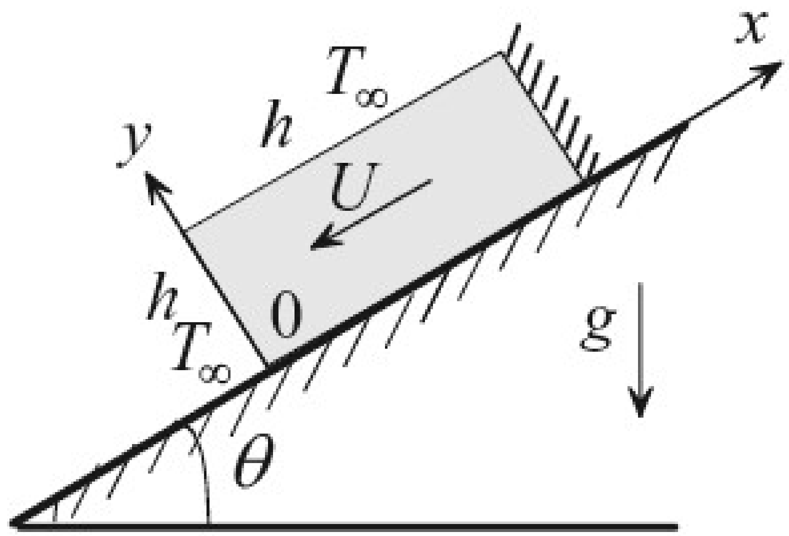
$$T(x, y, z, 0) = T_i \qquad T(r, \phi, z, 0) = T_i \qquad T(r, \phi, \theta, 0) = T_i$$ (condição inicial)

8.EXEMPLOS

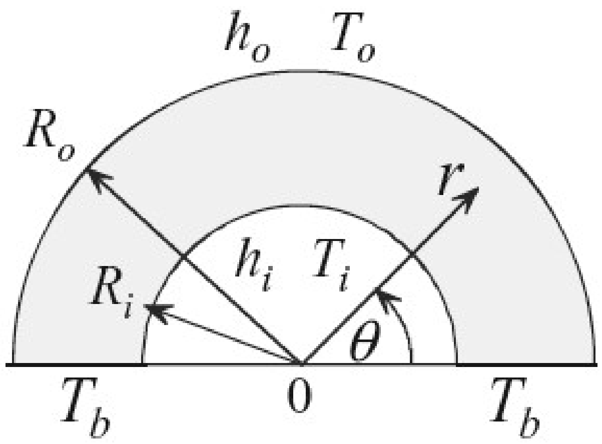
1) Escreva a equação de condução e as condições de contorno para condução bidimensional em regime permanente para a placa retangular mostrada abaixo.



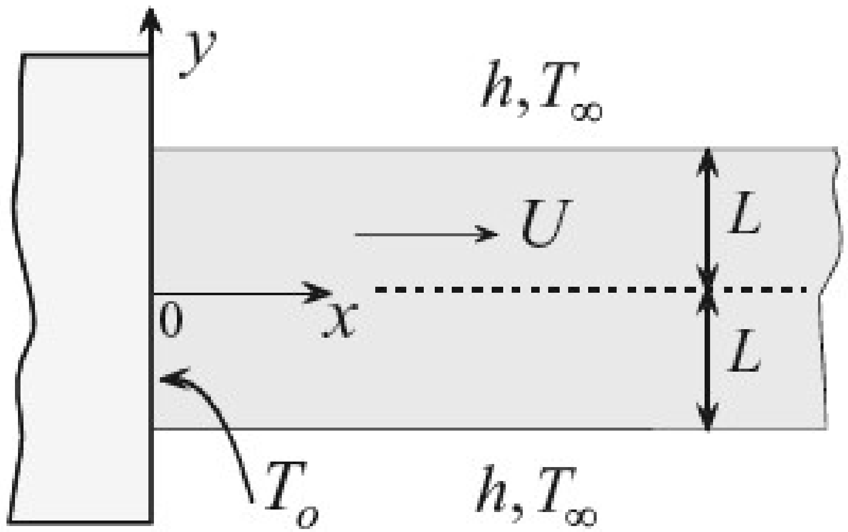
2) Uma placa retangular de comprimento L e altura H desliza sobre uma superfície inclinada com uma velocidade U. O atrito resulta em um fluxo de calor q_o'' na superfície. A face frontal e as faces laterais trocam calor por convecção. Despreze a perda de calor pela face traseira. Escreva a equação de condução de calor em regime permanente e as condições de contorno.



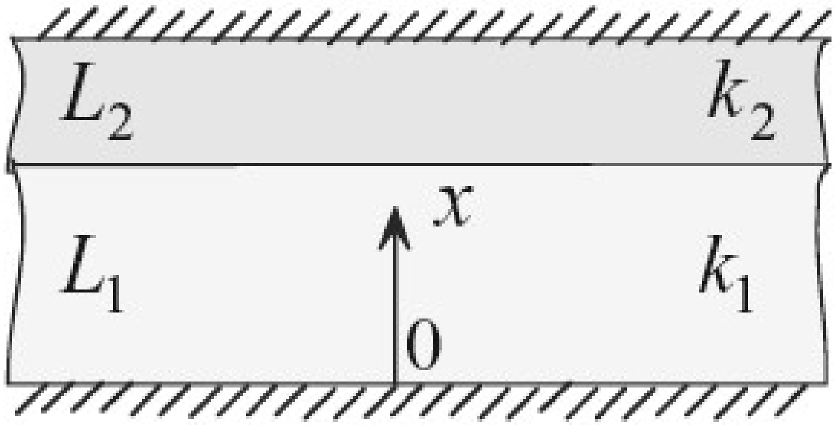
3) Considere uma seção de um tubo de raio interno R_i e raio externo R_e. Calor é trocado por convecção ao longo das superfícies cilíndricas interna e externa. A temperatura e o coeficiente de transferência de calor interno são T_i e h_i. A temperatura e o coeficiente de transferência de calor externo são T_e e h_e. As duas superfícies planas são mantidas a uma temperatura T_b. Escreva a equação de condução de calor em regime permanente e as condições de contorno.



4) Uma placa de espessura $2L$ se move através de um forno com velocidade U e deixa o forno a uma temperatura T_o. Fora do forno a placa é resfriada por convecção e por radiação. O coeficiente de transferência de calor é h, a emissividade da placa é ε, a temperatura ambiente é T_∞ e a temperatura da vizinhança é T_{viz}. Escreva a equação de condução de calor bidimensional em regime permanente e as condições de contorno. Use o modelo de radiação simplificado e assuma que a placa é infinitamente longa.



5) Duas placas extensas com espessuras L_1 e L_2 estão inicialmente a temperaturas T_1 e T_2. Suas condutividades térmicas são k_1 e k_2. As duas placas são pressionadas uma contra a outra e isoladas ao longo de suas superfícies expostas. Escreva a equação de condução de calor e as condições de contorno.



6) Um cilindro com raio interno R_i e raio externo R_e é aquecido com um fluxo de calor $q_i^{''}$ em sua superfície interna. A metade inferior do cilindro está isolada e a metade superior do cilindro troca calor por convecção e radiação. O coeficiente de convecção é h, a temperatura ambiente é T_∞, a temperatura da vizinhança é T_{viz} e a emissividade da superfície externa do cilindro é ε. Escreva a equação de condução de calor e as condições de contorno.