



# CONDUÇÃO TÉRMICA

NOTAS DE AULA (PEM 00135)

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**FACULDADE DE ENGENHARIA  
DE BAURU – UNESP**

*Prof. Dr. Santiago del Rio Oliveira*  
*2ª VERSÃO (junho de 2017)*

“A ciência nunca resolve um problema sem criar pelo menos outros dez”. (George Bernard Shaw)

## ÍNDICE

### CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO A CONDUÇÃO TÉRMICA

|                                                 |    |
|-------------------------------------------------|----|
| 1 – ALGUMAS APLICAÇÕES DE CONDUÇÃO TÉRMICA      | 1  |
| 2 – LEI DE FOURIER                              | 4  |
| 3 – LEI DE FOURIER PARA MATERIAIS ANISOTRÓPICOS | 9  |
| 4 – CONDUTIVIDADE TÉRMICA                       | 12 |
| 5 – DIFUSIVIDADE TÉRMICA                        | 16 |
| 6 – A EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR              | 17 |
| 6.1 – COORDENADAS RETANGULARES                  | 17 |
| 6.2 – COORDENADAS CILÍNDRICAS                   | 26 |
| 6.3 – COORDENADAS ESFÉRICAS                     | 32 |
| 7 – CONDIÇÕES DE CONTORNO E CONDIÇÃO INICIAL    | 38 |
| 7.1 – CONDIÇÃO DE CONTORNO DE PRIMEIRA ESPÉCIE  | 38 |
| 7.2 – CONDIÇÃO DE CONTORNO DE SEGUNDA ESPÉCIE   | 39 |
| 7.3 – CONDIÇÃO DE CONTORNO DE TERCEIRA ESPÉCIE  | 41 |
| 7.4 – SUPERFÍCIE COM RADIAÇÃO                   | 42 |
| 7.5 – CONDIÇÃO INICIAL                          | 43 |
| 7.6 – CONDIÇÕES DE CONTORNO HOMOGÊNEAS          | 44 |
| 7.7 – EXEMPLOS DE CONDIÇÃO DE CONTORNO          | 45 |
| 8 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS                  | 47 |
| 9 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS                        | 48 |

### CAPÍTULO 2 - CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| 1 – INTRODUÇÃO                    | 53 |
| 2 – O PROBLEMA DA PAREDE PLANA    | 53 |
| 3 – O PROBLEMA DO DUTO CILÍNDRICO | 63 |
| 4 – O PROBLEMA DA CASCA ESFÉRICA  | 71 |
| 5 – SEÇÕES CÔNICAS TRUNCADAS      | 80 |
| 6 – GEOMETRIAS COMPOSTAS          | 86 |

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 6.1 – PAREDE PLANA COMPOSTA       | 86  |
| 6.2 – SISTEMA CILÍNDRICO COMPOSTO | 88  |
| 6.3 – SISTEMA ESFÉRICO COMPOSTO   | 90  |
| 7 – GERAÇÃO DE CALOR UNIFORME     | 92  |
| 7.1 – A PAREDE PLANA              | 93  |
| 7.2 – CASCA CILÍNDRICA COMPOSTA   | 95  |
| 7.3 – A ESFERA MACIÇA             | 96  |
| 8 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS          | 102 |

### **CAPÍTULO 3 - PROBLEMAS AVANÇADOS DE CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE**

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| 1 – INTRODUÇÃO                                        | 110 |
| 2 – CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL                    | 111 |
| 2.1 – CONDUTIVIDADE TÉRMICA DEPENDENTE DA POSIÇÃO     | 111 |
| 2.2 – CONDUTIVIDADE TÉRMICA DEPENDENTE DA TEMPERATURA | 118 |
| 3 – GERAÇÃO DE ENERGIA NÃO-UNIFORME                   | 124 |
| 3.1 – GERAÇÃO DE ENERGIA DEPENDENTE DA POSIÇÃO        | 124 |
| 3.2 – GERAÇÃO DE ENERGIA DEPENDENTE DA TEMPERATURA    | 131 |
| 4 – RESFRIAMENTO CONVECTIVO-RADIATIVO DE SÓLIDOS      | 145 |
| 5 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS                              | 150 |

### **CAPÍTULO 4 - ALETAS**

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 1 – OBJETIVO DAS ALETAS                       | 154 |
| 2 – HISTÓRICO                                 | 156 |
| 3 – TIPOS DE ALETAS                           | 159 |
| 4 – EFICIÊNCIA DE UMA ALETA                   | 161 |
| 5 – HIPÓTESES DE ANÁLISE                      | 161 |
| 6 – ALETAS LONGITUDINAIS                      | 163 |
| 6.1 – EQUAÇÃO DIFERENCIAL GENERALIZADA        | 163 |
| 6.2 – ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL RETANGULAR | 166 |
| 6.3 – ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL TRIANGULAR | 170 |

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| 6.4 – ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL PARABÓLICO CÔNCAVO | 173 |
| 6.5 – ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL PARABÓLICO CONVEXO | 177 |
| 7 – ALETAS RADIAIS                                    | 183 |
| 7.1 – EQUAÇÃO DIFERECIAL GENERALIZADA                 | 183 |
| 7.2 – ALETA RADIAL DE PERFIL RETANGULAR               | 186 |
| 7.3 – ALETA RADIAL DE PERFIL HIPERBÓLICO              | 193 |
| 8 – ALETAS PINIFORMES                                 | 198 |
| 8.1 – EQUAÇÃO DIFERENCIAL GENERALIZADA                | 198 |
| 8.2 – ALETA PINIFORME DE PERFIL CILÍNDRICO            | 202 |
| 8.3 – ALETA PINIFORME DE PERFIL RETANGULAR            | 206 |
| 8.4 – ALETA PINIFORME DE PERFIL ELÍPTICO              | 209 |
| 8.5 – ALETA PINIFORME DE PERFIL CÔNICO                | 212 |
| 8.6 – ALETA PINIFORME DE PERFIL PARABÓLICO CÔNCAVO    | 215 |
| 8.7 – ALETA PINIFORME DE PERFIL PARABÓLICO CONVEXO    | 219 |
| 9 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS                        | 257 |
| 10 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS                             | 258 |

## **CAPÍTULO 5 – CONDUÇÃO MULTIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE**

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| 1 – A EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR                                   | 261 |
| 2 – MÉTODO DE SOLUÇÃO E LIMITAÇÕES                                   | 262 |
| 3 – EQUAÇÃO DIFERENCIAL HOMOGÊNEA E CONDIÇÕES DE CONTORNO HOMOGÊNEAS | 263 |
| 4 – PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DE STURM-LIOUVILLE: ORTOGONALIDADE | 264 |
| 5 – CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL EM COORDENADAS ESFÉRICAS                  | 311 |
| 6 – CONDUÇÃO TRIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE                     | 321 |
| 7 – CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-HOMOGÊNEAS O MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO    | 326 |
| 8 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS                                             | 349 |

## **CAPÍTULO 6 – CONDUÇÃO TRANSIENTE**

|                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 1-MÉTODO SIMPLIFICADO: MÉTODO DA CAPACIDADE CONCENTRADA            | 353 |
| 1.1-CRITÉRIO PARA SE DESPREZAR A VARIAÇÃO ESPACIAL DE TEMPERATURAS | 353 |
| 1.2-ANÁLISE GERAL DA CAPACIDADE CONCENTRADA                        | 355 |
| 1.2.1-RESFRIAMENTO CONVECTIVO COM $h$ CONSTANTE                    | 357 |
| 1.2.2-RESFRIAMENTO CONVECTIVO COM $h$ VARIÁVEL                     | 359 |
| 1.2.3-RESFRIAMENTO CONVECTIVO COM $c$ VARIÁVEL                     | 361 |
| 1.2.4-RESFRIAMENTO RADIATIVO                                       | 362 |
| 1.2.5-SEM RADIAÇÃO E CONVECÇÃO COM $h$ CONSTANTE                   | 364 |
| 2-EFEITOS ESPACIAIS                                                | 369 |
| 2.1-A PAREDE PLANA COM CONVECÇÃO                                   | 369 |
| 2.1.1-SOLUÇÃO EXATA                                                | 371 |
| 2.1.2-SOLUÇÃO APROXIMADA                                           | 375 |
| 2.1.3-TRANSFERÊNCIA TOTAL DE ENERGIA                               | 376 |
| 2.2-O CILINDRO LONGO COM CONVECÇÃO                                 | 378 |
| 2.2.1-SOLUÇÃO EXATA                                                | 380 |
| 2.2.2-SOLUÇÃO APROXIMADA                                           | 384 |
| 2.2.3-TRANSFERÊNCIA TOTAL DE ENERGIA                               | 385 |
| 2.3-A ESFERA COM CONVECÇÃO                                         | 387 |
| 2.3.1-SOLUÇÃO EXATA                                                | 389 |
| 2.3.2-SOLUÇÃO APROXIMADA                                           | 394 |
| 2.3.3-TRANSFERÊNCIA TOTAL DE ENERGIA                               | 394 |
| 3-CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE                                | 397 |
| 4-O MÉTODO DA SIMILARIDADE                                         | 402 |
| 5-O MÉTODO INTEGRAL                                                | 408 |
| 6-EXERCÍCIOS PROPOSTOS                                             | 415 |

## APÊNDICE – MATEMÁTICA APLICADA

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1-EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM LINEARES E HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES     | 419 |
| 2-EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM LINEARES E NÃO-HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES | 420 |

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1-SOLUÇÃO GERAL PELO MÉTODO DOS COEFICIENTES<br>INDETERMINADOS | 420 |
| 2.2-SOLUÇÃO GERAL PELO MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS         | 422 |
| 3-EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BESSEL E FUNÇÕES DE BESSEL              | 423 |
| 3.1-FORMA GERAL DAS EQUAÇÕES DE BESSEL                           | 423 |
| 3.2-SOLUÇÕES: FUNÇÕES DE BESSEL                                  | 424 |
| 3.3-FORMAS DAS FUNÇÕES DE BESSEL                                 | 425 |
| 3.4-FORMAS ESPECIAIS FECHADAS DAS FUNÇÕES DE BESSEL              | 428 |
| 3.5-RELAÇÕES ESPECIAIS PARA $n = 1, 2, 3, \dots$                 | 429 |
| 3.6-DERIVADAS E INTEGRAIS DE FUNÇÕES DE BESSEL                   | 429 |
| 3.7-INTEGRAIS NORMALIZADAS DE BESSEL                             | 430 |
| 4-ORTOGONALIDADE E FUNÇÕES ORTOGONAIS                            | 431 |
| 5-FUNÇÃO ERRO E FUNÇÃO ERRO COMPLEMENTAR                         | 435 |
| 6-FUNÇÃO GAMA                                                    | 436 |
| 7-FUNÇÃO INTEGRAL EXPONENCIAL                                    | 438 |
| 8-EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE LEGENDRE                                | 439 |

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 1

|                                                                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Experimento de condução térmica em regime permanente.                                                                                              | 6  |
| Figura 2 – A relação entre o sistema de coordenadas, o sentido do escoamento de calor e o gradiente de temperaturas em uma dimensão.                          | 7  |
| Figura 3 – O vetor fluxo térmico normal a uma isoterma em um sistema de coordenadas bidimensional.                                                            | 8  |
| Figura 4 – Faixa de condutividade térmica de vários estados da matéria à temperaturas e pressões normais.                                                     | 13 |
| Figura 5 – A dependência com a temperatura da condutividade térmica de sólidos selecionados.                                                                  | 13 |
| Figura 6 – A dependência com a temperatura da condutividade térmica de gases selecionados a pressões normais.                                                 | 14 |
| Figura 7 – A dependência com a temperatura da condutividade térmica de líquidos não-metálicos selecionados sob condições saturadas.                           | 15 |
| Figura 8 – Volume de controle diferencial, $dx dy dz$ , para a análise da condução de calor em coordenadas retangulares $x, y, z$ .                           | 18 |
| Figura 9 – Volume de controle $dx dy$ para a representação dos termos advectivos.                                                                             | 20 |
| Figura 10 – Esquema utilizado para calcular o fluxo de calor na direção circunferencial de um sistema de coordenadas cilíndricas.                             | 26 |
| Figura 11 – Volume de controle diferencial $r d\phi dr dz$ , para a análise da condução de calor em coordenadas cilíndricas $r, \phi, z$ .                    | 27 |
| Figura 12 – Volume de controle $r d\phi dr dz$ para a representação dos termos advectivos.                                                                    | 28 |
| Figura 13 – Volume de controle diferencial $r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta$ para a análise da condução de calor em coordenadas esféricas $r, \phi, \theta$ . | 32 |
| Figura 14 – Volume de controle $r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta$ para a representação dos termos advectivos.                                                  | 34 |
| Figura 15 – Condição de contorno de primeira espécie (Dirichlet).                                                                                             | 38 |
| Figura 16 – Condição de contorno de segunda espécie (Neumann).                                                                                                | 40 |
| Figura 17 – Condição de contorno de terceira espécie (Robin).                                                                                                 | 41 |

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 18 – Duas situações para a representação das condições de contorno. | 45 |
| Figura 19 – Interface com fonte de calor.                                  | 46 |

## CAPÍTULO 2

|                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1 – Parede plana com fluido em ambos os lados.                                                          | 54  |
| Figura 2 – Parede plana composta.                                                                              | 59  |
| Figura 3 – Esquema de um circuito elétrico na qual é baseada a analogia entre a lei de Ohm e a lei de Fourier. | 61  |
| Figura 4 – Seção transversal de um duto cilíndrico.                                                            | 63  |
| Figura 5 – Seção transversal de um duto cilíndrico revestido com camadas de diferentes isolantes térmicos.     | 69  |
| Figura 6 – Seção transversal de uma casca esférica.                                                            | 71  |
| Figura 7 – Seção transversal de uma casca esférica revestida com camadas de diferentes isolantes térmicos.     | 78  |
| Figura 8 – Exemplos de seções cônicas truncadas.                                                               | 80  |
| Figura 9 – Configuração plana composta, janela de parede dupla e parede tripla.                                | 87  |
| Figura 10 – Casca cilíndrica com aquecedor elétrico delgado.                                                   | 89  |
| Figura 11 – Casca esférica composta.                                                                           | 91  |
| Figura 12 – Parede plana com geração de calor uniforme.                                                        | 93  |
| Figura 13 – Casca cilíndrica composta com geração de energia volumétrica uniforme.                             | 95  |
| Figura 14 – Geometrias com mesmo comprimento característico $a$ .                                              | 96  |
| Figura 15 – Distribuição adimensional de temperaturas.                                                         | 101 |

## CAPÍTULO 3

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1 – Parede plana com condutividade térmica dependente da posição.              | 111 |
| Figura 2 – Casca cilíndrica com condutividade térmica dependente da posição.          | 116 |
| Figura 3 – Parede plana com condutividade térmica dependente da temperatura.          | 119 |
| Figura 4 – Casca cilíndrica com condutividade térmica dependente da temperatura.      | 122 |
| Figura 5 – Parede plana com taxa de geração de energia térmica dependente da posição. | 125 |
| Figura 6 – Parede plana com taxa de geração de energia térmica dependente da posição. |     |

|                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                                                                                                                                          | 127 |
| Figura 7 – Cilindro maciço com taxa de geração de energia térmica dependente da posição.                                                 | 129 |
| Figura 8 – Parede plana com geração de energia térmica dependente da temperatura.                                                        | 132 |
| Figura 9 – Cilindro maciço longo com geração de energia térmica dependente da temperatura.                                               | 135 |
| Figura 10 – Esfera maciça com geração de energia térmica dependente da temperatura.                                                      | 140 |
| Figura 11 – Configurações para o estudo do resfriamento combinado convectivo-radiativo (a) parede plana e (b) cilindro e esfera maciços. | 146 |

## CAPÍTULO 4

|                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1 – Condução e convecção combinadas em um elemento estrutural.                                                                                  | 154 |
| Figura 2 – Uso de aletas para melhorar a transferência de calor em uma parede plana.<br>(a) Superfície sem aletas. (b) Superfície aletada.             | 155 |
| Figura 3 – Alguns exemplos comuns de superfícies estendidas.                                                                                           | 160 |
| Figura 4 – Aplicações de conjuntos de aletas.                                                                                                          | 160 |
| Figura 5 – Aplicações de conjuntos de aletas.                                                                                                          | 161 |
| Figura 6 – Aleta longitudinal de perfil arbitrário: (a) sistema de coordenadas, (b) área de perfil da aleta, e (c) área da seção transversal da aleta. | 163 |
| Figura 7 – Aleta longitudinal de perfil retangular.                                                                                                    | 167 |
| Figura 8 - Aleta longitudinal de perfil triangular,                                                                                                    | 171 |
| Figura 9 – Aleta longitudinal de perfil parabólico côncavo.                                                                                            | 173 |
| Figura 10 – Aleta longitudinal de perfil parabólico convexo.                                                                                           | 178 |
| Figura 11 – Gráfico de eficiências para aletas longitudinais.                                                                                          | 182 |
| Figura 12 – Aleta radial de perfil arbitrário.                                                                                                         | 183 |
| Figura 13 – Aleta radial de perfil retangular.                                                                                                         | 187 |
| Figura 14 – Eficiência de uma aleta radial de perfil hiperbólico.                                                                                      | 194 |
| Figura 15 – Gráfico de eficiências para aletas radiais.                                                                                                | 199 |
| Figura 16 – Aleta piniforme de perfil arbitrário.                                                                                                      | 199 |
| Figura 17 – Aleta piniforme de perfil cilíndrico.                                                                                                      | 203 |
| Figura 18 – Aleta piniforme de perfil retangular.                                                                                                      | 207 |

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 19 – Aleta piniforme de perfil elíptico.            | 209 |
| Figura 20 – Aleta piniforme de perfil cônico.              | 213 |
| Figura 21 – Aleta piniforme de perfil parabólico côncavo.  | 216 |
| Figura 22 – Aleta piniforme de perfil parabólico convexo.  | 220 |
| Figura 23 – Gráfico de eficiências para aletas piniformes. | 225 |

## CAPÍTULO 5

|                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1 – Esquema do EXEMPLO 1.                                                   | 267 |
| Figura 2 – Esquema do EXEMPLO 2.                                                   | 276 |
| Figura 3 – Representação gráfica da Eq. (73).                                      | 281 |
| Figura 4 – Esquema do EXEMPLO 3.                                                   | 286 |
| Figura 5 – Representação gráfica da Eq. (107).                                     | 292 |
| Figura 6 – Esquema do EXEMPLO 4.                                                   | 295 |
| Figura 7 – Representação gráfica da Eq. (137).                                     | 299 |
| Figura 8 – Esquema do EXEMPLO 5.                                                   | 303 |
| Figura 9 – Esquema do EXEMPLO 6.                                                   | 312 |
| Figura 7 – Esquema do EXEMPLO 7.                                                   | 321 |
| Figura 8 – Condução bidimensional com quatro condições de contorno não-homogêneas. | 326 |
| Figura 9 – Divisão do problema original em quatro problemas mais simples.          | 328 |
| Figura 10 – Esquema do EXEMPLO 8.                                                  | 330 |
| Figura 11 – Esquema do problema a ser resolvido por superposição.                  | 332 |
| Figura 12 – Esquema do EXEMPLO 9.                                                  | 341 |
| Figura 13 – Esquema do problema a ser resolvido por superposição.                  | 343 |

## CAPÍTULO 6

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1 – Volume de controle para análise geral via capacidade concentrada.         | 356 |
| Figura 2 – Variação de $\theta$ em função de $\tau$ .                                | 358 |
| Figura 3 – Variação de $\frac{Q}{\rho V c (T_i - T_\infty)}$ em função de $\tau$ .   | 359 |
| Figura 4 – Variação de $\theta$ em função de $\tau$ para diferentes valores de $n$ . | 361 |

|                                                                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 5 – Variação de $\theta$ em função de $\tau$ para diferentes valores de $a$ .                                     | 362 |
| Figura 6 – Parede plana unidimensional com temperatura inicial uniforme submetida subitamente a condições convectivas.   | 370 |
| Figura 7 – Representação gráfica da Eq. (60) para diferentes números de Biot.                                            | 373 |
| Figura 8 – Cilindro longo unidimensional com temperatura inicial uniforme submetido subitamente a condições convectivas. | 379 |
| Figura 9 – Representação gráfica da Eq. (119) para diferentes números de Biot.                                           | 382 |
| Figura 10 – Esfera unidimensional com temperatura inicial uniforme submetida subitamente a condições convectivas.        | 388 |
| Figura 11 – Representação gráfica da Eq. (164) para diferentes números de Biot.                                          | 382 |
| Figura 12 – Esquema do EXEMPLO 3.                                                                                        | 398 |
| Figura 13 – Esquema do EXEMPLO 4.                                                                                        | 403 |
| Figura 14 – Esquema do EXEMPLO 5.                                                                                        | 408 |

## APÊNDICE – MATEMÁTICA APLICADA

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1 – Comportamento da função $J_n(x)$ .                                             | 426 |
| Figura 2 – Comportamento da função $Y_n(x)$ .                                             | 426 |
| Figura 3 – Comportamento da função $I_n(x)$ .                                             | 427 |
| Figura 4 – Comportamento da função $K_n(x)$ .                                             | 427 |
| Figura 5 – Comportamento das funções $\operatorname{erf}(x)$ e $\operatorname{erfc}(x)$ . | 437 |
| Figura 6 – Comportamento da função $\Gamma(x)$ .                                          | 437 |
| Figura 7 – Comportamento da função $\operatorname{Ei}(x)$ .                               | 439 |
| Figura 8 – Comportamento do polinômio $P_n(x)$ .                                          | 441 |
| Figura 9 – Comportamento do polinômio $Q_n(x)$ .                                          | 441 |
| Figura 10 – Comportamento dos polinômios $P_n^1(x)$ .                                     | 443 |
| Figura 11 – Comportamento dos polinômios $P_n^2(x)$ .                                     | 443 |
| Figura 12 – Comportamento dos polinômios $Q_n^1(x)$ .                                     | 444 |
| Figura 13 – Comportamento dos polinômios $Q_n^2(x)$ .                                     | 444 |

## **LISTA DE TABELAS**

### **CAPÍTULO 6**

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| Tabela 1 – Quatro primeiras raízes da Eq. (75).  | 365 |
| Tabela 2 – Quatro primeiras raízes da Eq. (104). | 373 |
| Tabela 3 – Quatro primeiras raízes da Eq. (149). | 383 |

### **APÊNDICE – MATEMÁTICA APLICADA**

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 1 – Tentativas para soluções particulares.         | 421 |
| Tabela 2 – Valores práticos das funções de Bessel.        | 428 |
| Tabela 3 – Integrais normalizadas para cilindros sólidos. | 431 |

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO A CONDUÇÃO TÉRMICA

### 1-ALGUMAS APLICAÇÕES DE CONDUÇÃO TÉRMICA

Condução térmica consiste na propagação de calor no interior de um meio estacionário (sólido, líquido ou gasoso), aquecido irregularmente ou entre meios estacionários distintos em contato direto. Vamos tentar entender este processo. Imagine que peguemos uma barra de ferro e aquecemos uma de suas extremidades de forma que iremos segurar a outra extremidade com a mão. Após certo período iremos observar que a barra irá esquentar da extremidade onde está a chama até a extremidade onde está a mão. Esse efeito de transferência de calor de uma extremidade para a outra é o que nós chamamos de condução térmica. Note que a condução térmica precisa de um meio material para ocorrer, ou seja, a condução térmica não ocorre no vácuo. Em termos microscópicos, a região próxima da chama tem o movimento vibratório de suas moléculas aumentado, adquirindo assim maior energia cinética, que é transferida através de choques às partículas vizinhas, que também aumentam seu movimento vibratório. Através desse transporte de energia, toda a barra é aquecida.

A condução térmica ocorre com maior ou menor facilidade dependendo da constituição atômica do material, a qual faz com que ele seja classificado como condutor térmico ou isolante térmico. Os metais, por exemplo, são bons condutores de calor devido ao fato de possuírem os elétrons mais externos “fracamente” ligados, tornando-se livres para transportar energia por meio de colisões através do metal. Já o vidro, borracha, isopor, lã, algodão, gelo, peles de alguns animais, gases, cortiça, poliestireno, fibra cerâmica (composta de alumina e sílica), lã de vidro (um componente fabricado em alto forno a partir de sílica e sódio, aglomerados por resinas sintéticas), etc., são maus condutores de calor (isolantes térmicos) devido ao fato de possuírem os elétrons mais externos de seus átomos firmemente ligados.

Os líquidos e gases, em geral, são maus condutores de calor. O ar, por exemplo, é um ótimo isolante térmico. As roupas de lã, os pelos dos animais, o isopor, a serragem, são ótimos isolantes térmicos pois retêm o ar entre suas fibras. A neve é outro exemplo de um bom isolante térmico. Isto acontece porque os flocos de neve são formados por cristais, que se acumulam formando camadas fofas aprisionando o ar. No frio, as aves costumam eriçar suas penas para captar o ar entre elas e se aquecerem. Nas construções, para melhor o isolamento térmico e acústico, aconselha-se utilizar paredes duplas com tijolos cerâmicos, deixando um espaço de ar entre as paredes. A propriedade dos materiais que indica a facilidade ou a dificuldade em se conduzir calor é chamada de condutividade térmica, que será discutida posteriormente com mais detalhes. Diversos exemplos diários ajudam a exemplificar situações onde o fenômeno da transferência de calor por condução térmica é relevante:

1. Usualmente, as panelas têm cabo de plástico ou de madeira, pois o plástico e a madeira têm sua condutividade térmica menor do que o ferro, e assim o calor demora um tempo muito maior para se propagar na madeira ou no plástico, fazendo com que consigamos pegar a panela do fogo sem que queimemos a mão;
2. Desde a pré-história o ser humano observa a natureza e aprende com ela. Os humanos primitivos perceberam que alguns animais que resistem bem ao frio são revestidos de pelos. Essa observação pode ter inspirado o ser humano pré-histórico a usar peles de animais para se proteger do frio. Atualmente usamos roupas apropriadas para isso, os agasalhos. Os agasalhos que usamos, os pelos dos animais e a camada de gordura de alguns deles têm sob a pele são bons isolantes térmicos, que dificultam a perda de calor do organismo para o ambiente mais frio;
3. As penas das aves também têm o papel de dificultar a perda de calor para o ambiente. Entre as penas, fica retido um pouco de ar, que é um bom isolante térmico e ajuda a reduzir a perda de calor;
4. O isopor, usado para fazer caixas térmicas isolantes, se vale exatamente desse mesmo princípio. Ele nada mais é do que um tipo de plástico (chamado poliestireno) fabricado de modo a conter diversas bolhas de ar minúsculas dentro de si. Essas bolhas deixam o isopor fofo e o torna um bom isolante térmico;

5. O gelo também é, por incrível que possa parecer, um bom isolante térmico. Os esquimós possivelmente perceberam que a camada de gelo que se forma na superfície dos lagos impede o contato da água que fica abaixo dela com o ar frio, ou seja, funciona como isolante térmico e, por isso, essa água não congela. Possivelmente daí surgiu a inspiração para fazer os iglus, construções de gelo cujo interior é mais quente que o ambiente externo;
6. Alumínio e aço inox são metais empregados em panelas, pois garantem rápida transferência de calor da chama para o alimento;
7. Panelas e vasilhas de vidro ou de cerâmica exigem maior tempo para transferir o calor ao ambiente. É por isso que, para mantermos a temperatura do alimento, o ideal é servirmos em vasilhas de cerâmica;
8. Um mergulhador utiliza uma roupa de neoprene que reduz a perda do calor do corpo. O neoprene é formado por um tipo de borracha que contém milhares de minúsculas bolhas em seu interior. Graças a essa característica, a água que entra na roupa não sai, logo ela é aquecida pela temperatura corporal e cria uma barreira isolante entre o mergulhador e o meio líquido no qual ele está envolto;
9. Os beduínos do deserto usam roupas grossas e de lã (isolante térmicos) para que seu corpo, durante o dia, mantenha a temperatura interna em torno dos  $36\text{ }^{\circ}\text{C}$  e não receba calor do meio exterior que pode chegar a até  $45\text{ }^{\circ}\text{C}$  e, durante a noite quando as temperaturas são muito baixas, reduzam a perda de calor para o meio externo;
10. Um conjunto de componentes eletrônicos usualmente é resfriado por convecção natural e/ou forçada. Um sumidouro de calor consistindo em um conjunto de aletas é recomendado para manter os componentes eletrônicos abaixo de uma temperatura especificada. A determinação do número necessário de aletas, configuração, dimensões e material é um problema de condução térmica;
11. No caso de uma falha em uma bomba responsável pela circulação de um fluido refrigerante em um núcleo de um reator nuclear, a temperatura do elemento nuclear começará a aumentar até sua fusão. O tempo necessário para o início do processo de fusão é um problema de condução com mudança de fase;
12. Estruturas glaciares estão derretendo devido ao aquecimento global. A estimativa da quantidade de gelo fundida até o ano de 2050, por exemplo, é um problema de condução térmica com mudança de fase;

13. Um escudo de calor é utilizado para proteger um veículo espacial durante sua reentrada na atmosfera. Ocorre o fenômeno chamado de ablação (perda de material sofrida pela superfície de um veículo espacial, por fusão ou vaporização, quando de seu regresso à Terra) do escudo de calor conforme ele atravessa a atmosfera. A especificação do material e da espessura do escudo de calor para proteger o veículo espacial durante sua reentrada é um problema de condução térmica;
14. Crio cirurgias são utilizadas para o tratamento de certos cânceres de pele pelo congelamento do tecido maligno. Entretanto, o contato prolongado com as substâncias utilizadas na criogenia (nitrogênio líquido, mistura de gases, por exemplo) pode provocar danos ao tecido saudável próximo da região afetada. A determinação do histórico de temperaturas na vizinhança do tecido afetado pode ajudar no controle de possíveis alterações do tecido saudável;
15. A condução de calor no processo de fundição é acompanhada por mudança de fase. A determinação da distribuição de temperaturas transiente e do movimento da interface da frente sólido-líquido é importante em uma análise de tensões térmicas. Essas tensões podem prejudicar a integridade física do material;
16. Em operações de processamento de alimentos, correias transportadoras são utilizadas para transportar produtos alimentícios através de espaços refrigerados. Uma análise de condução transiente pode ser utilizada para determinar a velocidade requerida da correia transportadora.

## **2-LEI DE FOURIER**

Não é uma tarefa fácil medir diretamente a transferência de calor em um meio. Em vez disso, a distribuição de temperaturas em um corpo pode ser medida com o auxílio de dispositivos tais como termopares, termistores, termômetros ou dispositivos óticos. O fluxo de calor (energia térmica transferida por unidade de tempo e por unidade área) em um meio é então determinado pela utilização do campo de temperaturas medido juntamente com a lei fundamental da condução de calor, comumente conhecida como lei de Fourier.

Essa lei relaciona o fluxo de calor ( $\text{W/m}^2$ ) em uma posição específica no interior de um meio de interesse ao gradiente de temperaturas na mesma posição. Embora essa

lei seja atribuída ao famoso físico e matemático francês Joseph Fourier, sua origem, e também a origem da teoria matemática da condução de calor, é ainda controversa. Uma descrição detalhada de eventos relevantes pode ser encontrada no trabalho de Herivel (1975). Segue um breve resumo de eventos históricos.

A primeira base teórica para problemas de condução de calor foi publicada por Fourier (1804). Nesse trabalho possivelmente equivocado, Fourier se refere a um trabalho de J. B. Biot (1804) sobre a propagação de calor em um meio. Historiadores da ciência (Herivel, 1975) especulam que o conteúdo do trabalho de Biot talvez tenha sido mostrado a Fourier antes de sua publicação, levando Fourier a focar sua atenção no problema da propagação de calor no contínuo. Talvez, então, o nome de Biot devesse ser mencionado junto ao nome de Fourier no momento dos créditos da origem da teoria matemática da condução de calor.

O trabalho original de Fourier foi expandido e publicado em sua autobiografia em 1807 (Refs. 4 e 5). Uma teoria expandida e corrigida de propagação de calor no contínuo foi apresentada por Fourier em 1811 em uma tese premiada (Refs. 6 e 7). Essa tese foi submetida por Fourier para concorrer ao grande prêmio do Instituto de Matemática em 1811. O comitê do prêmio que julgava os trabalhos apresentados era composto de Lagrange, Laplace, Malus, Haüy e Legendre. Apesar das críticas severas da tese de Fourier pelo comitê e em particular por Laplace a Lagrange, o grande prêmio foi dado à Fourier. Entretanto, o Instituto de Matemática não publicou o trabalho premiado de Fourier. Foi somente após Fourier tornar-se secretário da Academia Francesa de Ciências vários anos mais tarde que seu trabalho foi publicado (Refs. 6 e 7).

Em 1822 Fourier publicou uma versão melhorada de seu trabalho prévio sobre a propagação de calor na sua teoria analítica do calor (Fourier, 1822), que expandiu e generalizou conceitos matemáticos prévios como a expansão de uma função em uma série de funções trigonométricas (seno e cosseno). As Refs (6-8) são consideradas as primeiras fontes bem documentadas sobre a teoria da condução de calor.

A lei de Fourier é fenomenológica, isto é, ela foi desenvolvida a partir de fenômenos observados ao invés de ter sido derivada a partir de princípios fundamentais. Por esse motivo, vemos essa equação de taxa como uma generalização baseada em uma vasta evidência experimental. Por exemplo, considere o experimento de condução de calor, em regime permanente, mostrado na Fig. (1):

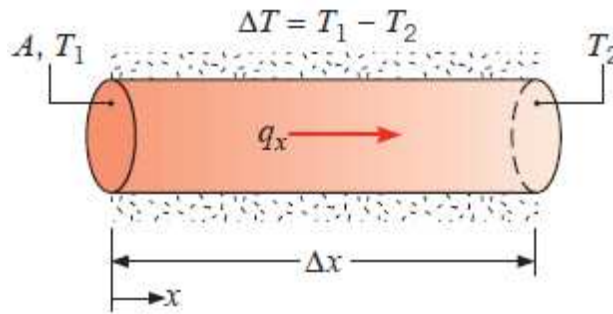


Figura 1 – Experimento de condução térmica em regime permanente (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

Um bastão cilíndrico de material conhecido tem a sua superfície lateral isolada termicamente, enquanto as duas faces restantes são mantidas a diferentes temperaturas, com  $T_1 > T_2$ . A diferença de temperaturas causa transferência de calor por condução no sentido positivo do eixo  $x$ . Somos capazes de medir a taxa de transferência de calor  $q_x$  e buscamos determinar como  $q_x$  depende das seguintes variáveis:  $\Delta T$ , a diferença de temperaturas;  $\Delta x$ , o comprimento do bastão; e  $A$ , a área da seção transversal do bastão.

Podemos imaginar que, inicialmente, os valores de  $\Delta T$  e  $\Delta x$  sejam mantidos constantes, enquanto o valor de  $A$  varia. Ao fazermos isso, verificamos que  $q_x$  é diretamente proporcional a  $A$ . Analogamente, mantendo  $\Delta T$  e  $A$  constantes, observamos que  $q_x$  varia inversamente com  $\Delta x$ . Finalmente, mantendo  $A$  e  $\Delta x$  constantes, temos que  $q_x$  é diretamente proporcional à  $\Delta T$ . O efeito conjunto é, então:

$$q_x \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (1)$$

Ao mudarmos o material (por exemplo, de um metal para um plástico), observaríamos que a proporcionalidade anterior permanece válida. Contudo, também constataríamos que para valores idênticos de  $A$ ,  $\Delta x$  e  $\Delta T$ , o valor de  $q_x$  seria menor para o plástico do que para o metal. Isso sugere que a proporcionalidade pode ser convertida em uma igualdade pela introdução de um coeficiente que é uma medida do comportamento do material. Assim, reescrevemos a Eq. (1) na seguinte forma:

$$q_x = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (2)$$

onde  $k$ , a condutividade térmica (W/(m.K)), é uma importante propriedade do material. Levando a expressão anterior ao limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , pode-se reescrever a Eq. (2) na seguinte forma:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (3)$$

ou para o fluxo de calor (fluxo térmico):

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (4)$$

O sinal de menos é necessário porque o calor é sempre transferido no sentido da diminuição das temperaturas. A lei de Fourier, como escrita na Eq. (4), implica que o fluxo de calor é uma grandeza direcional. Em particular, a direção de  $q_x''$  é normal a área da seção transversal  $A$ . Ou, de uma forma mais geral, a direção do fluxo de calor será sempre normal a uma superfície de temperatura constante, chamada de superfície isotérmica, conforme a Fig. (2):

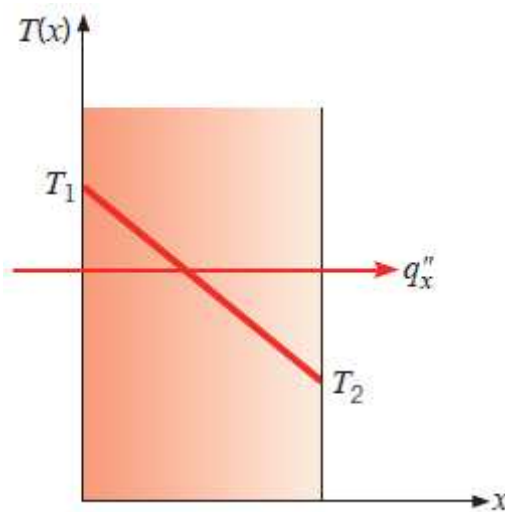


Figura 2 – Relação entre o sistema de coordenadas, o sentido do fluxo de calor e o gradiente de temperaturas em uma dimensão (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

A Fig. (2) ilustra o sentido do fluxo térmico  $q_x''$  em uma parede plana na qual o gradiente de temperaturas  $dT/dx$  é negativo. A partir da Eq. (4) conclui-se que  $q_x''$  é positivo. Note que as superfícies isotérmicas são planos normais à direção do eixo  $x$ . Reconhecendo que o fluxo térmico é uma grandeza vetorial, podemos escrever um enunciado mais geral para a equação da taxa de condução (lei de Fourier) na forma:

$$q'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial x} + j\frac{\partial T}{\partial y} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (5)$$

onde  $\nabla$  é o operador gradiente tridimensional e  $T(x, y, z)$  é o campo escalar de temperaturas. Está implícito na Eq. (5) que o vetor fluxo térmico encontra-se em uma direção perpendicular às superfícies isotérmicas. Consequentemente, uma forma alternativa da lei de Fourier pode ser escrita como:

$$q_n'' = -k \frac{dT}{dn} \quad (6)$$

onde  $q_n''$  é o fluxo térmico em uma direção  $n$ , que é normal a uma isoterma, como mostrado para o caso bidimensional da Fig. (3). A transferência de calor é mantida pelo gradiente de temperaturas ao longo de  $n$ :

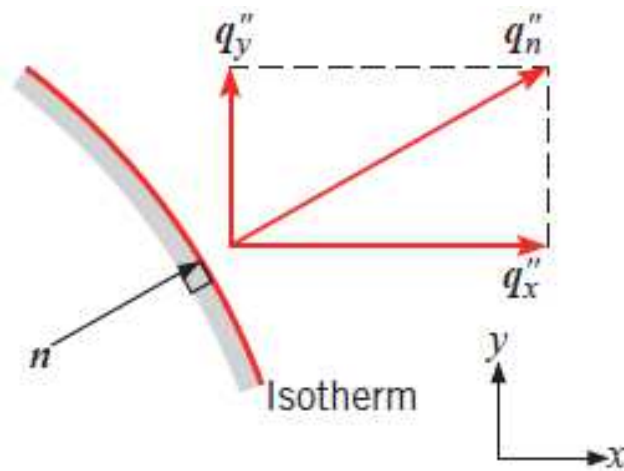


Figura 3 – Vetor fluxo térmico normal a uma isoterma em um sistema de coordenadas bidimensional (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

Deve ser observado que o vetor fluxo térmico pode ser decomposto em componentes, de tal forma que, em coordenadas retangulares, a expressão geral para  $q''$  é:

$$q'' = i q''_x + j q''_y + k q''_z \quad (7)$$

onde, a partir da Eq. (5), tem-se que:

$$q''_x = -k \frac{dT}{dx} \quad q''_y = -k \frac{dT}{dy} \quad q''_z = -k \frac{dT}{dz} \quad (8)$$

Cada uma dessas expressões relaciona o fluxo térmico através de uma superfície ao gradiente de temperaturas em uma direção perpendicular à superfície. Também está implícito na Eq. (5) que o meio do qual a condução ocorre é isotrópico. Em tal meio, o valor da condutividade térmica é independente da direção da coordenada.

A lei de Fourier é a pedra fundamental da transferência de calor por condução e suas características principais são resumidas a seguir. Ela não é uma expressão que possa ser derivada a partir de princípios fundamentais; ao contrário, ela é uma generalização baseada em evidências experimentais. Ela é uma expressão que define uma importante propriedade dos materiais, a condutividade térmica. Além disso, a lei de Fourier é uma expressão vetorial, indicando que o fluxo térmico é normal a uma isoterma e no sentido da diminuição das temperaturas. Finalmente, deve ser notado que a lei de Fourier se aplica a toda a matéria, independentemente de seu estado físico (sólido, líquido ou gás).

### 3-LEI DE FOURIER PARA MATERIAIS ANISOTRÓPICOS

No item anterior foi considerado que a condução ocorre em materiais ditos isotrópicos; ou seja, a condutividade térmica não depende da direção. Existem diversos materiais naturais e sintéticos na qual a condutividade térmica varia com a direção; eles são ditos materiais anisotrópicos. Por exemplo: cristais, madeira, rochas sedimentadas, metais que tenham sido submetidos a processamento pesado, folhas laminadas, cabos, materiais de blindagem térmica para veículos espaciais, fibras de reforço de estruturas

compostas, dentre outros. Na madeira, por exemplo, a condutividade térmica é diferente ao longo do grão, através do grão e circunferencialmente. Em folhas laminadas a condutividade térmica não é a mesma ao longo e através das laminações. Dessa forma, fica claro que a condução de calor em materiais anisotrópicos tem numerosas aplicações importantes em vários campos da ciência e da engenharia.

A grande maioria dos estudos recentes sobre esse assunto estão limitados à transferência de calor por condução unidimensional em cristais. A equação diferencial da condução de calor em materiais anisotrópicos envolve derivadas cruzadas das variáveis espaciais; além disso, a análise geral da condução em materiais anisotrópicos é bastante complexa. Quando as derivadas cruzadas estão ausentes na equação da condução de calor, como no caso de sólidos ortotrópicos, a análise de transferência de calor é significativamente simplificada e pode ser encontrada em diversas referências na literatura. Trabalhos experimentais relacionadas à condução de calor em materiais anisotrópicos são bastante restritos e são encontrados principalmente estudos de condução unidimensional em materiais ortotrópicos.

No caso de materiais isotrópicos, a lei de Fourier, expressa pela Eq. (5), relaciona o fluxo de calor ao gradiente de temperaturas em qualquer ponto no interior de um material isotrópico, conforme discutido anteriormente. A condutividade térmica em qualquer ponto de um material isotrópico, conforme a Eq. (5), é independente da direção. No caso de materiais anisotrópicos, por outro lado, a condutividade térmica é dependente da direção. Portanto, a lei de Fourier precisa ser generalizada para levar em consideração a dependência direcional da condutividade térmica. A lei de Fourier generalizada para condução de calor em materiais anisotrópicos em um sistema de coordenadas retangulares pode ser escrita na seguinte forma:

$$q_i'' = - \sum_{j=x,y,z} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad i = x, y, z \quad (9)$$

Aplicando a Eq. (9) em um sistema cartesiano retangular  $x, y, z$  obtém-se três equações para o fluxo de calor, cada uma correspondendo a uma direção cartesiana:

$$q_x'' = - \left( k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (10)$$

$$q_y'' = - \left( k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (11)$$

$$q_z'' = - \left( k_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (12)$$

Consequentemente, a condutividade térmica,  $k_{ij}$ , de um material anisotrópico é um tensor de segunda ordem. As Eqs. (10-12) podem ser reescritas na forma matricial da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} q_x'' \\ q_y'' \\ q_z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \\ \partial T / \partial z \end{bmatrix} \quad (13)$$

O significado dos coeficientes da condutividade térmica na matriz da Eq. (13) é similar aos coeficientes de tensão na mecânica do contínuo. Por exemplo,  $k_{xx}$  é a condutividade térmica na direção  $x$  em um ponto localizado em um plano perpendicular ao eixo  $x$ . De maneira similar,  $k_{xy}$  é a condutividade térmica na direção  $y$  em um ponto localizado em um plano perpendicular ao eixo  $x$  e  $k_{xz}$  é a condutividade térmica na direção  $z$  em um ponto localizado em um plano perpendicular ao eixo  $x$ .

Em geral o primeiro subscrito no coeficiente da condutividade térmica se refere ao eixo perpendicular na qual está localizado um plano passando através de ponto de interesse. O segundo subscrito se refere a direção da condutividade térmica. Os vários coeficientes na matriz de condutividades térmicas não são independentes. Existem diversas relações matemáticas entre os coeficientes, como por exemplo,  $k_{ij} = k_{ji}$ ,  $k_{ii}k_{jj} - k_{ij}^2 > 0$  para  $i \neq j$ .

Expressões similares para as Eqs. (9-13) podem ser obtidas para outros sistemas de coordenadas. Como o estudo da condução de calor em materiais anisotrópicos está fora do escopo desse curso, tais expressões não serão apresentadas. Os princípios de condução de calor em meios anisotrópicos são utilizados em diversas classes de materiais compósitos e constituem um tópico de pesquisa contemporâneo na área de

ciências térmicas. Tais princípios podem ser encontrados em trabalhos científicos e livros especializados.

#### 4-CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Para se utilizar a lei de Fourier, a condutividade térmica do material deve ser conhecida. Essa propriedade, que é classificada como uma propriedade de transporte, fornece uma indicação da taxa na qual a energia é transferida pelo processo de difusão. Ela depende da estrutura física da matéria, atômica e molecular, que está relacionada ao estado da matéria. A partir da Eq. (8), as condutividades térmicas associadas à condução nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  são definidas como:

$$k_x = -\frac{q_x''}{(\partial T/\partial x)} \quad k_y = -\frac{q_y''}{(\partial T/\partial y)} \quad k_z = -\frac{q_z''}{(\partial T/\partial z)} \quad (14)$$

Para um material isotrópico, no entanto, a condutividade térmica é independente da direção de transferência de calor, ou seja,  $k_x = k_y = k_z = k$ . Da Eq. (14) tem-se que, para um dado gradiente de temperaturas, o fluxo térmico por condução aumenta com o aumento da condutividade térmica. Em geral, a condutividade térmica de um sólido é maior do que a de um líquido, que, por sua vez, é maior do que a de um gás. Conforme ilustrado na Fig. (4), a condutividade térmica de um sólido pode ser mais do que quatro ordens de grandeza superior à de um gás. Essa tendência se deve, em grande parte, à diferença no espaçamento intermolecular nos dois estados.

Na visão moderna dos materiais, um sólido é composto de elétrons livres e átomos ligados formando a estrutura do material. Consequentemente, o transporte de energia térmica pode ser devido a dois efeitos: migração de elétrons livres e ondas vibracionais da estrutura. Em metais puros, a contribuição dos elétrons para a transferência de calor predomina, enquanto em não-condutores e semicondutores a contribuição das ondas vibracionais é predominante.

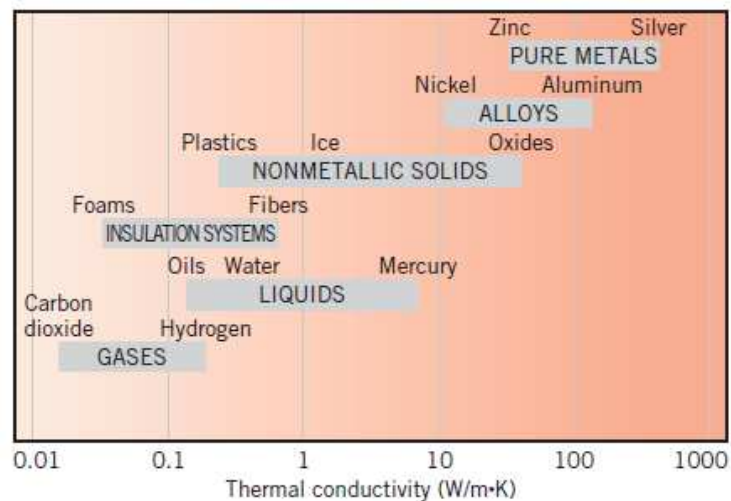


Figura 4 – Faixa de condutividade térmica de vários estados da matéria à temperaturas e pressões normais (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

A dependência de  $k$  com a temperatura é mostrada na Fig. (5) para sólidos metálicos e não-metálicos representativos:

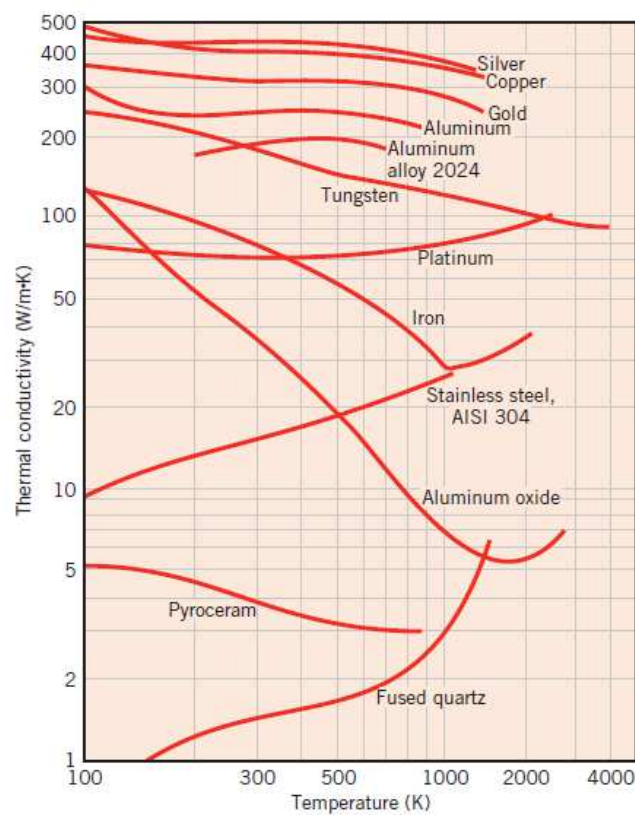


Figura 5 – A dependência com a temperatura da condutividade térmica de sólidos selecionados (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

O estado fluido inclui tanto líquidos quanto gases. Como o espaçamento intermolecular é muito maior e o movimento das moléculas é mais aleatório para o estado fluido com relação ao estado sólido, o transporte de energia térmica é menos efetivo. Consequentemente, a condutividade térmica de gases e líquidos é geralmente menor do que a de sólidos. Usualmente, a hipótese de que  $k$  é independente da pressão do gás é apropriada para a grande maioria das aplicações de engenharia. A condutividade térmica de um gás aumenta com a elevação da temperatura e com a diminuição da massa molecular, conforme a Fig. (5).

As condições moleculares associadas ao estado líquido são mais difíceis de serem descritas e os mecanismos físicos envolvidos na explicação da condutividade térmica não são ainda bem entendidos. A condutividade térmica de líquidos não-metálicos geralmente diminui com o aumento da temperatura. Conforme a Fig. (6), água, glicerina e óleo de motor são uma exceção. A condutividade térmica de líquidos normalmente não varia com a pressão, exceto nas proximidades do ponto crítico. Também é geralmente verdade que a condutividade térmica de líquidos diminui com o aumento da massa molecular.

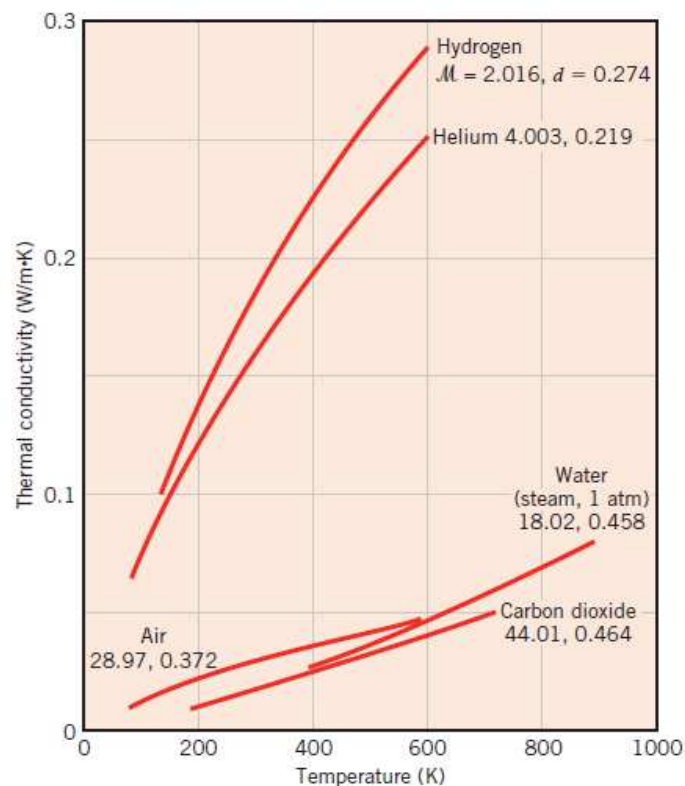


Figura 6 – A dependência com a temperatura da condutividade térmica de gases selecionados a pressões normais (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

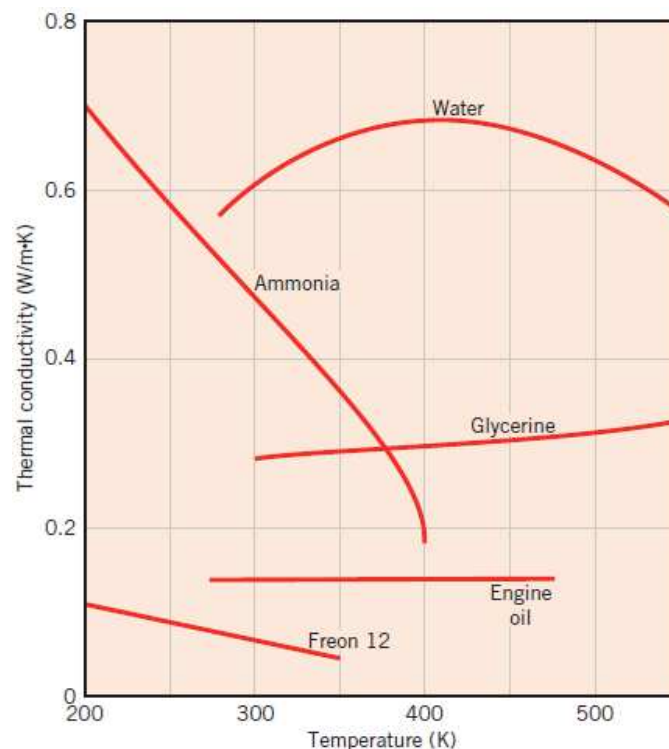


Figura 7 – A dependência com a temperatura da condutividade térmica de líquidos não-metálicos selecionados sob condições saturadas (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

Valores numéricos para a condutividade térmica de diversos materiais para uma ampla faixa de temperaturas podem ser encontrados na literatura. É importante notar então que a condutividade térmica de um material, em geral, varia com a temperatura. Entretanto, essa variação é pequena para muitos materiais utilizados na prática e pode ser desprezada. Nesses casos, podemos usar um valor médio para a condutividade térmica e a tratamos como uma constante. Essa prática é comum também para outras propriedades dependentes da temperatura como a densidade e o calor específico.

Quando a variação da condutividade térmica com a temperatura em um intervalo de temperaturas específico é muito grande, porém, pode ser necessário levar essa variação em conta para reduzir o erro de cálculo. Considerar a variação da condutividade térmica com a temperatura, em geral, complica a análise. Entretanto, em casos simples unidimensionais, as relações de transferência de calor podem ser obtidas de forma simples. Quando a variação da condutividade térmica com a temperatura  $k(T)$  é conhecida, o valor médio da condutividade térmica em um intervalo de temperaturas delimitado por  $T_1$  e  $T_2$  pode ser obtido da seguinte forma:

$$k_{\text{médio}} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k(T) dT}{T_2 - T_1} \quad (15)$$

Essa relação é baseada na exigência de que a taxa de transferência de calor através de um meio com condutividade térmica média constante  $k_{\text{médio}}$  seja igual à taxa de transferência de calor através do mesmo meio com condutividade térmica variável  $k(T)$ . Deve ser notado que no caso de condutividade térmica constante  $k(T) = k$ , e a Eq. (15) é reduzida para  $k_{\text{médio}} = k$ , como era de se esperar. A variação da condutividade térmica de um material com a temperatura em um intervalo de temperaturas de interesse geralmente pode ser aproximada como uma função linear e expressa por:

$$k(T) = k_0(1 + \beta T) \quad (16)$$

onde  $\beta$  [ $\text{K}^{-1}$ ] é o coeficiente de expansão térmica e  $k_0$  a condutividade térmica avaliada em um valor de referência. O valor médio da condutividade térmica no intervalo de temperaturas delimitado por  $T_1$  e  $T_2$  pode ser determinado da seguinte forma:

$$k_{\text{médio}} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k_0(1 + \beta T) dT}{T_2 - T_1} = k_0 \left( 1 + \beta \frac{T_2 + T_1}{2} \right) = k(T_{\text{médio}}) \quad (17)$$

Deve ser observado nesse caso que a condutividade térmica média é igual à condutividade térmica do material avaliada em uma temperatura média.

## 5-DIFUSIVIDADE TÉRMICA

Em uma análise de problemas de transferência de calor, é necessário o uso de várias propriedades da matéria. Essas propriedades são geralmente conhecidas por propriedades termofísicas e incluem duas categorias distintas: as propriedades de transporte e as propriedades termodinâmicas. As propriedades de transporte incluem os coeficientes das taxas de difusão, como  $k$ , a condutividade térmica (para a transferência

de calor), e  $\nu$ , a viscosidade cinemática (para a transferência de momento). As propriedades termodinâmicas, por outro lado, dizem respeito ao estado de equilíbrio de um sistema. A massa específica ( $\rho$ ) e o calor específico ( $c_p$ ) são duas dessas propriedades muito usadas em uma análise termodinâmica.

O produto  $\rho c_p$  (J/(m<sup>3</sup>.K)), comumente chamado de capacidade calorífica volumétrica, mede a capacidade de um material de armazenar energia térmica. Uma vez que substâncias que possuem massa específica elevada são tipicamente caracterizadas por calores específicos com baixos valores, muitos sólidos e líquidos, que são considerados bons meios para armazenamento de energia, possuem capacidades caloríficas comparáveis ( $\rho c_p > 1 \text{ MJ}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$ ). Entretanto, devido às suas massas específicas muito baixas, os gases são muito pouco adequados para o armazenamento de energia térmica ( $\rho c_p \approx 1 \text{ MJ}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$ ).

Em análises de transferência de calor, a razão entre a condutividade térmica e a capacidade calorífica volumétrica é uma importante propriedade chamada de difusividade térmica  $\alpha$ , que possui unidades de (m<sup>2</sup>/s):

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (18)$$

A difusividade térmica tem grande importância na análise de problemas de condução transiente, medindo a capacidade do material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la. Materiais com elevado  $\alpha$  responderão rapidamente a mudanças nas condições térmicas a ele impostas, enquanto materiais com reduzido  $\alpha$  responderão mais lentamente, levando mais tempo para atingir uma nova condição de equilíbrio.

## 6-A EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR

### 6.1-COORDENADAS RETANGULARES

O que determina a distribuição de temperaturas em uma região? Esse processo é governado por uma lei fundamental ou apenas previsível? A resposta é que a temperatura em cada ponto é ajustada de tal forma que o princípio da conservação da energia seja satisfeito em todos os pontos. Consideremos agora a maneira na qual a distribuição de temperaturas pode ser determinada. Essa distribuição de temperaturas pode ser determinada pela aplicação da conservação da energia. Nesse caso, definimos um volume de controle diferencial, identificamos os processos relevantes de transferência de energia e introduzimos as equações das taxas de transferência de energia apropriadas. O resultado é uma equação diferencial cuja solução, para condições de contorno descritas, fornece a distribuição de temperaturas no meio.

Para generalizar a formulação, é assumido que o volume de controle diferencial se move com uma velocidade que pode ser representada através de suas componentes escalares na forma  $\vec{V} = iU + jV + kW$ . Além disso, energia térmica pode estar sendo gerada no interior do volume de controle a uma taxa  $\dot{q}$  por unidade de volume. Considere um meio homogêneo na qual a distribuição de temperaturas pode ser expressa em coordenadas retangulares por  $T(x, y, z, t)$ . Inicialmente definimos um pequeno volume de controle infinitesimal (diferencial),  $dx dy dz$ , conforme mostrado na Fig. (8), onde estão indicadas somente as transferências de energia por condução. Usando a primeira lei da termodinâmica para formular o problema num dado instante de tempo, a segunda etapa é considerar os processos de energia que são relevantes para esse volume de controle.

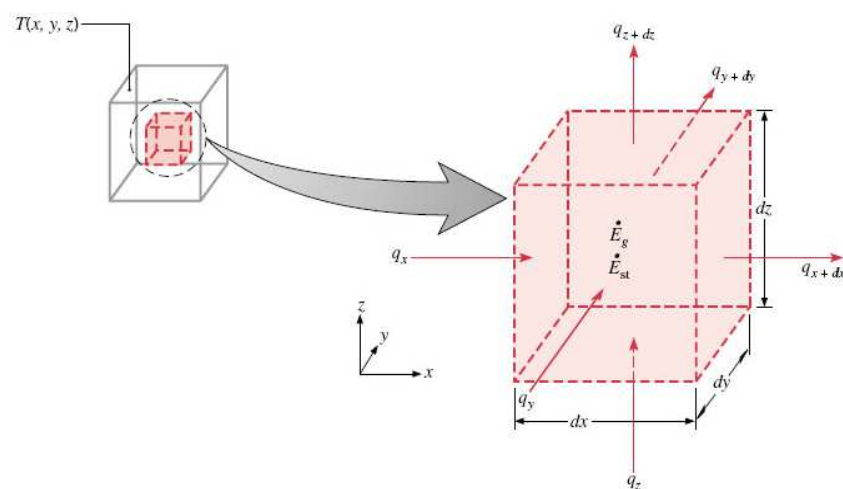


Figura 8 – Volume de controle diferencial,  $dx dy dz$ , para a análise da condução de calor em coordenadas retangulares  $x, y, z$  (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

Para simplificar a formulação, as seguintes hipóteses são feitas: (1) velocidade uniforme, (2) pressão constante, (3) massa específica constante, (4) calor específico constante e (5) variação de energia potencial desprezível. Na presença de um gradiente de temperaturas, haverá transferência de calor por condução através de cada uma das superfícies de controle. As taxas de calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle nos pontos com coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são indicadas pelos termos  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$ , respectivamente. As taxas de transferência de calor por condução nas superfícies opostas podem ser expressas por uma expansão em série de Taylor, onde, desprezando os termos de segunda ordem, são expressas como:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (19)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (20)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (21)$$

A Eq. (19) afirma que a componente  $x$  da taxa de transferência de calor na direção do eixo  $x$ , na posição  $x + dx$ , é igual ao valor dessa componente em  $x$  somado à quantidade pela qual ela varia em relação a  $x$  multiplicado por  $dx$ . Raciocínio similar pode ser feito a partir das Eqs. (20) e (21). No interior do meio pode haver um termo para representar uma fonte de energia, que está associado à taxa volumétrica de geração de energia térmica. Exemplos de geração volumétrica de energia térmica incluem condução de calor em elementos nucleares, geração de energia metabólica em tecidos e perda de energia em linhas de transmissão. Esse termo pode ser representado por

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz \quad (22)$$

em que  $\dot{q}$  é a taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume do meio ( $\text{W/m}^3$ ). Além disso, podem ocorrer variações na quantidade de energia térmica armazenada pelo

material no volume de controle. Se o material não sofrer mudança de fase, não há o efeito de energia latente, e a taxa de energia armazenada pode ser escrita como:

$$\dot{E}_{acu} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial(udm)}{\partial t} = \frac{\partial(u\rho dxdydz)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} dxdydz \quad (23)$$

em que  $\rho \partial u / \partial t$  é a taxa de variação com o tempo da energia interna específica (sensível) do meio por unidade de volume. É importante observar que os termos  $\dot{E}_g$  e  $\dot{E}_{acu}$  representam processos físicos diferentes. O termo referente à geração volumétrica de energia  $\dot{E}_g$  é uma manifestação de algum processo de conversão de energia que envolve de um lado energia térmica e do outro energia química, elétrica e/ou nuclear. Esse termo é positivo (uma fonte) se a energia térmica está sendo gerada no material à custa de uma outra forma de energia, e negativo (sumidouro) se a energia térmica estiver sendo consumida. Por outro lado, o termo relativo ao armazenamento ou acúmulo de energia  $\dot{E}_{acu}$  refere-se à taxa de variação da energia térmica armazenada pela matéria.

Energia também é transferida para o volume de controle diferencial por entrada e saída de massa. A vazão mássica do meio que entra na direção  $x$  do volume de controle da Fig. (9) pode ser expressa na forma  $\rho U dydz$ , onde  $\rho$  é a massa específica do meio e  $U$  é a componente de velocidade do meio na direção  $x$ . Nas direções  $y$  e  $z$  (esta última não representada na Fig. (9)) as vazões mássicas podem ser representadas, respectivamente por  $\rho V dx dz$  e  $\rho W dy dz$ , conforme a figura abaixo:

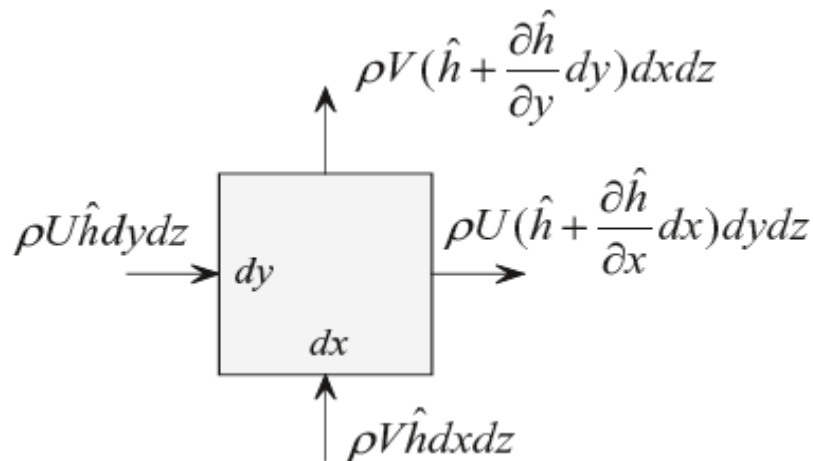


Figura 9 – Volume de controle  $dxdy$  para a representação dos termos advectivos.

A taxa de energia transportada pela vazão mássica pode ser determinada pelo produto entre a vazão mássica e a entalpia específica  $h$  da vazão mássica, ou seja:

$$\dot{E}_{massa,x} = \rho U h dy dz \quad (24)$$

$$\dot{E}_{massa,y} = \rho V h dx dz \quad (25)$$

$$\dot{E}_{massa,z} = \rho W h dx dy \quad (26)$$

As taxas de energia transportadas pela vazão mássica nas superfícies opostas podem ser expressas por uma expansão em séries de Taylor, onde, desprezando os termos de segunda ordem, podem ser expressas como:

$$\dot{E}_{massa,x+dx} = \dot{E}_{massa,x} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,x}}{\partial x} dx \quad (27)$$

$$\dot{E}_{massa,y+dy} = \dot{E}_{massa,y} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,y}}{\partial y} dy \quad (28)$$

$$\dot{E}_{massa,z+dz} = \dot{E}_{massa,z} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,z}}{\partial z} dz \quad (29)$$

A última etapa consiste em representar a conservação da energia utilizando as equações de taxas previamente apresentadas. Com base nas taxas, a forma geral da exigência de conservação de energia é

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = \dot{E}_{acu} \quad (30)$$

Essa forma da conservação da energia não é muito útil na solução de problemas de condução. Especificamente, a temperatura, que é o foco principal em condução térmica, não aparece explicitamente nessa equação. Deve-se então expressar a Eq. (30) na forma da variável dependente  $T$ , o que pode ser feito substituindo as expressões

matemáticas das taxas de energia que entram,  $\dot{E}_e$ , das taxas de energia que saem,  $\dot{E}_s$ , e da taxa de variação da energia acumulada  $\dot{E}_{acu}$ . Assim,  $\dot{E}_e$  pode ser expressa como:

$$\dot{E}_e = q_x + q_y + q_z + \dot{E}_{massa,x} + \dot{E}_{massa,y} + \dot{E}_{massa,z} \quad (31)$$

Já o termo  $\dot{E}_s$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{E}_s = & \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) + \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) + \left( q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) + \\ & \left( \dot{E}_{massa,x} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,x}}{\partial x} dx \right) + \left( \dot{E}_{massa,y} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,y}}{\partial y} dy \right) + \left( \dot{E}_{massa,z} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,z}}{\partial z} dz \right) \end{aligned} \quad (32)$$

Substituindo as Eqs. (22-23) e (31-32) na Eq. (30) e simplificando, obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz - \frac{\partial \dot{E}_{massa,x}}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{E}_{massa,y}}{\partial y} dy - \frac{\partial \dot{E}_{massa,z}}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz \end{aligned} \quad (33)$$

As taxas de calor por condução podem ser avaliadas a partir da lei de Fourier:

$$q_x = -k(dydz) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (34)$$

$$q_y = -k(dxdz) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (35)$$

$$q_z = -k(dxdy) \frac{\partial T}{\partial z} \quad (36)$$

onde cada componente do fluxo de calor foi multiplicado pela área da superfície (diferencial) de controle apropriada, a fim de se obter a taxa de transferência de calor. Substituindo as Eqs. (24-26) e as Eqs. (34-36) na Eq. (33) obtém-se:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-kdydz\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx-\frac{\partial}{\partial y}\left(-kdx dz\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy-\frac{\partial}{\partial z}\left(-kdx dy\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz \\ -\frac{\partial}{\partial x}(\rho U h dydz)dx-\frac{\partial}{\partial y}(\rho V h dx dz)dy-\frac{\partial}{\partial z}(\rho W h dx dy)dz+\dot{q}dxdydz=\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz \quad (37)$$

Na Eq. (37), o volume diferencial  $dxdydz$  pode ser simplificado e utilizando as hipóteses simplificadoras (1) e (3) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial h}{\partial x}+V\frac{\partial h}{\partial y}+W\frac{\partial h}{\partial z}\right) \quad (38)$$

Na Eq. (38), pode-se substituir a energia interna específica pela definição termodinâmica de entalpia específica, ou seja:

$$u=h-\frac{P}{\rho} \quad (39)$$

de tal forma que  $\partial u = \partial h$  pelas hipóteses (2) e (3). Além disso, pode-se expressar a variação de entalpia específica em termos do gradiente de temperaturas, que para massa específica e calor específico constantes é expressa por:

$$dh=c_p dT \quad (40)$$

Substituindo as Eqs. (39-40) na Eq. (38) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+U\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y}+W\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (41)$$

A Eq. (41) é a forma geral da equação de condução de calor em coordenadas retangulares. Essa equação, também conhecida como equação do calor ou equação de difusão, é a ferramenta básica para a análise de problemas de condução de calor. A partir de sua solução, obtemos a distribuição de temperaturas  $T(x, y, z)$  como uma função do tempo. A aparente complexidade dessa expressão não deve obscurecer o fato de que ela descreve uma condição física importante, ou seja, a conservação da energia.

Devemos ter um entendimento claro do significado físico de cada um dos termos que aparecem nessa equação. Por exemplo, o termo  $\partial(k\partial T/\partial x)/\partial x$  está relacionado ao fluxo líquido de calor por condução para o interior do volume de controle na direção da coordenada do eixo  $x$ . Dessa forma, multiplicando essa parcela por  $dx$ , tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = q_x'' - q_{x+dx}'' \quad (42)$$

com expressões similares aplicadas aos fluxos nas direções  $y$  e  $z$ . Já o termo  $\rho c_p U (\partial T/\partial x)$  está relacionado ao fluxo líquido por advecção para o interior do volume de controle na direção da coordenada  $x$ . Dessa forma, multiplicando essa parcela por  $dx$ , tem-se:

$$\rho c_p U \frac{\partial T}{\partial x} dx = E_{massa,x}'' - E_{massa,x+dx}'' \quad (43)$$

com expressões similares aplicadas aos fluxos nas direções  $y$  e  $z$ . Portanto, em palavras, a equação do calor, Eq. (41), estabelece que, em qualquer ponto do meio, a taxa de energia líquida transferida por condução e por vazão em massa para o interior de um volume somado à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica armazenada no interior desse volume.

Com frequência, é possível trabalhar com versões simplificadas da Eq. (41). Por exemplo, se a condutividade térmica for constante, a equação do calor é reescrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (44)$$

em que  $\alpha = k/\rho c_p$  é a difusividade térmica do meio. Simplificações adicionais da forma geral da equação do calor são frequentemente possíveis. Por exemplo, sob condições de regime estacionário (ou permanente), não há variação temporal da quantidade de energia armazenada no volume de controle; então, a Eq. (44) se reduz a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (45)$$

Se o meio em análise estiver em repouso, ou seja,  $U = V = W = 0$ , a Eq. (45) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (46)$$

Além disso, se a transferência de calor por condução for unidimensional em regime estacionário (por exemplo, na direção do eixo  $x$ ) e se não houver taxa volumétrica de geração de energia térmica, a Eq. (46) se reduz a

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (47)$$

que é o problema mais simples existente em condução térmica. Em resumo, a equação de condução térmica em coordenadas retangulares é descrita como:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por condução na} \\ \text{direção } x \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por condução na} \\ \text{direção } y \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por condução na} \\ \text{direção } z \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\dot{q}}{k}}_{\substack{\text{taxa} \\ \text{volumétrica} \\ \text{de geração} \\ \text{de energia} \\ \text{térmica}}} = \\ \\ \underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{\text{taxa de} \\ \text{variação com o tempo} \\ \text{da energia} \\ \text{térmica (sensível)} \\ \text{do meio} \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p U \frac{\partial T}{\partial x}}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por advecção na} \\ \text{direção } x \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p V \frac{\partial T}{\partial y}}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por advecção na} \\ \text{direção } y \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p W \frac{\partial T}{\partial z}}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por advecção na} \\ \text{direção } z \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}}$$

## 6.2-COORDENADAS CILÍNDRICAS

Quando o operador  $(\nabla)$  é representado em coordenadas cilíndricas, a forma geral do vetor fluxo de calor, e, portanto, da lei de Fourier, é:

$$\vec{q}'' = -k\nabla T = -k\left(\hat{i}\frac{\partial T}{\partial r} + \hat{j}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + \hat{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (48)$$

em que

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} \quad q_z'' = -k\frac{\partial T}{\partial z} \quad (49)$$

são as componentes do fluxo de calor nas direções radial, circunferencial e axial, respectivamente. É importante observar que o gradiente de temperatura na lei de Fourier deve possuir unidades de K/m. Por esse motivo, ao avaliar o gradiente para uma coordenada angular, ele deve estar expresso em termos de uma variação diferencial do comprimento de arco. Por exemplo, a componente do fluxo de calor na direção circunferencial no sistema de coordenadas cilíndricas é  $q_\phi = -(k/r)(\partial T/\partial \phi)$  e não  $q_\phi = -k(\partial T/\partial \phi)$ . Isso pode ser visto mais facilmente pela Fig. (10):

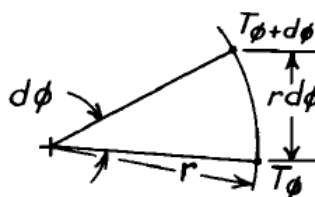


Figura 10 – Esquema utilizado para calcular o fluxo de calor na direção circunferencial de um sistema de coordenadas cilíndricas.

A Fig. (11), que representa um volume de controle infinitesimal,  $rd\phi dr dz$  pode ser utilizada para um balanço de energia, onde estão indicadas somente as transferências de energia por condução. Para generalizar a formulação, é assumido que o volume de controle diferencial se move com uma velocidade que pode ser representada através de suas componentes escalares na forma  $\vec{V} = \hat{i}V_r + \hat{j}V_\phi + \hat{k}V_z$ . Além disso, energia térmica

pode estar sendo gerada no interior do volume de controle a uma taxa  $\dot{q}$  por unidade de volume.

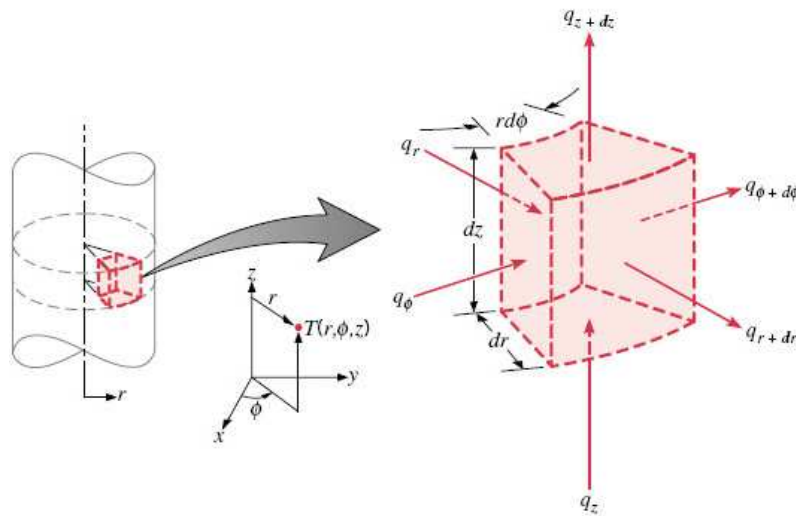


Figura 11 – Volume de controle diferencial  $rd\phi dr dz$ , para a análise da condução de calor em coordenadas cilíndricas  $r, \phi, z$  (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

Para simplificar a formulação, as seguintes hipóteses são feitas: (1) velocidade uniforme, (2) pressão constante, (3) massa específica constante, (4) calor específico constante e (5) variação de energia potencial desprezível. Na presença de gradientes de temperaturas, haverá transferência de calor por condução através de cada uma das superfícies de controle. As taxas de calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle nos pontos com coordenadas  $r, \phi$  e  $z$  são indicadas pelos termos  $q_r, q_\phi$  e  $q_z$ , respectivamente. As taxas de transferência de calor por condução nas superfícies opostas podem ser expressas por uma expansão em séries de Taylor, onde, desprezando os termos de segunda ordem, podem ser expressas como:

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \quad (50)$$

$$q_{\phi+d\phi} = q_\phi + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi \quad (51)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (52)$$

O termo de geração de energia térmica usualmente é representado por:

$$\dot{E}_g = \dot{q}dV = \dot{q}rd\phi drdz \quad (53)$$

em que  $\dot{q}$  é a taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume do meio ( $\text{W/m}^3$ ). Além disso, podem ocorrer variações na quantidade de energia térmica armazenada pelo material no volume de controle. Se o meio não sofrer mudança de fase, não há o efeito de energia latente, e a taxa de energia armazenada pode ser dada por:

$$\dot{E}_{acu} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial(udm)}{\partial t} = \frac{\partial(u\rho rd\phi drdz)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} rd\phi drdz \quad (54)$$

em que  $\rho \partial u / \partial t$  é a taxa de variação com o tempo da energia interna específica (sensível) do meio por unidade de volume.

Energia também é transferida para o volume de controle diferencial por entrada e saída de massa. A vazão mássica de material que entra na direção  $r$  do volume de controle da Fig. (12) pode ser expressa na forma  $\rho V_r rd\phi dz$ , onde  $\rho$  é a massa específica do meio e  $V_r$  é a componente de velocidade do meio na direção  $r$ . Nas direções  $\phi$  e  $z$  (esta última não representada na Fig. (12)) as vazões mássicas podem ser representadas, respectivamente por  $\rho V_\phi drdz$  e  $\rho V_z rd\phi dr$ .

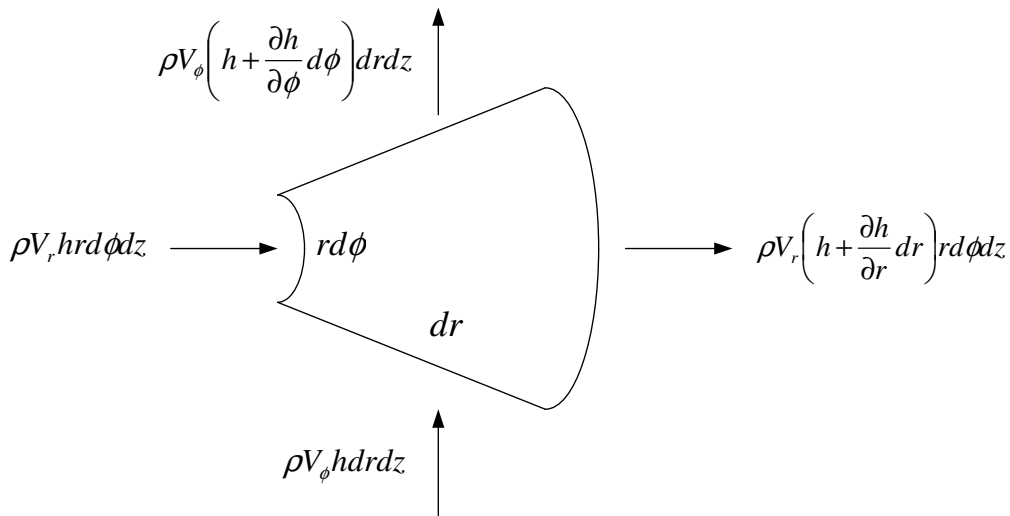


Figura 12 – Volume de controle  $rd\phi drdz$  para a representação dos termos advectivos.

A taxa de energia transportada pela vazão mássica pode ser determinada pelo produto entre a vazão mássica e a entalpia específica  $h$  da vazão mássica, ou seja:

$$\dot{E}_{massa,r} = \rho V_r h r d\phi dz \quad (55)$$

$$\dot{E}_{massa,\phi} = \rho V_\phi h r d\phi dz \quad (56)$$

$$\dot{E}_{massa,z} = \rho V_z h r d\phi dr \quad (57)$$

As taxas de energia transportadas pela vazão mássica nas superfícies opostas podem ser expressas por uma expansão em séries de Taylor, onde, desprezando os termos de segunda ordem, podem ser expressas como:

$$\dot{E}_{massa,r+dr} = \dot{E}_{massa,r} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,r}}{\partial r} dr \quad (58)$$

$$\dot{E}_{massa,\phi+d\phi} = \dot{E}_{massa,\phi} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,\phi}}{\partial \phi} d\phi \quad (59)$$

$$\dot{E}_{massa,z+dz} = \dot{E}_{massa,z} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,z}}{\partial z} dz \quad (60)$$

A última etapa consiste em representar a conservação da energia na forma da variável dependente  $T$  utilizando as equações de taxas previamente apresentadas, o que pode ser feito substituindo as taxas de energia que entram,  $\dot{E}_e$ , as taxas de energia que saem,  $\dot{E}_s$ , e a taxa de variação da energia acumulada  $\dot{E}_{acu}$ . Assim,  $\dot{E}_e$  pode ser escrito como:

$$\dot{E}_e = q_r + q_\phi + q_z + \dot{E}_{massa,r} + \dot{E}_{massa,\phi} + \dot{E}_{massa,z} \quad (61)$$

Já o termo  $\dot{E}_s$  pode ser escrito como:

$$\dot{E}_s = \left( q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \right) + \left( q_\phi + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi \right) + \left( q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) +$$

$$\left( \dot{E}_{massa,r} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,r}}{\partial r} dr \right) + \left( \dot{E}_{massa,\phi} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,\phi}}{\partial \phi} d\phi \right) + \left( \dot{E}_{massa,z} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,z}}{\partial z} dz \right) \quad (62)$$

Substituindo as Eqs. (53-54) e as Eqs. (61-62) na Eq. (30) e rearranjando obtém-se:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial r} dr - \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz - \frac{\partial \dot{E}_{massa,r}}{\partial r} dr - \frac{\partial \dot{E}_{massa,\phi}}{\partial \phi} d\phi - \frac{\partial \dot{E}_{massa,z}}{\partial z} dz + \dot{q} r d\phi dr dz =$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} r d\phi dr dz \quad (63)$$

As taxas de calor por condução podem ser avaliadas a partir da lei de Fourier:

$$q_r = -k A_r \frac{\partial T}{\partial r} = -k (r d\phi dz) \frac{\partial T}{\partial r} \quad (64)$$

$$q_\phi = -k A_\phi \frac{\partial T}{r \partial \phi} = -k (dr dz) \frac{\partial T}{r \partial \phi} \quad (65)$$

$$q_z = -k A_z \frac{\partial T}{\partial z} = -k (r d\phi dr) \frac{\partial T}{\partial z} \quad (66)$$

onde cada componente do fluxo de calor foi multiplicado pela área da superfície (diferencial) de controle apropriada, a fim de se obter a taxa de transferência de calor. Substituindo as Eqs. (55-57) e as Eqs. (64-66) na Eq. (63) obtém-se:

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left[ -k (r d\phi dz) \frac{\partial T}{\partial r} \right] dr - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ -k (dr dz) \frac{\partial T}{r \partial \phi} \right] d\phi - \frac{\partial}{\partial z} \left[ -k (r d\phi dr) \frac{\partial T}{\partial z} \right] dz$$

$$- \frac{\partial}{\partial r} (\rho V_r h r d\phi dz) dr - \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho V_\phi h dr dz) d\phi - \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z h r d\phi dr) dz + \dot{q} r d\phi dr dz = \rho \frac{\partial u}{\partial t} r d\phi dr dz \quad (67)$$

Na Eq. (67), pode-se dividir pelo volume diferencial  $r d\phi dr dz$  e utilizando as hipóteses simplificadoras (1) e (3) obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + V_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} \frac{\partial h}{\partial \phi} + V_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (68)$$

Na Eq. (68), pode-se substituir a energia interna específica pela definição termodinâmica de entalpia específica, ou seja,  $u = h - P/\rho$  de tal forma que  $\partial u = \partial h$  pelas hipóteses (2) e (3). Além disso, pode-se expressar a variação da entalpia específica em termos do gradiente de temperaturas, que para massa específica e calor específico constantes é expressa por  $dh = c_p dT$ . A Eq. (68) é então reescrita como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (69)$$

A Eq. (69) é a forma geral da equação de condução de calor em coordenadas cilíndricas. A partir de sua solução, obtemos a distribuição de temperaturas  $T(r, \phi, z)$  como uma função do tempo. De maneira similar a coordenadas retangulares, com frequência, é possível trabalhar com versões simplificadas da Eq. (69). Em resumo, a equação de difusão em coordenadas cilíndricas é descrita como:

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por condução na} \\ \text{direção } r \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por condução na} \\ \text{direção } \phi \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por condução na} \\ \text{direção } z \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\dot{q}}_{\substack{\text{taxa} \\ \text{volumétrica} \\ \text{de geração} \\ \text{de energia} \\ \text{térmica}}} =$$

$$\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{\text{taxa de} \\ \text{variação com o tempo} \\ \text{da energia} \\ \text{térmica (sensível)} \\ \text{do meio} \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p V_r \frac{\partial T}{\partial r}}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por advecção na} \\ \text{direção } r \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\rho c_p V_\phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi}}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por advecção na} \\ \text{direção } \phi \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p V_z \frac{\partial T}{\partial z}}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por advecção na} \\ \text{direção } z \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}}$$

### 6.3-COORDENADAS ESFÉRICAS

Quando o operador  $(\nabla)$  é representado em coordenadas esféricas, a forma geral do vetor fluxo de calor, e, portanto, a lei de Fourier, é:

$$\vec{q}'' = -k\nabla T = -k\left(\hat{i}\frac{\partial T}{\partial r} + \hat{j}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\phi} + \hat{k}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) \quad (70)$$

em que

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\phi} \quad q_\theta'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta} \quad (71)$$

são as componentes do fluxo de calor nas direções radial, azimutal e polar, respectivamente. Novamente é importante observar que o gradiente de temperaturas na lei de Fourier deve possuir unidades de K/m. Por esse motivo, ao avaliar o gradiente para uma coordenada angular, ele deve estar expresso em termos de uma variação diferencial do comprimento de arco. Por exemplo, a componente do fluxo de calor na direção polar de um sistema de coordenadas esféricas é  $q_\theta'' = -(k/r\sin\theta)(\partial T/\partial\phi)$  e não  $q_\theta'' = -k(\partial T/\partial\phi)$ , assim como a componente do fluxo de calor na direção azimutal de um sistema de coordenadas esféricas é  $q_\phi'' = -(k/r)(\partial T/\partial\theta)$  e não  $q_\phi'' = -k(\partial T/\partial\theta)$ .

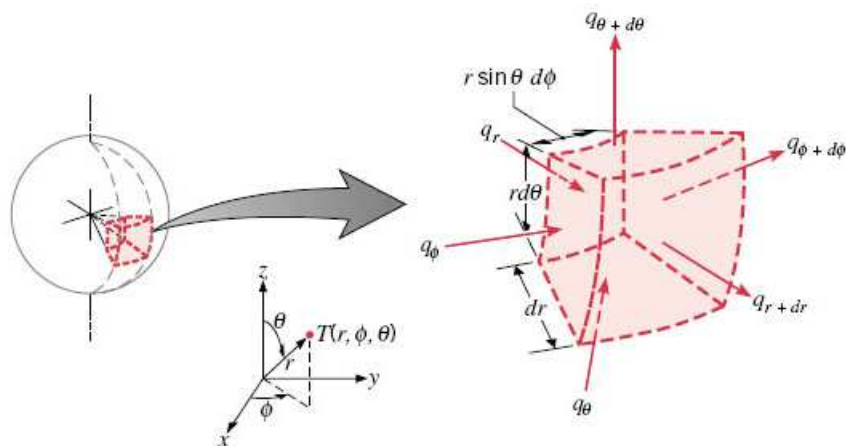


Figura 13 – Volume de controle diferencial  $r^2\sin\theta dr d\phi d\theta$  para a análise da condução de calor em coordenadas esféricas  $r, \phi, \theta$  (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

Isso pode ser visto mais facilmente pela Fig. (13), que representa um volume de controle infinitesimal,  $r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$ , podendo ser utilizado para um balanço de energia, onde estão indicadas somente as transferências de energia por condução. Para generalizar a formulação, é assumido que o volume de controle diferencial se move com uma velocidade que pode ser representada através de suas componentes escalares na forma  $\vec{V} = iV_r + jV_\phi + kV_\theta$ . Além disso, energia térmica pode estar sendo gerada no interior do volume de controle a uma taxa  $\dot{q}$  por unidade de volume.

Mais uma vez, para simplificar a formulação, as seguintes hipóteses são feitas: (1) velocidade uniforme, (2) pressão constante, (3) massa específica constante, (4) calor específico constante e (5) variação de energia potencial desprezível. Na presença de gradientes de temperaturas, haverá transferência de calor por condução através de cada uma das superfícies de controle. As taxas de calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle nos pontos com coordenadas  $r$ ,  $\phi$  e  $\theta$  são indicadas pelos termos  $q_r$ ,  $q_\phi$  e  $q_\theta$ , respectivamente. As taxas de transferência de calor por condução nas superfícies opostas podem ser então expressas por uma expansão em séries de Taylor, onde, desprezando os termos de segunda ordem, podem ser expressas como:

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \quad (72)$$

$$q_{\phi+d\phi} = q_\phi + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi \quad (73)$$

$$q_{\theta+d\theta} = q_\theta + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta \quad (74)$$

O termo de geração de energia térmica usualmente é representado por:

$$\dot{E}_g = \dot{q}dV = \dot{q}r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \quad (75)$$

em que  $\dot{q}$  é a taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume do meio (W/m<sup>3</sup>). Além disso, podem ocorrer variações na taxa de energia térmica armazenada pelo meio no volume de controle. Se o meio não sofre mudança de fase, não há o efeito de energia latente, e a taxa de energia armazenada pode ser expressa por:

$$\dot{E}_{acu} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial(udm)}{\partial t} = \frac{\partial(u\rho r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta \quad (76)$$

em que  $\rho \partial u / \partial t$  é a taxa de variação com o tempo da energia interna específica (sensível) do meio por unidade de volume.

Energia também é transferida para o volume de controle diferencial por entrada e saída de massa. A vazão mássica de material que entra na direção  $r$  do volume de controle da Fig. (14) pode ser expressa na forma  $\rho V_r r^2 \sin\theta d\phi d\theta$  onde  $\rho$  é a densidade do meio e  $V_r$  é a componente de velocidade do meio na direção  $r$ . Nas direções  $\phi$  e  $\theta$  (está última não representada na Fig. (13)) as vazões mássicas podem ser representadas, respectivamente por  $\rho V_\phi r dr d\theta$  e  $\rho V_\theta r \sin\theta dr d\phi$ .

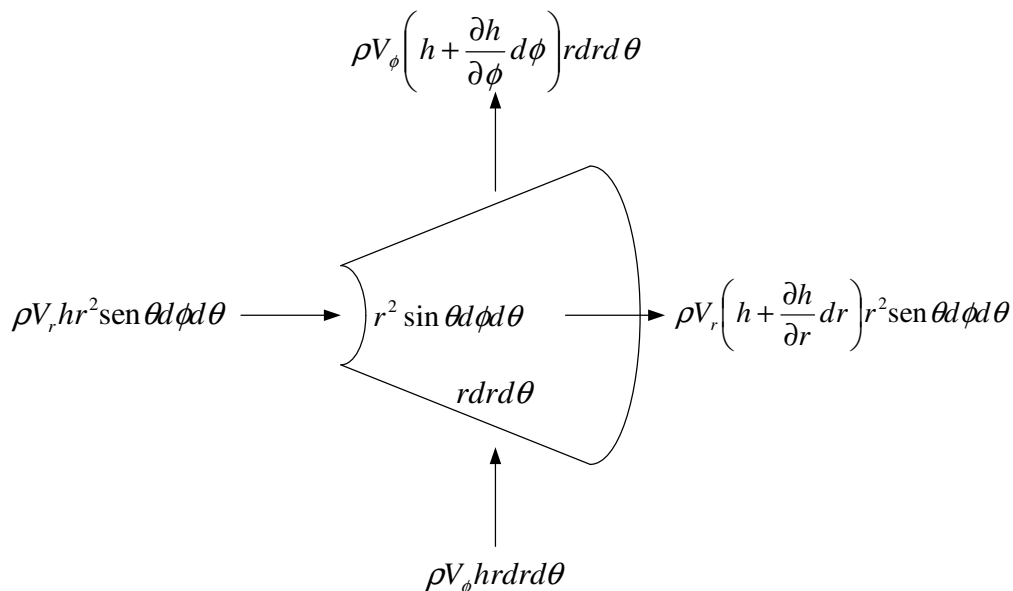


Figura 14 – Volume de controle  $r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta$  para a representação dos termos advectivos.

A taxa de energia transportada pela vazão mássica pode ser determinada pelo produto entre a vazão mássica e a entalpia específica  $h$  da vazão mássica, ou seja:

$$\dot{E}_{massa,r} = \rho V_r h r^2 \sin\theta d\phi d\theta \quad (77)$$

$$\dot{E}_{massa,\phi} = \rho V_\phi h r dr d\theta \quad (78)$$

$$\dot{E}_{massa,z} = \rho V_z h r \sin\theta dr d\phi \quad (79)$$

As taxas de energia transportadas pela vazão em massa nas superfícies opostas podem ser então expressas por uma expansão em séries de Taylor, onde, desprezando os termos de segunda ordem, podem ser expressas como:

$$\dot{E}_{massa,r+dr} = \dot{E}_{massa,r} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,r}}{\partial r} dr \quad (80)$$

$$\dot{E}_{massa,\phi+d\phi} = \dot{E}_{massa,\phi} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,\phi}}{\partial \phi} d\phi \quad (81)$$

$$\dot{E}_{massa,\theta+d\theta} = \dot{E}_{massa,\theta} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,\theta}}{\partial \theta} d\theta \quad (82)$$

A última etapa consiste em representar a conservação da energia na forma da variável dependente  $T$  utilizando as equações de taxas previamente apresentadas, o que pode ser feito substituindo as taxas de energia que entram,  $\dot{E}_e$ , as taxas de energia que saem,  $\dot{E}_s$ , e a taxa de variação da energia acumulada  $\dot{E}_{acu}$ . Assim,  $\dot{E}_e$  pode ser escrito como:

$$\dot{E}_e = q_r + q_\phi + q_\theta + \dot{E}_{massa,r} + \dot{E}_{massa,\phi} + \dot{E}_{massa,\theta} \quad (83)$$

Já o termo  $\dot{E}_s$  pode ser escrito como:

$$\dot{E}_s = \left( q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \right) + \left( q_\phi + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi \right) + \left( q_\theta + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) +$$

$$\left( \dot{E}_{massa,r} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,r}}{\partial r} dr \right) + \left( \dot{E}_{massa,\phi} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,\phi}}{\partial \phi} d\phi \right) + \left( \dot{E}_{massa,\theta} + \frac{\partial \dot{E}_{massa,\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) \quad (84)$$

Substituindo as Eqs. (75-76) e as Eqs. (83-84) na Eq. (30), e simplificando obtém-se:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial r} dr - \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi - \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta - \frac{\partial \dot{E}_{massa,r}}{\partial r} dr - \frac{\partial \dot{E}_{massa,\phi}}{\partial \phi} d\phi - \frac{\partial \dot{E}_{massa,\theta}}{\partial \theta} d\theta + \dot{q} r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta =$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \quad (85)$$

As taxas de calor por condução podem ser avaliadas a partir da lei de Fourier:

$$q_r = -k A_r \frac{\partial T}{\partial r} = -k (r^2 \sin \theta d\phi d\theta) \frac{\partial T}{\partial r} \quad (86)$$

$$q_\phi = -k A_\phi \frac{\partial T}{r \sin \theta d\theta} = -k (r dr d\theta) \frac{\partial T}{r \sin \theta d\theta} \quad (87)$$

$$q_\theta = -k A_\theta \frac{\partial T}{r d\phi} = -k (r \sin \theta dr d\phi) \frac{\partial T}{r d\phi} \quad (88)$$

onde cada componente do fluxo de calor foi multiplicado pela área da superfície (diferencial) de controle apropriada, a fim de se obter a taxa de transferência de calor. Substituindo as Eqs. (77-79) e as Eqs. (84-88) na Eq. (85) obtém-se:

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left[ -k (r^2 \sin \theta d\phi d\theta) \frac{\partial T}{\partial r} \right] dr - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ -k (r dr d\theta) \frac{\partial T}{r \sin \theta d\theta} \right] d\phi$$

$$- \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -k (r \sin \theta dr d\phi) \frac{\partial T}{r d\phi} \right] d\theta - \frac{\partial}{\partial r} (\rho V_r h r^2 \sin \theta d\phi d\theta) dr - \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho V_\phi h r dr d\theta) d\phi$$

$$-\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_{\theta} h r \sin \theta dr d\phi) d\theta + \dot{q} r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta = \rho \frac{\partial u}{\partial t} r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \quad (89)$$

Na Eq. (89), pode-se dividir pelo volume diferencial  $r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$  e utilizando as hipóteses simplificadoras (1) e (3) obtém-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + V_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{V_{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial h}{\partial \phi} + \frac{V_{\theta}}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \quad (90)$$

Na Eq. (90), pode-se substituir a energia interna específica pela definição de entalpia específica, ou seja,  $u = h - P/\rho$  de tal forma que  $\partial u = \partial h$  pelas hipóteses (2) e (3). Além disso, pode-se expressar a variação da entalpia específica em termos do gradiente de temperatura, que para calor específico e massa específica constantes é dado por  $dh = c_p dT$ . A Eq. (90) é então reescrita como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{V_{\theta}}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (91)$$

A Eq. (91) é a forma geral da equação de condução de calor em coordenadas esféricas. A partir de sua solução, obtemos a distribuição de temperaturas  $T(r, \phi, \theta)$  como uma função do tempo. De maneira similar a coordenadas retangulares, com frequência, é possível trabalhar com versões simplificadas da Eq. (91). Em resumo, a equação de difusão em coordenadas esféricas é descrita como:

$$\underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por condução na} \\ \text{direção } r \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por condução na} \\ \text{direção } \phi \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por condução na} \\ \text{direção } z \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\dot{q}}_{\substack{\text{taxa} \\ \text{volumétrica} \\ \text{de geração} \\ \text{de energia} \\ \text{térmica}}} =$$

$$\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{\text{taxa de} \\ \text{variação com o tempo} \\ \text{da energia} \\ \text{térmica (sensível)} \\ \text{do meio} \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\rho c_p V_r \frac{\partial T}{\partial r}}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por advecção na} \\ \text{direção } r \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\rho c_p V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi}}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por advecção na} \\ \text{direção } \phi \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}} + \underbrace{\frac{\rho c_p V_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{líquida transferida} \\ \text{por advecção na} \\ \text{direção } \theta \\ \text{por unidade} \\ \text{de volume}}}$$

## 7-CONDIÇÕES DE CONTORNO E CONDIÇÃO INICIAL

Para determinar a distribuição de temperaturas em um meio, é necessário resolver a forma apropriada da equação do calor. No entanto, tal solução depende das condições físicas existentes nas fronteiras do meio, e, se a situação variar com o tempo, a solução também depende das condições existentes no meio em algum instante inicial. Com relação às condições nas fronteiras, ou condições de contorno, há várias possibilidades comuns que são expressas de maneira simples em forma matemática.

Como a equação de condução de calor é de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais, duas condições de contorno devem ser fornecidas para cada coordenada espacial necessária para descrever o sistema. E como a equação de condução de calor é de primeira ordem em relação ao tempo, apenas uma condição, chamada de condição inicial, deve ser especificada. Segue abaixo uma breve descrição das condições de contorno mais comuns encontradas no estudo da condução térmica.

### 7.1-CONDIÇÃO DE CONTORNO DE PRIMEIRA ESPÉCIE

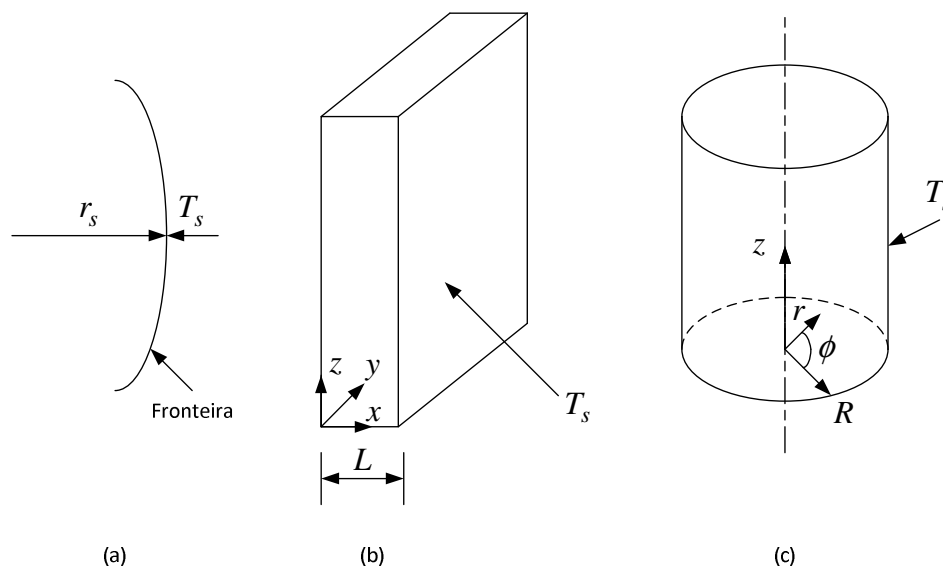


Figura 15 – Condição de contorno de primeira espécie (Dirichlet).

Nesse caso a temperatura de fronteira ( $T_s$ ) é conhecida. Por exemplo, de acordo com a Fig. (15a):

$$T(r_s, t) = T_s \quad (92)$$

Mais especificamente, se estivermos lidando com sistemas cartesianos retangulares ou cilíndricos, Figs. (15b) e (15c), as condições de contorno de primeira espécie em  $x = L$  e  $r = R$ , são, respectivamente:

$$T(L, y, z, t) = T_s \quad (93)$$

$$T(R, \phi, z, t) = T_s \quad (94)$$

## 7.2-CONDIÇÃO DE CONTORNO DE SEGUNDA ESPÉCIE

Uma condição de contorno é dita de segunda espécie quando um fluxo de calor é conhecido. De acordo com a Fig. (16a):

$$q_n'' = -k \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s \quad (95)$$

Na Eq. (95),  $n$  denota o vetor unitário normal saindo da parede. Se a diferenciação é feita ao longo do vetor unitário normal saindo da parede, o sinal de menos da Eq. (95) fica como está. Se a diferenciação é feita ao longo do vetor unitário normal entrando na parede, o sinal de menos do lado direito da Eq. (95) deve ser alterado para mais. Um fluxo de calor pode ser criado por, digamos, aquecimento elétrico ou radiativo. O sinal de  $q_n''$  é positivo (como mostrado na Eq. (95)) quando o fluxo de calor está saindo da fronteira e negativo (oposto ao mostrado na Eq. (95)) quando o fluxo de calor está entrando na fronteira.

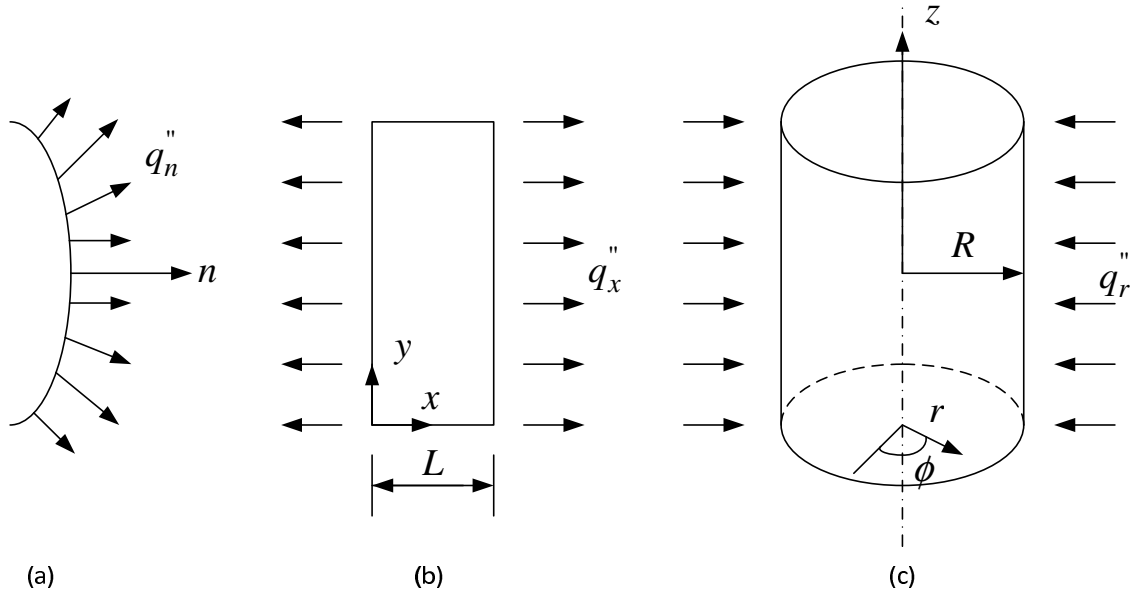


Figura 16 – Condição de contorno de segunda espécie (Neumann).

No caso especial de um sistema de coordenadas retangulares conforme mostrado na Fig. (16b), as condições de contorno de segunda espécie em  $x=L$  e  $x=0$ , são, respectivamente:

$$q_x'' = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} \quad (96)$$

$$q_x'' = k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (97)$$

Similarmente, para a geometria cilíndrica da Fig. (16c):

$$-q_r'' = -k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (98)$$

Deve ser notado que para o caso especial de uma parede isolada termicamente ( $q'' = 0$ ) o gradiente de temperatura que aparece no lado direito das Eqs. (95-98) é igual a zero. Essa condição de contorno também é conhecida como condição de isolamento

térmico, podendo também ser utilizada no caso de problemas onde há simetria (ponto de máximo ou de mínimo) da distribuição de temperaturas.

### 7.3-CONDIÇÃO DE CONTORNO DE TERCEIRA ESPÉCIE

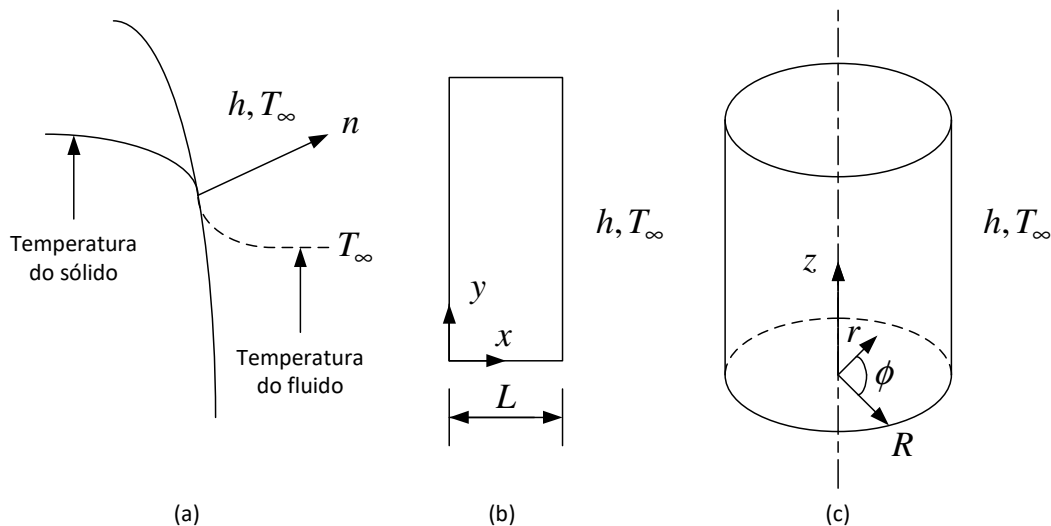


Figura 17 – Condição de contorno de terceira espécie (Robin).

Esse tipo de condição de contorno é usualmente conhecida como uma condição de contorno convectiva. Ela simplesmente afirma que se um corpo está em contato com um fluido em movimento convectivo, a condução de calor no corpo é igual à convecção de calor do corpo para o fluido. Uma típica distribuição de temperatura na vizinhança de uma fronteira entre um corpo sólido e um fluido está mostrada na Fig. (17a). Para a configuração da Fig. (17a) tem-se que:

$$-k \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = h(T_s - T_\infty) \quad (99)$$

Na Eq. (99),  $T_\infty$  é a temperatura do fluido distante da fronteira e não afetado pela mesma e  $h$  é o coeficiente de transferência de calor. O sinal de menos no lado esquerdo da Eq. (99) denota diferenciação ao longo da normal saindo da superfície. Se a diferenciação é ao longo da normal entrando na superfície, o sinal precisa ser alterado de menos para mais. Para o sistema cartesiano da Fig. (17b), as condições de contorno em  $x=0$  e  $x=L$  são, respectivamente:

$$k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = h(T - T_{\infty})_{x=0} \quad (100)$$

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = h(T - T_{\infty})_{x=L} \quad (101)$$

Para o cilindro da Fig. (17c), a condição de contorno na superfície externa é:

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = h(T - T_{\infty})_{r=R} \quad (102)$$

Além das três condições de contorno mais usuais discutidas anteriormente, diferentes condições de contorno, mais complexas do que estas, podem ser encontradas na solução de problemas de condução de calor. Por exemplo, aquecimento simultâneo por convecção e radiação pode ocorrer em uma fronteira ou liberação de calor (absorção) devido ao congelamento (fusão) em uma interface móvel com mudança de fase.

#### 7.4-SUPERFÍCIE COM RADIAÇÃO

Enquanto condução e convecção requerem um meio para transportar energia, a radiação não precisa. Além disso, a energia de radiação é transmitida por ondas eletromagnéticas, que viajam melhor no vácuo. O fluxo térmico por radiação é descrito pela lei de Stefan-Boltzmann, que permite o cálculo da radiação superficial a partir de um corpo ideal, chamado de corpo negro:

$$q''_{\text{corpo negro}} = \sigma T_s^4 \quad (103)$$

onde  $q''_{\text{corpo negro}}$  é o fluxo de radiação do corpo negro,  $T_s$  é a temperatura absoluta da superfície do corpo negro e  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$  é a constante de Stefan-Boltzmann. Para determinar o fluxo de radiação emitido por uma superfície real, define-se uma propriedade chamada de emissividade, definida como:

$$\varepsilon = \frac{q_{\text{corpo real}}''}{q_{\text{corpo negro}}''} \quad (104)$$

Combinando as Eqs. (103-104) obtém-se:

$$q_{\text{corpo real}}'' = \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (105)$$

A partir da definição de  $\varepsilon$ , segue que seu máximo valor é igual a um (corpo negro). A troca de radiação entre duas superfícies depende da geometria, forma, área, orientação e emissividade das duas superfícies. Além disso, depende da absortividade  $\alpha$  de cada superfície. Absortividade é uma propriedade de superfície definida como a fração da energia radiante incidente na superfície que é absorvida pela superfície.

Embora a determinação da troca de calor líquida por radiação entre duas superfícies,  $q_{\text{rad}}$ , seja complexa, a análise é simplificada por um modelo ideal na qual  $\varepsilon = \alpha$ . Tal superfície ideal é chamada de superfície cinza. Para o caso especial de uma superfície cinza com temperatura  $T_s$  de pequenas dimensões quando comparada com uma vizinhança com temperatura  $T_{\text{viz}}$  de grandes dimensões que a engloba, a taxa líquida de radiação pode ser calculada como:

$$q_{\text{rad}} = \varepsilon \sigma A (T_s^4 - T_{\text{viz}}^4) \quad (106)$$

onde  $\varepsilon$  é a emissividade da superfície menor e  $A$  é a área superficial da superfície menor.

## 7.5-CONDIÇÃO INICIAL

Na determinação da distribuição de temperaturas em um meio, se a situação variar com o tempo, a solução da equação diferencial de condução de calor também depende das condições existentes no meio em algum instante inicial. Como essa equação diferencial é de primeira ordem em relação ao tempo, apenas uma condição, chamada de condição inicial, deve ser especificada. De maneira geral, para os três

sistemas coordenados apresentados, e denotando a temperatura inicial de um meio de interesse como sendo  $T_i$  em um instante  $t = 0$ , pode-se representar matematicamente a condição inicial como:

$$T(x, y, z, 0) = T_i \quad (107)$$

$$T(r, \phi, z, 0) = T_i \quad (108)$$

$$T(r, \phi, \theta, 0) = T_i \quad (109)$$

## 7.6-CONDIÇÕES DE CONTORNO HOMOGÊNEAS

Para finalizar esse capítulo, vale à pena identificar uma categoria especial de condições de contorno que são de particular interesse para a solução de problemas de condução de calor utilizando o método da separação de variáveis (esse método será discutido posteriormente no Cap. (5)). Essa categoria de condições de contorno consiste em vários tipos de condições de contorno homogêneas, definidas como: uma condição de contorno é dita homogênea se todos os seus termos além do zero por si só são de primeiro grau na função desconhecida (temperatura) e nas suas derivadas.

Para clarear o sentido da terminologia primeiro grau na sua definição, vejamos os seguintes exemplos. Termos do tipo  $T(\partial T/\partial x)$  ou  $T(\partial^2 T/\partial x^2)$  (o produto da temperatura e uma de suas derivadas) são de segunda ordem. Termos do tipo  $T$  ou  $\partial T/\partial x$  ou  $\partial^2 T/\partial x^2$  são de primeira ordem. Termos constantes do tipo  $T_\infty$ ,  $T_s$  ou  $q_n''$  (se essas quantias forem constantes) são de ordem zero.

De acordo com essa discussão, se  $T_s$  não for zero, as condições de contorno descritas pelas Eqs. (88-90) não são homogêneas. Se  $T_s$  for zero, essas condições de contorno são homogêneas. Similarmente, as condições de contorno descritas pelas Eqs. (91-94) não são homogêneas. Elas se tornam homogêneas no caso especial de parede isolada. Finalmente, as condições de contorno descritas pelas Eqs. (95-98) são homogêneas somente no caso em que  $T_\infty = 0$ . se  $T_\infty \neq 0$ , as condições de contorno representadas pelas Eqs. (95-98) são não homogêneas.

Conforme mencionado anteriormente, o conceito de condições de contorno homogêneas será utilizado posteriormente, onde será introduzido o método da separação de variáveis. A presença de um número definido de condições de contorno homogêneas nesse modelo de condução de calor é necessária para o método da separação de variáveis funcionar.

## 7.7-EXEMPLOS DE CONDIÇÃO DE CONTORNO

Existem diversas condições físicas comuns que podem ocorrer nos contornos. A Fig. (18a) mostra quatro condições de contorno comuns em condução bidimensional em uma placa retangular. Já a Fig. (18b) mostra a interface entre dois materiais. Duas condições de contorno estão associadas com esse caso.

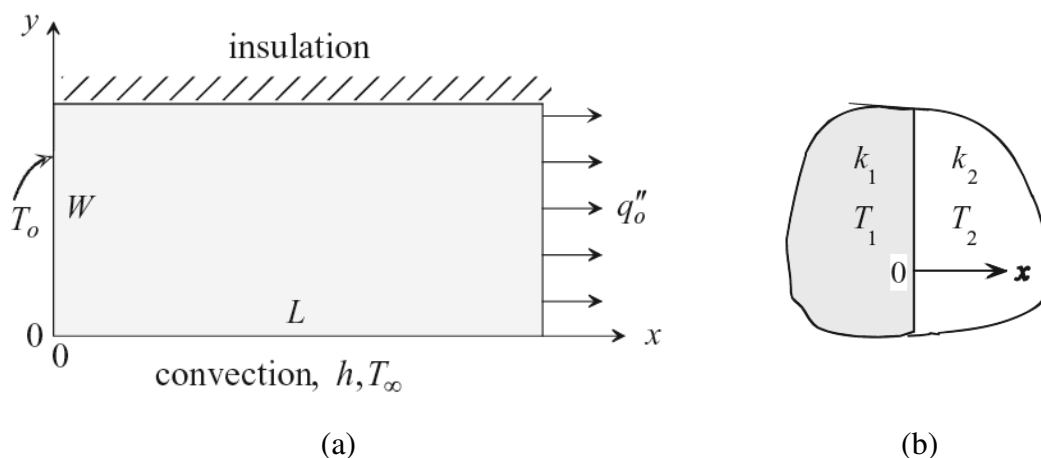


Figura 18 – Duas situações para a representação das condições de contorno.

Deve ser notado que o posicionamento da origem do sistema de coordenadas é essencial na representação das condições de contorno. Para a Fig. (18a), as condições de contorno são:

$$T(0, y) = T_o \text{ (temperatura especificada)} \quad (110)$$

$$-k \frac{\partial T(L, y)}{\partial x} = q_o'' \text{ (fluxo de calor especificado)} \quad (111)$$

$$k \frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = h[T(x,0) - T_{\infty}] \text{ (convecção na superfície)} \quad (112)$$

$$\frac{\partial T(x,W)}{\partial y} = 0 \text{ (isolamento térmico)} \quad (113)$$

Para a Fig. (18b), as condições de contorno são:

$$T_1(0, y) = T_2(0, y) \text{ (igualdade de temperaturas na interface)} \quad (114)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1(0, y)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial T_2(0, y)}{\partial x} \text{ (balanço de energia na interface)} \quad (115)$$

Para o caso de uma interface com uma fonte de calor, que pode ser o caso de aquecimento de um elemento delgado que está em contato com dois materiais não condutores elétricos ou o aquecimento por atrito gerado pelo movimento relativo entre duas superfícies, a condição de contorno é escrita utilizando um balanço de energia na interface. Admitindo contato térmico perfeito entre dois materiais, conforme a Fig. (19), um balanço de energia fornece que:

$$-k_1 \frac{\partial T_1(0, y)}{\partial x} + q_i'' = -k_2 \frac{\partial T_2(0, y)}{\partial x} \text{ (balanço de energia na interface)} \quad (116)$$

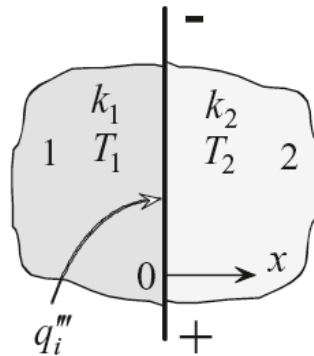


Figura 19 – Interface com fonte de calor.

Finalmente, para ilustrar como modelar uma condição de contorno por radiação, considere novamente a Fig. (18a), na qual a face inferior troca calor por convecção e também por radiação. Um balanço de energia nessa superfície fornece que:

$$q_{cond}'' = q_{conv}'' + q_{rad}'' \quad (117)$$

Utilizando a lei de Fourier para a condução, a lei de Newton para a convecção e a lei de Stefan-Boltzmann para a radiação, a Eq. (117) pode ser reescrita como:

$$k \frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = h[T(x,0) - T_{\infty}] + \sigma \epsilon [T^4(x,0) - T_{viz}^4] \quad (118)$$

## 8-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

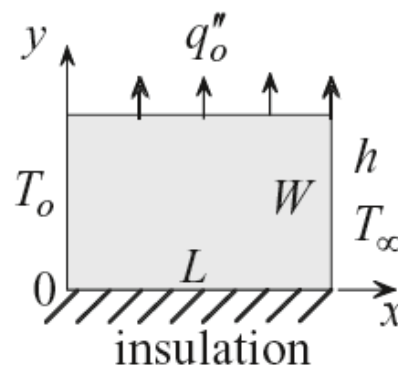
1. J. HERIVEL, *Joseph Fourier, the Man and the Physicist*, Clarendon Press, Oxford, 1975.
2. J. FOURIER, Draft paper, *Bibliothèque nationale*, BN ff.22525, pp. 107-149, 1804.
3. J. B. BIOT, Mémoire sur la propagation de la chaleur, *Bibl. Br.*, Vol. 37, pp. 310-329, 1804.
4. J. FOURIER, *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, MS. 1851, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1807.
5. I. GRATTAN-GUINNESS e J. R. RAVETZ, *Joseph Fourier 1768-1830*, MIT Press, Cambridge, MA, 1972.
6. J. FOURIER, Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides, *Men. Acad. R. Sci.*, Vol. 4, pp. 185-555, 1819-20.
7. J. FOURIER, Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides, *Men. Acad. R. Sci.*, Vol. 5, pp. 153-246, 1821-22.
8. J. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur* (Analytical Theory of Heat), Paris, 1822.
9. BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S.; INCROPERA, F. P. e DEWITT, W. P., Fundamentos de Transferência de Calor e Massa, Editora LTC, 7ª edição, 2014, Rio de Janeiro.

## 9-EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Escreva a equação de condução de calor para cada um dos seguintes casos:

- (a) Uma parede, regime permanente, estacionária, unidimensional, incompressível e sem geração de energia.
- (b) Uma parede, transiente, estacionária, unidimensional, incompressível,  $k$  constante sem geração de energia.
- (c) Um cilindro, regime permanente, estacionário, bidimensional (radial e axial),  $k$  constante, incompressível, sem geração de energia.
- (d) Um cabo se movendo através de um forno com velocidade constante, regime permanente, unidimensional (axial), incompressível,  $k$  constante e sem geração de energia.
- (e) Uma esfera, transiente, estacionária, unidimensional (radial), incompressível,  $k$  constante com geração de energia.

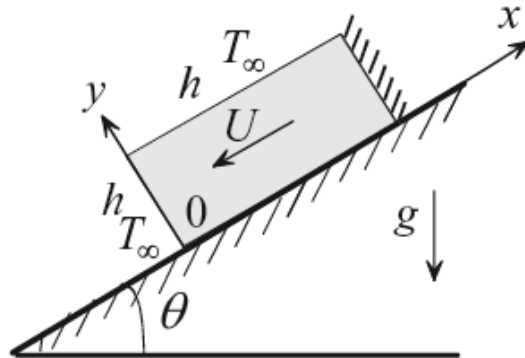
2) Escreva a equação de condução e as condições de contorno para condução bidimensional em regime permanente para a placa retangular mostrada abaixo.



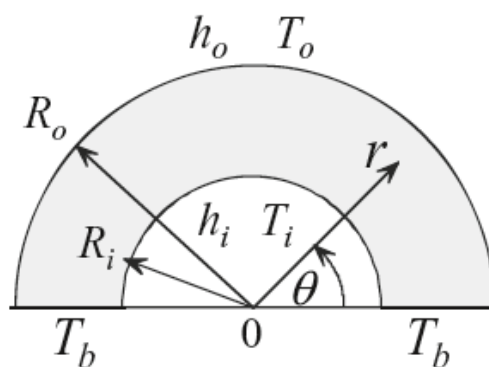
3) Calor é gerado a uma taxa  $\dot{q}$  em uma casca esférica de raio interno  $r_i$  e raio externo  $r_e$ . Calor é adicionado na superfície externa através de um fluxo de calor uniforme  $q_e''$ . A superfície interna é mantida a uma temperatura uniforme  $T_i$ . Escreva a equação de condução de calor e as condições de contorno para condução em regime permanente.

4) Uma placa retangular de comprimento  $L$  e altura  $H$  desliza sobre uma superfície inclinada com uma velocidade  $U$ . O atrito de deslizamento resulta em um fluxo de calor

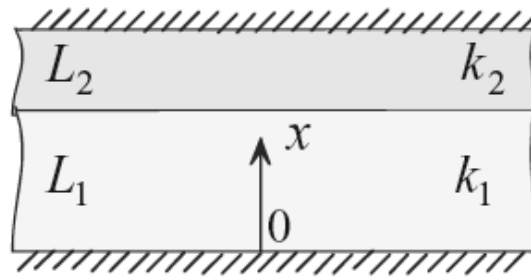
$q_o''$  na superfície. A face frontal e as faces laterais trocam calor por convecção. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . Despreze a perda de calor pela face traseira e assuma que não há calor sendo conduzido através da superfície inclinada devido ao atrito. Escreva a equação de condução de calor em regime permanente e as condições de contorno.



5) Considere uma seção semicircular de um tubo de raio interno  $R_i$  e raio externo  $R_e$ . Calor é trocado por convecção ao longo das superfícies cilíndricas interna e externa. A temperatura e o coeficiente de transferência de calor interno são  $T_i$  e  $h_i$ . A temperatura e o coeficiente de transferência de calor externo são  $T_e$  e  $h_e$ . As duas superfícies planas são mantidas a uma temperatura uniforme  $T_b$ . Escreva a equação de condução de calor em regime permanente e as condições de contorno.



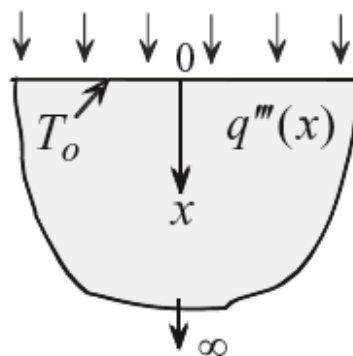
6) Duas placas extensas com espessuras  $L_1$  e  $L_2$  estão inicialmente a temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ . Suas condutividades térmicas são  $k_1$  e  $k_2$ . As duas placas são pressionadas uma contra a outra e isoladas ao longo de suas superfícies expostas. Escreva a equação de condução de calor e as condições de contorno.



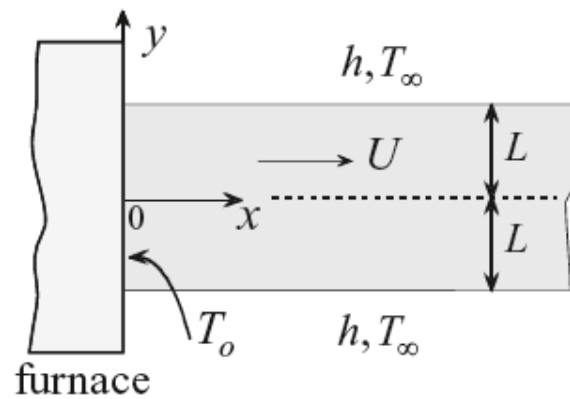
7) Radiação térmica é subitamente direcionada para a superfície de uma placa semi-infinita de condutividade térmica  $k$  e difusividade térmica  $\alpha$ . Devido às características de absorção térmica do material a radiação térmica resulta em uma taxa de geração de energia variável dada por

$$\dot{q}(x) = \dot{q}_o e^{-bx}$$

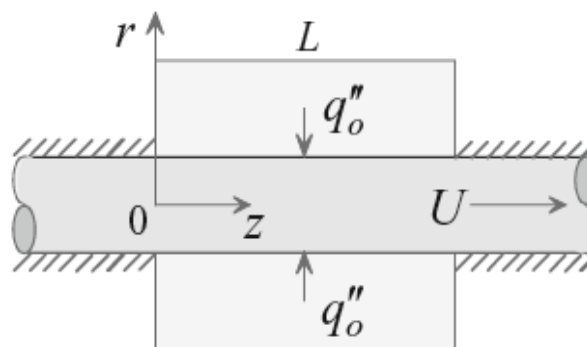
onde  $\dot{q}_o$  e  $b$  são constantes e  $x$  é a distância ao longo da placa. A temperatura da superfície em  $x = 0$  é  $T_o$ . Inicialmente a placa está com uma temperatura uniforme  $T_i$ . Escreva a equação de condução de calor e as condições de contorno.



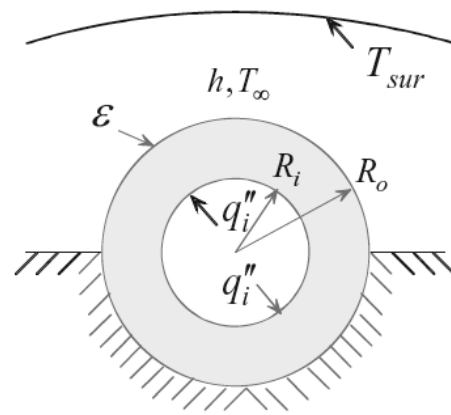
8) Uma placa de espessura  $2L$  se move através de um forno com velocidade  $U$  e deixa o forno a uma temperatura  $T_o$ . Fora do forno a placa é resfriada por convecção e por radiação. O coeficiente de transferência de calor é  $h$ , a emissividade da placa é  $\varepsilon$ , a temperatura ambiente é  $T_\infty$  e a temperatura da vizinhança é  $T_{viz}$ . Escreva a equação de condução de calor bidimensional em regime permanente e as condições de contorno. Use o modelo de radiação simplificado e assuma que a placa é infinitamente longa.



9) Um cabo de raio  $r_o$  se move com velocidade  $U$  através de um forno de comprimento  $L$ , onde é aquecido através de um fluxo de calor uniforme  $q_o''$ . Longe da entrada do forno o cabo está a uma temperatura  $T_i$ . Assuma que não há troca de calor com o cabo antes de sua entrada no forno e após a sua saída do forno. Escreva a equação de condução de calor bidimensional em regime permanente e as condições de contorno.



10) Um cilindro oco com raio interno  $R_i$  e raio externo  $R_e$  é aquecido com um fluxo de calor uniforme  $q_i''$  em sua superfície interna. A metade inferior do cilindro está isolada e a metade superior do cilindro troca calor por convecção e radiação. O coeficiente de transferência de calor é  $h$ , a temperatura ambiente é  $T_\infty$ , a temperatura da vizinhança é  $T_{viz}$  e a emissividade da superfície externa do cilindro é  $\varepsilon$ . Desprezando condução axial e utilizando o modelo simplificado de radiação, escreva a equação de condução de calor e as condições de contorno.



## CAPÍTULO 2

# CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

### 1-INTRODUÇÃO

Nesse capítulo um número básico de problemas representativos de condução térmica serão revisados. Esses problemas são comumente utilizados na prática de engenharia para a obtenção de estimativas de taxas de perdas de calor ou taxas de ganhos de calor através de configurações como paredes simples ou compostas, dutos isolados ou não-isolados e tanques esféricos isolados ou não-isolados. A simplicidade do tratamento matemático da condução unidimensional em regime permanente nos permite explorar uma grande variedade de aplicações práticas. O objetivo desse capítulo é mostrar a solução da equação diferencial de condução de calor para as três geometrias de interesse em transferência de calor utilizando condições de contorno variadas. Diversos casos de interesse serão tratados analiticamente e também com o auxílio do MAPLE.

### 2-O PROBLEMA DA PAREDE PLANA

Esse problema está mostrado esquematicamente na Fig. (1), que representa uma parede plana de espessura  $L$  na qual cada lado está em contato com um fluido em movimento. A condutividade térmica da parede,  $k$ , é assumida constante. Sem perda de generalidade, podemos assumir que a temperatura do fluido no lado esquerdo da parede e distante dela,  $T_{\infty,1}$ , é maior que a temperatura do fluido no lado direito da parede e distante dela,  $T_{\infty,2}$ . Essa consideração assegura uma constância de temperatura fora das camadas limites térmicas em cada lado da parede. O coeficiente médio de transferência de calor no lado quente é denotado por  $h_1$  e no lado frio por  $h_2$ . A parede se estende

para o infinito em ambas direções  $y$  e  $z$  e não há geração volumétrica de energia térmica no seu interior. Além disso, a parede está em repouso. Com essas hipóteses, a equação de condução em coordenadas retangulares, Eq. (41) do Cap. (1), se reduz a:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

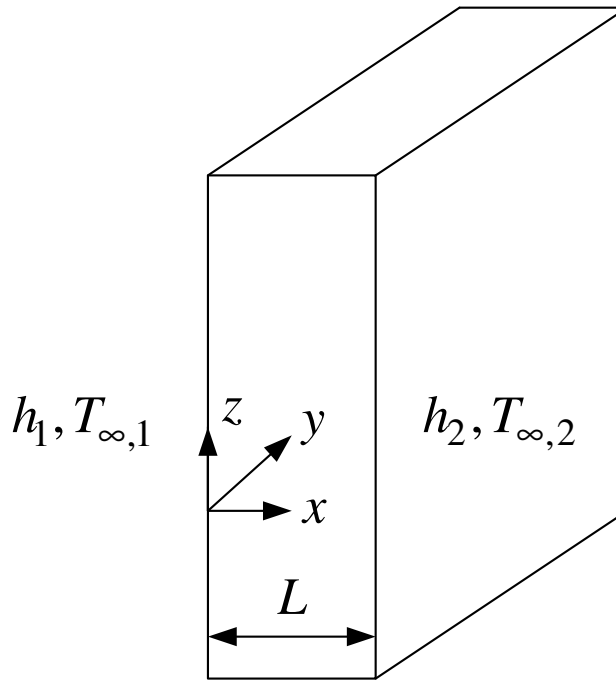


Figura 1 – Parede plana com fluido em ambos os lados.

As condições de contorno de terceira espécie correspondentes são:

$$h_1[T_{\infty,1} - T(x=0)] = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \quad (2)$$

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h_2[T(x=L) - T_{\infty,2}] \quad (3)$$

A Eq. (1) pode ser integrada duas vezes em  $x$  para se obter a primeira derivada de  $T$  em relação a  $x$  e a solução geral para a distribuição de temperaturas em  $x$ , ou seja:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \quad (4)$$

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (5)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração, que devem ser obtidas a partir das duas condições de contorno, Eqs. (2-3). Substituindo as Eqs. (4-5) nas Eqs. (2-3) obtém-se:

$$h_1(T_{\infty,1} - C_2) = -kC_1 \quad (6)$$

$$-kC_1 = h_2(C_1 L + C_2 - T_{\infty,2}) \quad (7)$$

As Eqs. (6-7) constituem um sistema de duas equações e duas incógnitas para a determinação de  $C_1$  e  $C_2$ , podendo ser reescritas na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} k & -h_1 \\ h_2 L + k & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 T_{\infty,1} \\ h_2 T_{\infty,2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

A determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$  pode ser feita utilizando a regra de Cramer, ou seja:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} -h_1 T_{\infty,1} & -h_1 \\ h_2 T_{\infty,2} & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -h_1 \\ h_2 L + k & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{h_1 h_2 (T_{\infty,2} - T_{\infty,1})}{h_1 h_2 L + h_1 k + h_2 k}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} k & -h_1 T_{\infty,1} \\ h_2 L + k & h_2 T_{\infty,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -h_1 \\ h_2 L + k & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{T_{\infty,1} h_1 h_2 L + T_{\infty,1} h_1 k + T_{\infty,2} h_2 k}{h_1 h_2 L + h_1 k + h_2 k}$$

Substituindo as expressões de  $C_1$  e  $C_2$  na solução geral, Eq. (5), obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas, ou seja:

$$T(x) = \frac{h_1 h_2 (T_{\infty,2} - T_{\infty,1})}{h_1 h_2 L + h_1 k + h_2 k} x + \frac{T_{\infty,1} h_1 h_2 L + T_{\infty,1} h_1 k + T_{\infty,2} h_2 k}{h_1 h_2 L + h_1 k + h_2 k} \quad (9)$$

A Eq. (9) pode ser rearranjada em uma forma mais compacta como:

$$T(x) = \frac{-(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{(h_1/h_2) + (h_1/k)L + 1} \left( 1 + \frac{h_1}{k} x \right) + T_{\infty,1} \quad (10)$$

Como a distribuição de temperaturas é linear, conforme a Eq. (10), o fluxo de calor é independente de  $x$ , podendo ser calculado pela lei de Fourier, ou seja:

$$\dot{q}'' = -k \frac{dT}{dx} = -k \frac{d}{dx} \left[ \frac{-(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{(h_1/h_2) + (h_1/k)L + 1} \left( 1 + \frac{h_1}{k} x \right) + T_{\infty,1} \right] = \frac{h_1 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{(h_1/h_2) + (h_1/k)L + 1} \quad (11)$$

O coeficiente de transferência de calor em ambos os lados da parede é uma medida da imperfeição do contato térmico entre a parede e o fluido. Conforme os coeficientes  $h_1$  e  $h_2$  aumentam e se aproximam do infinito, o contato térmico torna-se perfeito e a temperatura da parede se aproxima da temperatura do fluido ( $T_{\infty,1}$  em  $x=0$  e  $T_{\infty,2}$  em  $x=L$ , respectivamente). Nessa condição, a equação diferencial governante ainda é representada pela Eq. (1), mas as condições de contorno são agora escritas como:

$$T(x=0) = T_{\infty,1} \quad (12)$$

$$T(x=L) = T_{\infty,2} \quad (13)$$

A solução do problema dado pela Eq. (1) e pelas Eqs. (12-13) fornece que:

$$T(x) = -\left(\frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{L}\right)x + T_{\infty,1} \quad (14)$$

$$q'' = k \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{L} \quad (15)$$

A análise anterior pode ser generalizada para o caso de uma parede plana com condutividade térmica variável. A equação de condução para o caso de condutividade térmica variável com  $x$  tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{dT}{dx} \right] = 0 \quad (16)$$

A Eq. (16) pode ser integrada duas vezes em  $x$  para se obter a primeira derivada de  $T$  em relação a  $x$  e a solução geral para a distribuição de temperaturas em  $x$ , ou seja:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{C_1}{k(x)} \quad (17)$$

$$T(x) = C_1 \int_0^x \frac{dx}{k(x)} + C_2 = C_1 I(x) + C_2 \quad (18)$$

onde  $I(x)$  é uma integral definida representada como:

$$I(x) = \int_0^x \frac{dx}{k(x)} \quad (19)$$

As condições de contorno permanecem idênticas às Eqs. (2-3), podendo então ser escritas como:

$$h_1[T_{\infty,1} - C_1 I(0) - C_2] = -k(0) \frac{C_1}{k(0)} \quad (20)$$

$$-k(L)\frac{C_1}{k(L)} = h_2[C_1 I(L) + C_2 - T_{\infty,2}] \quad (21)$$

As Eqs. (6-7) constituem um sistema de duas equações e duas incógnitas para a determinação de  $C_1$  e  $C_2$ , podendo ser reescritas na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 1 - h_1 I(0) & -h_1 \\ 1 + h_2 I(L) & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 T_{\infty,1} \\ h_2 T_{\infty,2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

A determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$  pode ser feita utilizando a regra de Cramer, ou seja:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} -h_1 T_{\infty,1} & -h_1 \\ h_2 T_{\infty,2} & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - h_1 I(0) & -h_1 \\ 1 + h_2 I(L) & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{-h_1 h_2 T_{\infty,1} + h_1 h_2 T_{\infty,2}}{h_1 + h_2 - h_1 h_2 I(0) + h_1 h_2 I(L)}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - h_1 I(0) & -h_1 T_{\infty,1} \\ 1 + h_2 I(L) & h_2 T_{\infty,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - h_1 I(0) & -h_1 \\ 1 + h_2 I(L) & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{h_1 T_{\infty,1} + h_2 T_{\infty,2} - h_1 h_2 T_{\infty,2} I(0) + h_1 h_2 T_{\infty,1} I(L)}{h_1 + h_2 - h_1 h_2 I(0) + h_1 h_2 I(L)}$$

Substituindo as expressões de  $C_1$  e  $C_2$  na solução geral, Eq. (18), obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas, ou seja:

$$T(x) = \left[ \frac{-h_1 h_2 T_{\infty,1} + h_1 h_2 T_{\infty,2}}{h_1 + h_2 - h_1 h_2 I(0) + h_1 h_2 I(L)} \right] I(x) + \left[ \frac{h_1 T_{\infty,1} + h_2 T_{\infty,2} - h_1 h_2 T_{\infty,2} I(0) + h_1 h_2 T_{\infty,1} I(L)}{h_1 + h_2 - h_1 h_2 I(0) + h_1 h_2 I(L)} \right] \quad (23)$$

A Eq. (23) pode ser rearranjada em uma forma mais compacta como:

$$T(x) = T_{\infty,1} - \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})[h_1 I(x) - h_1 I(0) + 1]}{h_1 [I(L) - I(0)] + (h_1/h_2) + 1} \quad (24)$$

Deve ser notado que  $I(0)=0$ . O fluxo de calor pode ser calculado pela lei de Fourier, ou seja:

$$q'' = -k(x) \frac{dT}{dx} = -k(x) \frac{C_1}{k(x)} = -\frac{-h_1 h_2 T_{\infty,1} + h_1 h_2 T_{\infty,2}}{h_1 + h_2 - h_1 h_2 I(0) + h_1 h_2 I(L)} = \frac{h_2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_2 [I(L) - I(0)] + (h_2/h_1) + 1} \quad (25)$$

No caso especial de uma parede composta (uma configuração comum em transferência de calor) consistindo de  $n$  camadas com condutividades térmicas distintas porém constantes, conforme mostrado na Fig. (2), a condutividade térmica da parede composta é representada pela seguinte expressão:

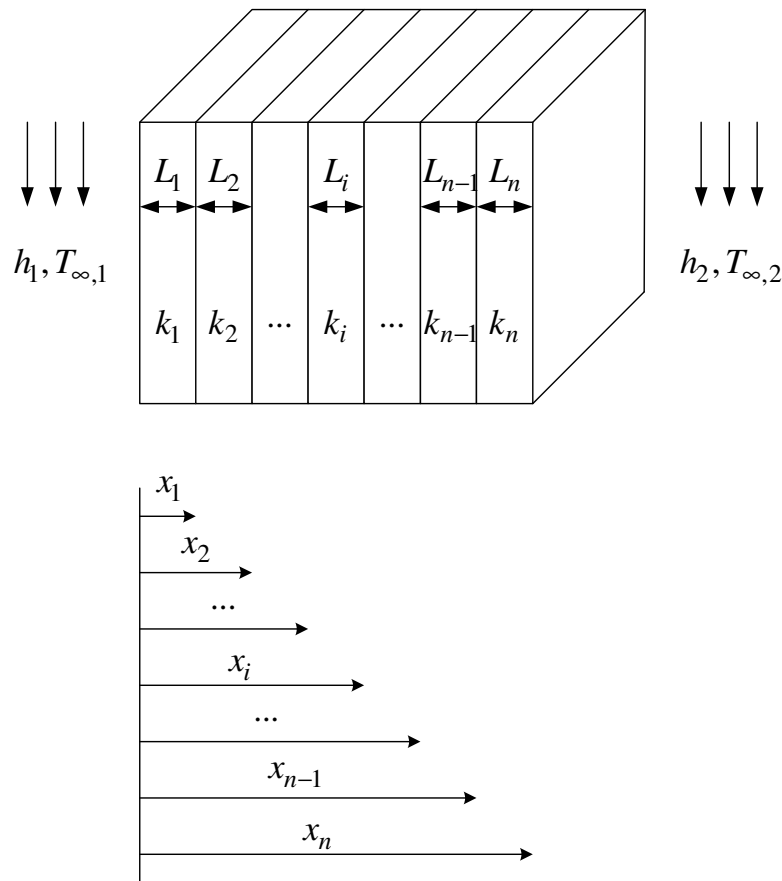


Figura 2 – Parede plana composta.

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & 0 < x < x_1 \\ k_2 & x_1 < x < x_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ k_i & x_{i-1} < x < x_i \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ k_{n-1} & x_{n-2} < x < x_{n-1} \\ k_n & x_{n-1} < x < x_n \end{cases} \quad (26)$$

Vamos considerar que a distribuição de temperatura na  $i$ -ésima camada da parede composta (isto é,  $x_{i-1} < x < x_i$ ) precise ser determinada. Combinando a Eq. (19) e a Eq. (26) para calcular os valores de  $I(0)$ ,  $I(L)$  e  $I(x)$  obtém-se:

$$I(0) = \int_0^0 \frac{dx}{k(x)} = 0 \quad (27)$$

$$I(L) = \int_0^L \frac{dx}{k(x)} = \sum_{m=1}^n \frac{L_m}{k_m} \quad (28)$$

$$I(x) = \int_0^x \frac{dx}{k(x)} = \sum_{m=1}^{i-1} \frac{L_m}{k_m} + \frac{x - x_{i-1}}{k_i} \quad x_{i-1} < x < x_i \quad (29)$$

Substituindo as Eqs. (27-29) na Eq. (24) obtém-se uma expressão para a distribuição de temperatura na  $i$ -ésima camada, ou seja:

$$T(x) = T_{\infty,1} - \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}) \left[ h_1 \left( \frac{x - x_{i-1}}{k_i} + \sum_{m=1}^{i-1} \frac{L_m}{k_m} \right) + 1 \right]}{h_1 \sum_{m=1}^n \frac{L_m}{k_m} + \frac{h_1}{h_2} + 1} \quad (30)$$

O fluxo de calor através da parede composta é calculado de maneira direta substituindo as Eqs. (27-28) na Eq. (25), ou seja:

$$q'' = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\sum_{m=1}^n \frac{L_m}{k_m} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}} \quad (31)$$

Deve ser notado no exemplo acima que, como a temperatura é uma função linear da posição  $x$ , o fluxo de calor através da parede é uma constante. Antes de finalizar essa seção, será introduzido o conceito de resistência térmica. Esse conceito tem origem na analogia entre a expressão da taxa de transferência de calor através da parede e a lei de Ohm da eletricidade para um fluxo unidimensional de corrente elétrica, representada por:

$$I = \frac{\Delta V}{R_e} \quad (32)$$

Conforme mostrado na Fig. (3),  $\Delta V$  (volts) é a diferença de potencial através de uma resistência elétrica  $R_e$  (ohms), e  $I$  (amperes) é a intensidade da corrente passando através da resistência, ou seja:

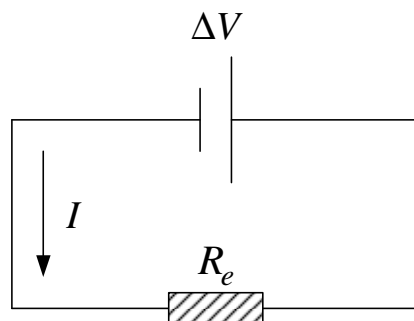


Figura 3 – Esquema de um circuito elétrico na qual é baseada a analogia entre a lei de Ohm e a lei de Fourier.

Se a taxa de transferência de calor através de uma parede composta for representada por  $q = Aq''$ , onde  $A$  é a área da parede perpendicular ao fluxo de calor, conforme a Fig. (2), podem ser obtidas conclusões comparando as Eqs. (31-32). Primeiro, a diferença de temperaturas  $\Delta T = T_{\infty,1} - T_{\infty,2}$  é análoga à diferença de potencial. Segundo, a taxa de transferência de calor  $q = Aq''$  passando através da parede

é análoga à corrente elétrica passando através da resistência elétrica. Assim, a Eq. (31) pode ser reescrita como:

$$q = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\sum_{m=1}^n \frac{L_m}{Ak_m} + \frac{1}{Ah_1} + \frac{1}{Ah_2}} \quad (33)$$

Comparando a Eq. (32) com a Eq. (33), é fácil perceber que o denominador da Eq. (33) desempenha papel análogo aquele da resistência elétrica da Eq. (32). É por esse motivo que o conceito de resistência térmica à passagem de calor na configuração da Fig. (2) é introduzido e definido como se segue:

$$R_t = \sum_{m=1}^n \frac{L_m}{Ak_m} + \frac{1}{Ah_1} + \frac{1}{Ah_2} \quad (34)$$

Podem ser identificadas três contribuições para a resistência térmica na Eq. (34). Primeiro, a resistência térmica oferecida pelo material das várias camadas da parede (representada pelos vários termos no somatório). Segundo, a resistência térmica oferecida pela presença do contato térmico imperfeito entre o lado direito da parede e o fluido frio. E terceiro, a resistência térmica oferecida pela presença do contato térmico imperfeito entre o lado esquerdo da parede e o fluido quente. No caso limite de contato térmico perfeito entre os fluidos e a parede ( $h_1 \rightarrow \infty$  e  $h_2 \rightarrow \infty$ ) essa contribuição na resistência térmica total desaparece.

Uma expressão mais geral para a resistência térmica pode ser obtida se a Eq. (25) for utilizada ao invés da Eq. (33) para o fluxo de calor. Como  $I(0)=0$  a partir da Eq. (19), pode ser mostrado que:

$$R_t = \frac{I(L)}{A} + \frac{1}{Ah_1} + \frac{1}{Ah_2} \quad (35)$$

A solução padrão para o problema da parede plana, Eqs. (1-3) pode ser obtida com o auxílio do MAPLE, cuja rotina de cálculos está mostrada no arquivo MAPLE1.mw.

### 3-O PROBLEMA DO DUTO CILÍNDRICO????

A análise apresentada anteriormente para a parede plana pode ser repetida para estudar o problema da condução radial em regime permanente em um duto cilíndrico. Essa geometria é de grande importância devido ao vasto uso de dutos em aplicações de engenharia de transferência de calor. Um esquema de uma seção de um duto cilíndrico está mostrado na Fig. (4):

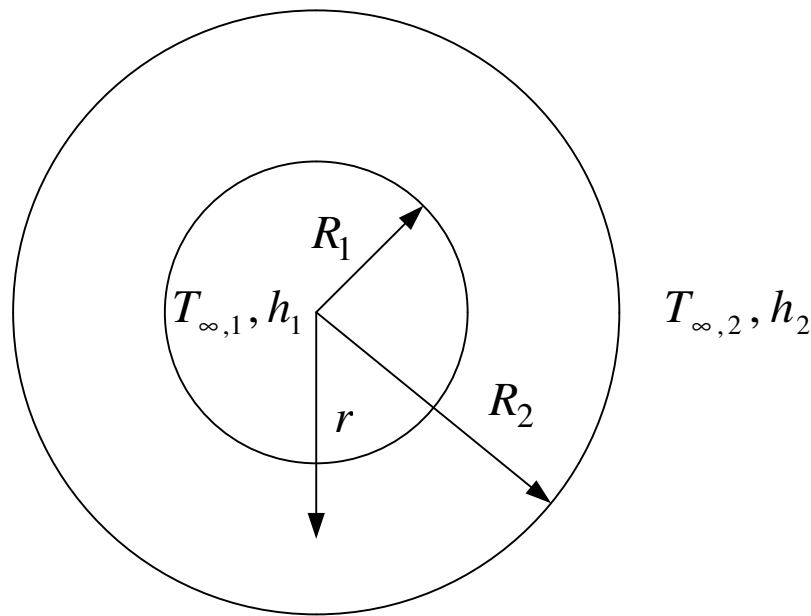


Figura 4 – Seção transversal de um duto cilíndrico.

Assumindo que há um escoamento fluido tanto internamente quanto externamente ao duto, a transferência de calor do fluido interno para a parede interna do duto é caracterizada por um coeficiente de transferência de calor  $h_1$  e temperatura  $T_{\infty,1}$ . Já a transferência de calor da parede externa do duto para o fluido externo é caracterizada por um coeficiente de transferência de calor  $h_2$  e temperatura  $T_{\infty,2}$ . O interesse aqui é a condução radial (isto é, a transferência de calor ao longo da periferia e ao longo do comprimento do duto são desprezadas). A condutividade térmica do duto,  $k$ , é assumida constante. O raio interno do duto é definido como  $R_1$  e o raio externo é definido como  $R_2$ . Considerando que não há geração de energia térmica no interior do duto e que o mesmo está estacionário, a equação de condução em coordenadas cilíndricas, Eq. (65) do Cap. (1), se reduz a:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (36)$$

As condições de contorno de terceira espécie correspondentes são:

$$h_1 [T_{\infty,1} - T(r = R_1)] = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_1} \quad (37)$$

$$-k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_2} = h_2 [T(r = R_2) - T_{\infty,2}] \quad (38)$$

A Eq. (36) pode ser integrada duas vezes em  $r$  para se obter a primeira derivada de  $T$  em relação a  $r$  e a solução geral para a distribuição de temperaturas em  $r$ , ou seja:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} \quad (39)$$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (40)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração, que devem ser obtidas a partir das duas condições de contorno, Eqs. (37-38). Substituindo as Eqs. (39-40) nas Eqs. (37-38) obtém-se:

$$h_1 (T_{\infty,1} - C_1 \ln R_1 - C_2) = -k \frac{C_1}{R_1} \quad (41)$$

$$-k \frac{C_1}{R_2} = h_2 (C_1 \ln R_2 + C_2 - T_{\infty,2}) \quad (42)$$

As Eqs. (41-42) constituem um sistema de duas equações e duas incógnitas para a determinação de  $C_1$  e  $C_2$ , podendo ser reescritas na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} k/R_1 - h_1 \ln R_1 & -h_1 \\ k/R_2 + h_2 \ln R_2 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 T_{\infty,1} \\ h_2 T_{\infty,2} \end{pmatrix} \quad (43)$$

A determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$  pode ser feita utilizando a regra de Cramer, ou seja:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} -h_1 T_{\infty,1} & -h_1 \\ h_2 T_{\infty,2} & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k/R_1 - h_1 \ln R_1 & -h_1 \\ k/R_2 + h_2 \ln R_2 & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{h_1 h_2 R_1 R_2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 h_2 R_1 R_2 \ln R_1 - k h_1 R_1 - h_1 h_2 R_1 R_2 \ln R_2 - k h_2 R_2}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} k/R_1 - h_1 \ln R_1 & -h_1 T_{\infty,1} \\ k/R_2 + h_2 \ln R_2 & h_2 T_{\infty,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k/R_1 - h_1 \ln R_1 & -h_1 \\ k/R_2 + h_2 \ln R_2 & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{h_1 h_2 R_1 R_2 T_{\infty,2} \ln R_1 - k h_1 R_1 T_{\infty,1} - h_1 h_2 R_1 R_2 T_{\infty,1} \ln R_2 - k h_2 R_2 T_{\infty,2}}{h_1 h_2 R_1 R_2 \ln R_1 - k h_1 R_1 - h_1 h_2 R_1 R_2 \ln R_2 - k h_2 R_2}$$

Substituindo as expressões de  $C_1$  e  $C_2$  na solução geral, Eq. (5), obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas, ou seja:

$$T(r) = \frac{h_1 h_2 R_1 R_2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 h_2 R_1 R_2 \ln R_1 - k h_1 R_1 - h_1 h_2 R_1 R_2 \ln R_2 - k h_2 R_2} \ln r$$

$$+ \frac{h_1 h_2 R_1 R_2 T_{\infty,2} \ln R_1 - k h_1 R_1 T_{\infty,1} - h_1 h_2 R_1 R_2 T_{\infty,1} \ln R_2 - k h_2 R_2 T_{\infty,2}}{h_1 h_2 R_1 R_2 \ln R_1 - k h_1 R_1 - h_1 h_2 R_1 R_2 \ln R_2 - k h_2 R_2} \quad (44)$$

A Eq. (44) pode ser rearranjada em uma forma mais compacta como:

$$T(r) = \frac{-(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{k}{R_2 h_2} + \frac{k}{R_1 h_1}} \left( \ln \frac{r}{R_1} + \frac{k}{R_1 h_1} \right) + T_{\infty,1} \quad (45)$$

A taxa de transferência de calor pode ser calculada pela lei de Fourier, ou seja:

$$q = -k(2\pi L) \frac{dT}{dr} = -k(2\pi L) \frac{d}{dr} \left[ \frac{-(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{k}{R_2 h_2} + \frac{k}{R_1 h_1}} \left( \ln \frac{r}{R_1} + \frac{k}{R_1 h_1} \right) + T_{\infty,1} \right] =$$

$$\frac{2\pi L (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\frac{1}{R_1 h_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{k} + \frac{1}{R_2 h_2}} \quad (46)$$

onde  $L$  é o comprimento do duto perpendicular ao plano da Fig. (4). Deve ser notado que a taxa de transferência de calor através da parede do duto é constante, conforme a Eq. (46). Conforme os coeficientes  $h_1$  e  $h_2$  aumentam e se aproximam do infinito, o contato térmico torna-se perfeito e a temperatura da parede se aproxima da temperatura do fluido ( $T_{\infty,1}$  em  $r = R_1$  e  $T_{\infty,2}$  em  $r = R_2$ , respectivamente). Nessa condição, a equação diferencial governante ainda é representada pela Eq. (36), mas as condições de contorno são agora escritas como:

$$T(r = R_1) = T_{\infty,1} \quad (47)$$

$$T(r = R_2) = T_{\infty,2} \quad (48)$$

A solução do conjunto de Eqs. (36, 47-48) fornece que:

$$T(r) = T_{\infty,1} - \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}) \ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} \quad (49)$$

$$q = \frac{2\pi L k (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\ln(R_2/R_1)} \quad (50)$$

A análise anterior pode ser generalizada para o caso de um duto cilíndrico com condutividade térmica variável. A equação de condução para o caso de condutividade térmica variável com  $r$  tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dr} \left[ rk(r) \frac{dT}{dr} \right] = 0 \quad (51)$$

A Eq. (51) pode ser integrada duas vezes em  $r$  para se obter a primeira derivada de  $T$  em  $r$  e a solução geral para a distribuição de temperaturas em  $r$ , ou seja:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{rk(r)} \quad (52)$$

$$T(r) = C_1 \int_{R_1}^r \frac{dr}{rk(r)} + C_2 = C_1 G(r) + C_2 \quad (53)$$

onde  $G(r)$  é uma integral definida representada como:

$$G(r) = \int_{R_1}^r \frac{dr}{rk(r)} \quad (54)$$

As condições de contorno permanecem idênticas às Eqs. (41-42), podendo então ser escritas como:

$$h_1 [T_{\infty,1} - C_1 G(R_1) - C_2] = -k(R_1) \frac{C_1}{R_1 k(R_1)} \quad (55)$$

$$-k(R_2) \frac{C_1}{R_2 k(R_2)} = h_2 [C_1 G(R_2) + C_2 - T_{\infty,2}] \quad (56)$$

As Eqs. (55-56) constituem um sistema de duas equações e duas incógnitas para a determinação de  $C_1$  e  $C_2$ , podendo ser reescritas na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 1/R_1 - h_1 G(R_1) & -h_1 \\ 1/R_2 + h_2 G(R_2) & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 T_{\infty,1} \\ h_2 T_{\infty,2} \end{pmatrix} \quad (57)$$

A determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$  pode ser feita utilizando a regra de Cramer, ou seja:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} -h_1 T_{\infty,1} & -h_1 \\ h_2 T_{\infty,2} & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/R_1 - h_1 G(R_1) & -h_1 \\ 1/R_2 + h_2 G(R_2) & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{h_1 h_2 R_1 R_2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 h_2 R_1 R_2 G(R_1) - h_1 R_1 - h_1 h_2 R_1 R_2 G(R_2) - h_2 R_2}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1/R_1 - h_1 G(R_1) & -h_1 T_{\infty,1} \\ 1/R_2 + h_2 G(R_2) & h_2 T_{\infty,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/R_1 - h_1 G(R_1) & -h_1 \\ 1/R_2 + h_2 G(R_2) & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{h_1 h_2 R_1 R_2 T_{\infty,2} G(R_1) - h_1 R_1 T_{\infty,1} - h_1 h_2 R_1 R_2 T_{\infty,1} G(R_2) - h_2 R_2 T_{\infty,2}}{h_1 h_2 R_1 R_2 G(R_1) - h_1 R_1 - h_1 h_2 R_1 R_2 G(R_2) - h_2 R_2}$$

Substituindo as expressões de  $C_1$  e  $C_2$  na solução geral, Eq. (53), obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas, ou seja:

$$T(r) = \frac{h_1 h_2 R_1 R_2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 h_2 R_1 R_2 G(R_1) - h_1 R_1 - h_1 h_2 R_1 R_2 G(R_2) - h_2 R_2} G(r) + \frac{h_1 h_2 R_1 R_2 T_{\infty,2} G(R_1) - h_1 R_1 T_{\infty,1} - h_1 h_2 R_1 R_2 T_{\infty,1} G(R_2) - h_2 R_2 T_{\infty,2}}{h_1 h_2 R_1 R_2 G(R_1) - h_1 R_1 - h_1 h_2 R_1 R_2 G(R_2) - h_2 R_2} \quad (58)$$

A Eq. (58) pode ser rearranjada em uma forma mais compacta como:

$$T(r) = T_{\infty,1} - \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}) \left\{ h_1 [G(r) - G(R_1)] + \frac{1}{R_1} \right\}}{h_1 [G(R_2) - G(R_1)] + \frac{h_1}{R_2 h_2} + \frac{1}{R_1}} \quad (58)$$

Deve ser notado que  $G(R_1) = 0$ . A taxa de transferência de calor pode ser calculada pela lei de Fourier, ou seja:

$$q = -k(r)(2\pi r L) \frac{dT}{dr} = -k(r)(2\pi r L) \frac{C_1}{rk(r)} = -\frac{2\pi L h_1 h_2 R_1 R_2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 h_2 R_1 R_2 G(R_1) - h_1 R_1 - h_1 h_2 R_1 R_2 G(R_2) - h_2 R_2}$$

$$= \frac{2\pi L h_1 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 [G(R_2) - G(R_1)] + \frac{h_1}{R_2 h_2} + \frac{1}{R_1}} \quad (59)$$

No caso especial de um duto cilíndrico composto (uma configuração comum de dutos com isolamento térmico) consistindo de  $n$  camadas com condutividades térmicas distintas porém constantes como mostrado na Fig. (5), a condutividade térmica é representada pela seguinte expressão:

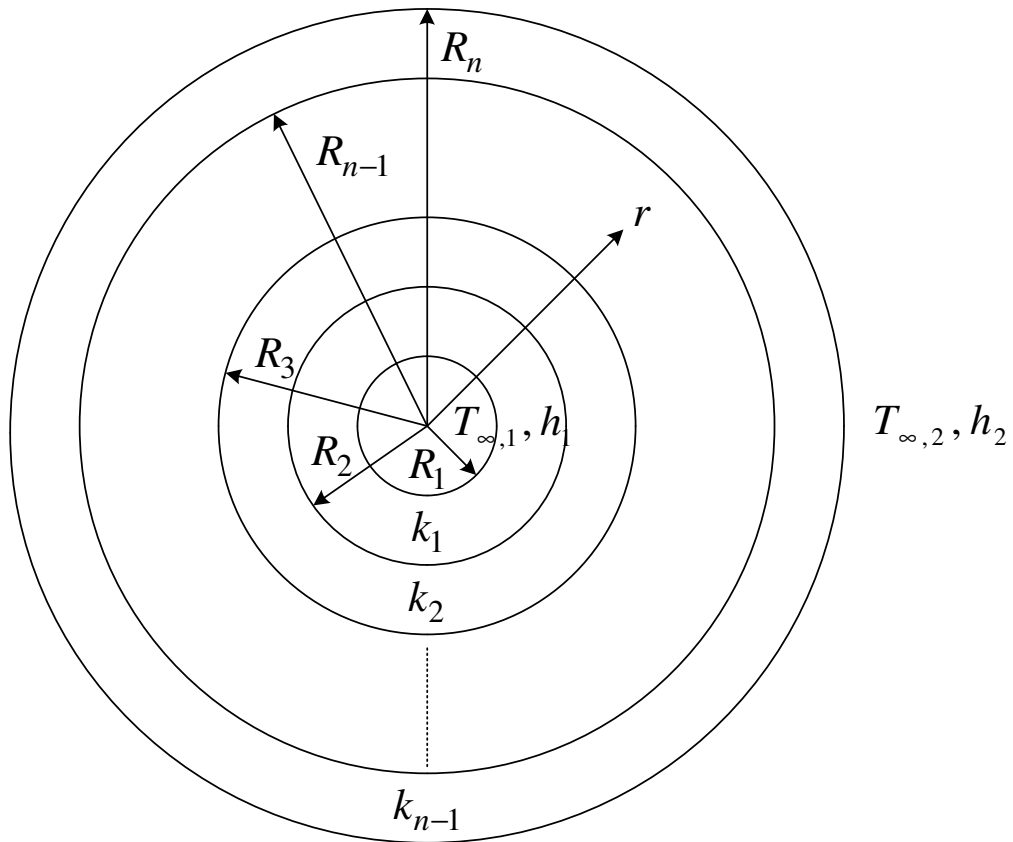


Figura 5 – Seção transversal de um duto cilíndrico revestido com camadas de diferentes isolantes térmicos.

$$k(r) = \begin{cases} k_1 & R_1 < r < R_2 \\ k_2 & R_2 < r < R_3 \\ \dots & \dots \\ k_i & R_i < r < R_{i+1} \\ \dots & \dots \\ k_{n-2} & R_{n-2} < r < R_{n-1} \\ k_{n-1} & R_{n-1} < r < R_n \end{cases} \quad (60)$$

Vamos considerar que a distribuição de temperatura na  $i$ -ésima camada do duto cilíndrico composto (isto é,  $R_i < r < R_{i+1}$ ) precise ser determinada. Combinando as Eqs. (54) e (60) para calcular os valores de  $G(R_1)$ ,  $G(R_2)$  e  $G(r)$  obtém-se:

$$G(R_1) = \int_{R_1}^{R_1} \frac{dr}{rk(r)} = 0 \quad (61)$$

$$G(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{rk(r)} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{k_m} \ln \frac{R_{m+1}}{R_m} \quad (62)$$

$$G(r) = \int_{R_1}^r \frac{dr}{rk(r)} = \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{k_m} \ln \frac{R_{m+1}}{R_m} + \frac{1}{k_i} \ln \frac{r}{R_1} \quad (63)$$

Substituindo as Eqs. (61-63) na Eq. (58) obtém-se uma expressão para a distribuição de temperatura na  $i$ -ésima camada (deve ser notado que  $R_2$  na Eq. (58) foi substituído por  $R_n$ ), ou seja:

$$T(r) = T_{\infty,1} - \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}) \left( \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{k_m} \ln \frac{R_{m+1}}{R_m} + \frac{1}{k_i} \ln \frac{r}{R_1} + \frac{1}{R_1 h_1} \right)}{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{k_m} \ln \frac{R_{m+1}}{R_m} + \frac{h_1}{R_n h_2} + \frac{1}{R_1 h_1}} \quad R_i < r < R_{i+1} \quad (64)$$

A taxa de transferência de calor através do duto cilíndrico é calculada de maneira direta combinando as Eqs. (59-63) e substituindo  $R_2$  por  $R_n$  na Eq. (59) obtendo-se:

$$q = \frac{2\pi L (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{k_m} \ln \frac{R_{m+1}}{R_m} + \frac{h_1}{R_n h_2} + \frac{1}{R_1 h_1}} \quad (65)$$

No caso limite de uma única camada, as Eqs. (64-65) se reduzem as Eqs. (45-46). De acordo com a discussão precedente sobre resistências térmicas, utilizando a

analogia entre a Eq. (65) e a lei de Ohm, Eq. (32), pode-se escrever uma expressão para a resistência térmica de um duto cilíndrico composto, ou seja:

$$R_t = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi L k_m} \ln \frac{R_{m+1}}{R_m} + \frac{h_1}{2\pi L R_n h_2} + \frac{1}{2\pi L R_1 h_1} \quad (66)$$

Uma expressão mais geral para a resistência térmica pode ser escrita comparando a Eq. (59) com a lei de Ohm:

$$R_t = \frac{G(R_2)}{2\pi L} + \frac{1}{2\pi L R_2 h_2} + \frac{1}{2\pi L R_1 h_1} \quad (67)$$

A solução padrão para o problema do duto cilíndrico, Eqs. (36-38) pode ser obtida com o auxílio do MAPLE, cuja rotina de cálculos está mostrada no arquivo MAPLE2.mw.

#### 4-O PROBLEMA DA CASCA ESFÉRICA

A análise apresentada anteriormente para o duto cilíndrico pode ser repetida para estudar o problema da condução radial em regime permanente em uma casca esférica. Essa geometria é de grande importância devido à utilização em armazenamento de fluidos. Um esquema de uma seção de uma casca esférica está mostrado na Fig. (6):

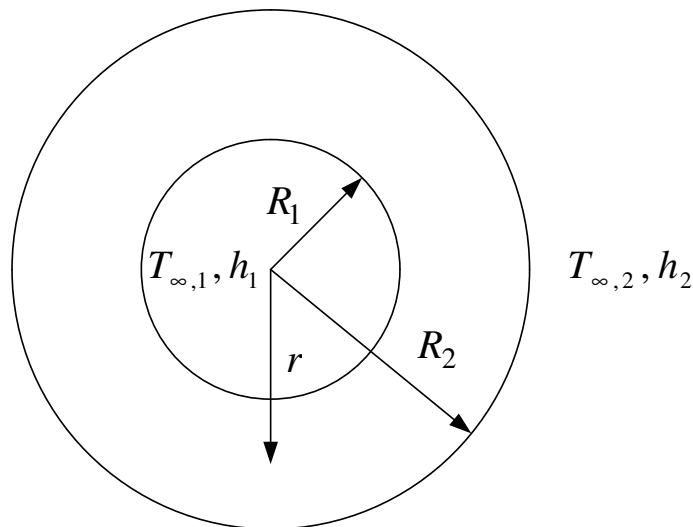


Figura 6 – Seção transversal de uma casca esférica.

Assumindo que há o contato da casca esférica com um fluido tanto internamente quanto externamente, a transferência de calor do fluido interno para a parede interna da esfera é caracterizada por um coeficiente de transferência de calor  $h_1$  e temperatura  $T_{\infty,1}$ . Já a transferência de calor da parede externa da casca esférica para o fluido externo é caracterizada por um coeficiente de transferência de calor  $h_2$  e temperatura  $T_{\infty,2}$ . O interesse aqui é a condução radial. A condutividade térmica da esfera,  $k$ , é assumida constante. O raio interno da casca esférica é definido como  $R_1$  e o raio externo é definido como  $R_2$ . Considerando que não há geração de energia térmica no interior da casca esférica e que a mesma está estacionária, a equação de condução em coordenadas esféricas, Eq. (87) do Cap. (1), se reduz a:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (68)$$

As condições de contorno de terceira espécie correspondentes são:

$$h_1 [T_{\infty,1} - T(r = R_1)] = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_1} \quad (69)$$

$$-k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_2} = h_2 [T(r = R_2) - T_{\infty,2}] \quad (70)$$

A Eq. (68) pode ser integrada duas vezes em  $r$  para se obter a primeira derivada de  $T$  em  $r$  e a solução geral para a distribuição de temperaturas em  $r$ :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \quad (71)$$

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (72)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração, que devem ser obtidas a partir das duas condições de contorno, Eqs. (69-70). Substituindo as Eqs. (71-72) nas Eqs. (69-70) obtém-se:

$$h_1 \left( T_{\infty,1} + \frac{C_1}{R_1} - C_2 \right) = -k \frac{C_1}{R_1^2} \quad (73)$$

$$-k \frac{C_1}{R_2^2} = h_2 \left( -\frac{C_1}{R_2} + C_2 - T_{\infty,2} \right) \quad (74)$$

As Eqs. (41-42) constituem um sistema de duas equações e duas incógnitas para a determinação de  $C_1$  e  $C_2$ , podendo ser reescritas na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} k/R_1^2 + h_1/R_1 & -h_1 \\ k/R_2^2 - h_2/R_2 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 T_{\infty,1} \\ h_2 T_{\infty,2} \end{pmatrix} \quad (75)$$

A determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$  pode ser feita utilizando a regra de Cramer, ou seja:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} -h_1 T_{\infty,1} & -h_1 \\ h_2 T_{\infty,2} & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k/R_1^2 + h_1/R_1 & -h_1 \\ k/R_2^2 - h_2/R_2 & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 h_2 R_1^2 R_2 - k h_1 R_1^2 - h_1 h_2 R_1 R_2^2 - k h_2 R_2^2}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} k/R_1^2 + h_1/R_1 & -h_1 T_{\infty,1} \\ k/R_2^2 - h_2/R_2 & h_2 T_{\infty,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k/R_1^2 + h_1/R_1 & -h_1 \\ k/R_2^2 - h_2/R_2 & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{h_1 h_2 R_1^2 R_2 T_{\infty,1} - k h_1 R_1^2 T_{\infty,1} - h_1 h_2 R_1 R_2^2 T_{\infty,2} - k h_2 R_2^2 T_{\infty,2}}{h_1 h_2 R_1^2 R_2 - k h_1 R_1^2 - h_1 h_2 R_1 R_2^2 - k h_2 R_2^2}$$

Substituindo as expressões de  $C_1$  e  $C_2$  na solução geral, Eq. (72), obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas, ou seja:

$$T(r) = -\frac{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 h_2 R_1^2 R_2 - k h_1 R_1^2 - h_1 h_2 R_1 R_2^2 - k h_2 R_2^2} \frac{1}{r} + \frac{h_1 h_2 R_1^2 R_2 T_{\infty,1} - k h_1 R_1^2 T_{\infty,1} - h_1 h_2 R_1 R_2^2 T_{\infty,2} - k h_2 R_2^2 T_{\infty,2}}{h_1 h_2 R_1^2 R_2 - k h_1 R_1^2 - h_1 h_2 R_1 R_2^2 - k h_2 R_2^2} \quad (76)$$

A Eq. (76) pode ser rearranjada em uma forma mais compacta como:

$$T(r) = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} - \frac{k}{R_1^2 h_1} \right)}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{k}{R_1^2 h_1} + \frac{k}{R_2^2 h_2}} + T_{\infty,1} \quad (77)$$

A taxa de transferência de calor pode ser calculada pela lei de Fourier, ou seja:

$$q = -k(4\pi r^2) \frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2) \frac{d}{dr} \left[ \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} - \frac{k}{R_1^2 h_1} \right)}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{k}{R_1^2 h_1} + \frac{k}{R_2^2 h_2}} + T_{\infty,1} \right] = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1^2 h_1} + \frac{1}{R_2^2 h_2} + \frac{1}{k R_1} - \frac{1}{k R_2} \right)} \quad (78)$$

Deve ser notado que a taxa de transferência de calor através da parede esférica é constante, conforme a Eq. (78). Conforme os coeficientes  $h_1$  e  $h_2$  aumentam e se aproximam do infinito, o contato térmico torna-se perfeito e a temperatura da parede se aproxima da temperatura do fluido ( $T_{\infty,1}$  em  $r = R_1$  e  $T_{\infty,2}$  em  $r = R_2$ , respectivamente). Nessa condição, a equação diferencial governante ainda é representada pela Eq. (68), mas as condições de contorno são agora escritas como:

$$T(r = R_1) = T_{\infty,1} \quad (79)$$

$$T(r = R_2) = T_{\infty,2} \quad (80)$$

A solução do conjunto de Eqs. (68, 79-80) fornece que:

$$T(r) = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad (81)$$

$$q = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\frac{1}{4\pi k} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (82)$$

A análise anterior pode ser generalizada para o caso de uma casca esférica com condutividade térmica variável. A equação de condução para o caso de condutividade térmica variável com  $r$  tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 k(r) \frac{dT}{dr} \right] = 0 \quad (83)$$

A Eq. (83) pode ser integrada duas vezes em  $r$  para se obter a primeira derivada de  $T$  em  $r$  e a solução geral para a distribuição de temperaturas em  $r$ , ou seja:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2 k(r)} \quad (84)$$

$$T(r) = C_1 \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2 k(r)} + C_2 = C_1 F(r) + C_2 \quad (85)$$

onde  $F(r)$  é uma integral definida representada como:

$$F(r) = \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2 k(r)} \quad (86)$$

As condições de contorno permanecem idênticas às Eqs. (69-70), podendo então ser escritas como:

$$h_1[T_{\infty,1} - C_1 F(R_1) - C_2] = -k(R_1) \frac{C_1}{R_1^2 k(R_1)} \quad (87)$$

$$-k(R_2) \frac{C_1}{R_2^2 k(R_2)} = h_2[C_1 F(R_2) + C_2 - T_{\infty,2}] \quad (88)$$

As Eqs. (87) e (88) constituem um sistema de duas equações e duas incógnitas para a determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$ , podendo então serem reescritas como:

$$\begin{pmatrix} 1/R_1^2 - h_1 F(R_1) & -h_1 \\ 1/R_2^2 + h_2 F(R_2) & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 T_{\infty,1} \\ h_2 T_{\infty,2} \end{pmatrix} \quad (89)$$

A determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$  pode ser feita utilizando a regra de Cramer, ou seja:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} -h_1 T_{\infty,1} & -h_1 \\ h_2 T_{\infty,2} & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/R_1^2 - h_1 F(R_1) & -h_1 \\ 1/R_2^2 + h_2 F(R_2) & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 F(R_1) - h_1 R_1^2 - h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 F(R_2) - h_2 R_2^2}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1/R_1^2 - h_1 F(R_1) & -h_1 T_{\infty,1} \\ 1/R_2^2 + h_2 F(R_2) & h_2 T_{\infty,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/R_1^2 - h_1 F(R_1) & -h_1 \\ 1/R_2^2 + h_2 F(R_2) & h_2 \end{vmatrix}} = \frac{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 T_{\infty,2} F(R_1) - h_1 R_1^2 T_{\infty,1} + h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 T_{\infty,1} F(R_2) - h_2 R_2^2 T_{\infty,2}}{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 F(R_1) - h_1 R_1^2 - h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 F(R_2) - h_2 R_2^2}$$

Substituindo as expressões de  $C_1$  e  $C_2$  na solução geral, Eq. (85), obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas, ou seja:

$$T(r) = \frac{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 F(R_1) - h_1 R_1^2 - h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 F(R_2) - h_2 R_2^2} F(r) \\ + \frac{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 T_{\infty,2} F(R_1) - h_1 R_1^2 T_{\infty,1} + h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 T_{\infty,1} F(R_2) - h_2 R_2^2 T_{\infty,2}}{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 F(R_1) - h_1 R_1^2 - h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 F(R_2) - h_2 R_2^2} \quad (90)$$

A Eq. (90) pode ser rearranjada em uma forma mais compacta como:

$$T(r) = T_{\infty,1} - \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}) \left[ F(r) - F(R_1) + \frac{1}{R_1^2 h_1} \right]}{\frac{1}{R_1^2 h_1} + \frac{1}{R_2^2 h_2} - F(R_1) + F(R_2)} \quad (91)$$

Deve ser notado que  $F(R_1)=0$ . A taxa de transferência de calor pode ser calculada pela lei de Fourier, ou seja:

$$q = -k(r)(4\pi r^2) \frac{dT}{dr} = -k(r)(4\pi r^2) \frac{C_1}{r^2 k(r)} = -\frac{4\pi h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 F(R_1) - h_1 R_1^2 - h_1 h_2 R_1^2 R_2^2 F(R_2) - h_2 R_2^2} \\ = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{R_1^2 h_1} + \frac{1}{R_2^2 h_2} - F(R_1) + F(R_2) \right]} \quad (92)$$

No caso especial de uma casca esférica composta (uma configuração comum de esferas com isolamento térmico) consistindo de  $n$  camadas com condutividades térmicas distintas porém constantes como mostrado na Fig. (7), a condutividade térmica é representada pela seguinte expressão:

$$k(r) = \begin{cases} k_1 & R_1 < r < R_2 \\ k_2 & R_2 < r < R_3 \\ ..... \\ k_i & R_i < r < R_{i+1} \\ ..... \\ k_{n-2} & R_{n-2} < r < R_{n-1} \\ k_{n-1} & R_{n-1} < r < R_n \end{cases} \quad (93)$$

Vamos considerar que a distribuição de temperatura na  $i$ -ésima camada da casca esférica composta (isto é,  $R_i < r < R_{i+1}$ ) precise ser determinada. Combinando as Eqs. (86) e (93) para calcular os valores de  $F(R_1)$ ,  $F(R_2)$  e  $F(r)$  obtém-se:

$$F(R_1) = \int_{R_1}^{R_1} \frac{dr}{r^2 k(r)} = 0 \quad (94)$$

$$F(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2 k(r)} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{k_m} \left( \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_{m+1}} \right) \quad (95)$$

$$F(r) = \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2 k(r)} = \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{k_m} \left( \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_{m+1}} \right) + \frac{1}{k_i} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{r} \right) \quad (96)$$

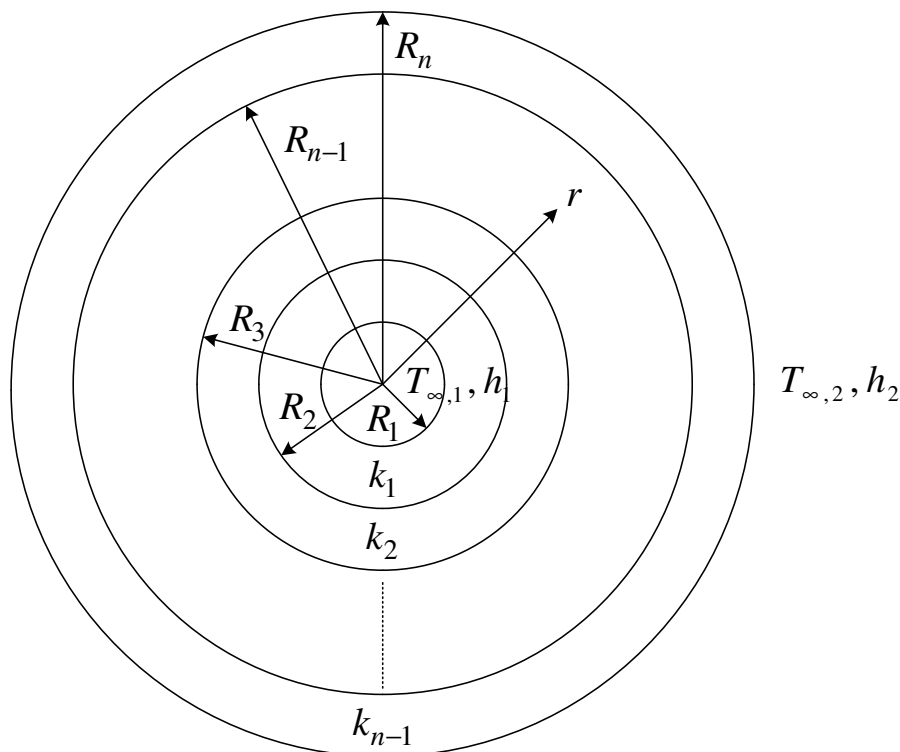


Figura 7 – Seção transversal de uma casca esférica revestida com camadas de diferentes isolantes térmicos.

Substituindo as Eqs. (94-96) na Eq. (91) obtém-se uma expressão para a distribuição de temperatura na  $i$ -ésima camada (deve ser notado que  $R_2$  na Eq. (91) foi substituído por  $R_n$ ), ou seja:

$$T(r) = T_{\infty,1} - \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}) \left[ \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{k_m} \left( \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_{m+1}} \right) + \frac{1}{k_i} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{R_1^2 h_1} \right]}{\frac{1}{R_1^2 h_1} + \frac{1}{R_n^2 h_2} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{k_m} \left( \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_{m+1}} \right)} \quad R_i < r < R_{i+1} \quad (97)$$

A taxa de transferência de calor através da casca esférica é calculada de maneira direta combinando as Eqs. (92-96) e substituindo  $R_2$  por  $R_n$  na Eq. (92) obtém-se:

$$q = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{R_1^2 h_1} + \frac{1}{R_2^2 h_2} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{k_m} \left( \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_{m+1}} \right) \right]} \quad (98)$$

No caso limite de uma única camada, as Eqs. (97-98) se reduzem as Eqs. (77-78). De acordo com a discussão precedente sobre resistências térmicas, utilizando a analogia entre a Eq. (98) e a lei de Ohm, Eq. (32), pode-se escrever uma expressão para a resistência térmica de uma casca esférica composta, ou seja:

$$R_t = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{R_1^2 h_1} + \frac{1}{R_2^2 h_2} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{k_m} \left( \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_{m+1}} \right) \right] \quad (99)$$

Uma expressão mais geral para a resistência térmica pode ser escrita comparando a Eq. (92) com a lei de Ohm:

$$R_t = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{R_1^2 h_1} + \frac{1}{R_2^2 h_2} - F(R_1) + F(R_2) \right] \quad (100)$$

A solução padrão para o problema da casca esférica, Eqs. (68-70) pode ser obtida com o auxílio do MAPLE, cuja rotina de cálculos está mostrada no arquivo MAPLE3.mw.

## 5-SEÇÕES CÔNICAS TRUNCADAS

Nas Figs. (8a-8b) a área da seção transversal,  $A(x)$ , é uma função de  $x$ , podendo ser escrita como:

$$A(x) = \frac{\pi}{4} d(x)^2 \quad (101)$$

onde o diâmetro  $d(x) = ax^{1/2}$  se aplica a configuração da Fig. (8a) e  $d(x) = ax^{3/2}$  se aplica a configuração da Fig. (8b), com  $a$  sendo uma constante numérica.

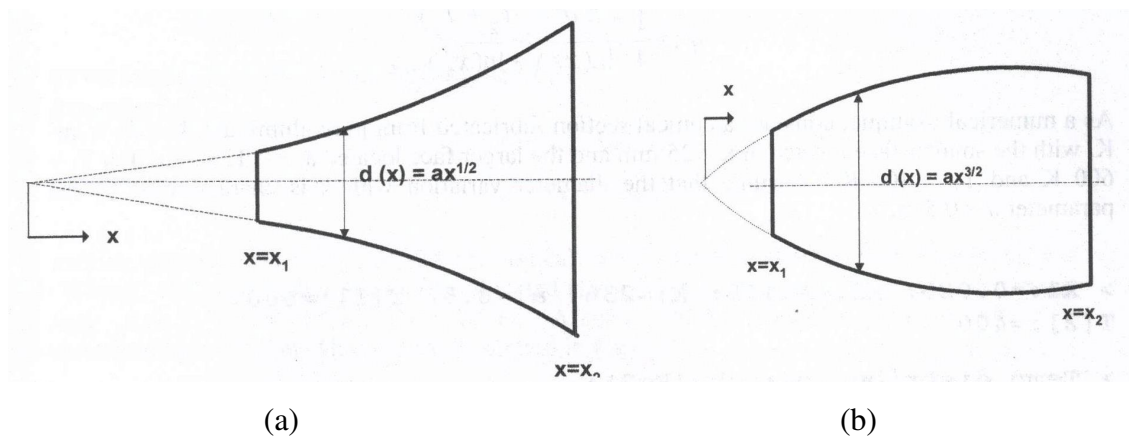


Figura 8 – Exemplos de seções cônicas truncadas.

Para condução unidimensional em regime permanente sem geração de energia, um balanço de energia diferencial em um elemento de comprimento  $dx$  para as seções cônicas mostradas na Fig. (8) tem a seguinte forma:

$$\dot{E}_e = \dot{E}_s \Rightarrow q_x = q_{x+dx} \quad (102)$$

onde  $q_x$  e  $q_{x+dx}$  indicam taxas de transferência de calor por condução nas posições  $x$  e  $x+dx$ , respectivamente. A taxa de condução na posição  $x+dx$  pode ser expressa em

função da taxa de condução na posição  $x$  utilizando uma expansão em série de Taylor, ou seja:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \quad (103)$$

onde os termos de segunda em diante foram desprezados. Dessa forma, substituindo a Eq. (103) na Eq. (102), obtém-se:

$$\frac{dq_x}{dx} = 0 \quad (104)$$

Substituindo a lei de Fourier na Eq. (104) obtém-se:

$$\frac{d}{dx} \left[ -kA(x) \frac{dT}{dx} \right] = 0 \quad (105)$$

Para condutividade térmica constante pode-se reescrever a Eq. (105) na forma:

$$\frac{d}{dx} \left[ A(x) \frac{dT}{dx} \right] = 0 \quad (106)$$

De acordo com a Fig. (8), embora as condições de contorno nas fronteiras em  $x = x_1$  e  $x = x_2$  possam assumir diversas formas, por simplicidade, serão consideradas condições de contorno de primeira espécie, sendo representadas como:

$$T(x = x_1) = T_1 \quad (107)$$

$$T(x = x_2) = T_2 \quad (108)$$

Para a Fig. (8a), a Eq. (106) é reescrita como:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\pi}{4} d(x)^2 \frac{dT}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{\pi}{4} (ax^{1/2})^2 \frac{dT}{dx} \right] = \frac{\pi a^2}{4} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (109)$$

A Eq. (109) pode ser simplificada para a forma final da equação diferencial ordinária que representa o problema em análise, escrita na forma:

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (110)$$

A Eq. (110) pode ser integrada duas vezes em  $x$  para se obter a primeira derivada de  $T$  em  $x$  e a solução geral para a distribuição de temperaturas em  $x$ :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{C_1}{x} \quad (111)$$

$$T(x) = C_1 \ln x + C_2 \quad (112)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração, que podem ser obtidas a partir das duas condições de contorno, Eqs. (107-108). Substituindo a Eq. (112) nas Eqs. (107-108) obtém-se:

$$T(x = x_1) = C_1 \ln x_1 + C_2 = T_1 \quad (113)$$

$$T(x = x_2) = C_1 \ln x_2 + C_2 = T_2 \quad (114)$$

As Eqs. (113-114) constituem um sistema de duas equações e duas incógnitas para a determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$ , cujas expressões, após solução do sistema de equações, são:

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{\ln x_2 - \ln x_1} \quad (115)$$

$$C_2 = \frac{T_1 \ln x_2 - T_2 \ln x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \quad (116)$$

Substituindo as expressões de  $C_1$  e  $C_2$  na solução geral, Eq. (112), e rearranjando, obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas, ou seja:

$$T(x) = \frac{(T_2 - T_1)}{\ln x_2 - \ln x_1} \ln x + \frac{T_1 \ln x_2 - T_2 \ln x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \quad (117)$$

A primeira derivada em relação a  $x$  da Eq. (117) tem a seguinte forma:

$$\frac{dT}{dx} = \left[ \frac{(T_2 - T_1)}{\ln x_2 - \ln x_1} \right] \frac{1}{x} \quad (118)$$

A taxa de transferência de calor pode ser calculada pela lei de Fourier e a partir do resultado da Eq. (118), ou seja:

$$q = -kA(x) \frac{dT}{dx} = -k \frac{\pi a^2 x}{4} \left[ \frac{(T_2 - T_1)}{\ln x_2 - \ln x_1} \right] \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \frac{k \pi a^2 (T_1 - T_2)}{\ln x_2 - \ln x_1} \quad (119)$$

Como um exemplo numérico, vamos considerar uma seção cônica fabricada de alumínio puro ( $k = 236 \text{ W/(m.K)}$ ), com sua face menor localizada em  $x_1 = 25 \text{ mm}$  e sua face maior localizada em  $x_2 = 125 \text{ mm}$ . Sejam  $T_1 = 600 \text{ K}$  e  $T_2 = 400 \text{ K}$ . Assuma que a variação do diâmetro com  $x$  seja caracterizada pelo parâmetro  $a = 0,5 \text{ m}$ . Utilizando as Eqs (115-119) obtém-se:

$$C_1 = \frac{(400 - 600)}{\ln 0,125 - \ln 0,025} = -124,27 \text{ K/m}$$

$$C_2 = \frac{600 \cdot \ln 0,125 - 400 \cdot \ln 0,025}{\ln 0,125 - \ln 0,025} = 141,59 \text{ K}$$

$$T(x) = -124,27 \ln x + 141,59$$

$$q = \frac{1}{4} \frac{236\pi 0,5^2 (600 - 400)}{\ln 0,125 - \ln 0,025} = 5758,34 \text{ W}$$

Esses cálculos também podem ser feitos utilizando o MAPLE, cuja rotina de cálculos está mostrada no arquivo MAPLE4.mw. Para a Fig. (8b), a Eq. (106) é reescrita como:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\pi}{4} d(x)^2 \frac{dT}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{\pi}{4} (ax^{3/2})^2 \frac{dT}{dx} \right] = \frac{\pi a^2}{4} \frac{d}{dx} \left( x^3 \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (120)$$

A Eq. (119) pode ser simplificada para a forma final da equação diferencial ordinária que representa o problema em análise, escrita na forma:

$$\frac{d}{dx} \left( x^3 \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (121)$$

A Eq. (121) pode ser integrada duas vezes em  $x$  para se obter a primeira derivada de  $T$  em  $x$  e a solução geral para a distribuição de temperaturas em  $x$ :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{C_1}{x^3} \quad (122)$$

$$T(x) = -\frac{C_1}{2x^2} + C_2 \quad (123)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração, que devem ser obtidas a partir das duas condições de contorno, Eqs. (107-108). Substituindo a Eq. (123) nas Eqs. (107-108) obtém-se:

$$T(x = x_1) = -\frac{C_1}{2x_1^2} + C_2 = T_1 \quad (124)$$

$$T(x = x_2) = -\frac{C_1}{2x_2^2} + C_2 = T_2 \quad (125)$$

As Eqs. (124-125) constituem um sistema de duas equações e duas incógnitas para a determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$ , cujas expressões, após solução do sistema de equações, são:

$$C_1 = \frac{2x_1^2 x_2^2 (T_1 - T_2)}{x_1^2 - x_2^2} \quad (126)$$

$$C_2 = \frac{T_1 x_1^2 - T_2 x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \quad (127)$$

Substituindo as expressões de  $C_1$  e  $C_2$  na solução geral, Eq. (123), e rearranjando, obtém-se a solução particular para a distribuição de temperaturas, ou seja:

$$T(x) = -\frac{x_1^2 x_2^2 (T_1 - T_2)}{x_1^2 - x_2^2} \frac{1}{x^2} + \frac{T_1 x_1^2 - T_2 x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \quad (128)$$

A primeira derivada em relação a  $x$  da Eq. (128) tem a seguinte forma:

$$\frac{dT}{dx} = \left[ \frac{2x_1^2 x_2^2 (T_1 - T_2)}{x_1^2 - x_2^2} \right] \frac{1}{x^3} \quad (129)$$

A taxa de transferência de calor pode ser calculada pela lei de Fourier e a partir do resultado da Eq. (129), ou seja:

$$q = -kA(x) \frac{dT}{dx} = -k \frac{\pi a^2 x^3}{4} \left[ \frac{2x_1^2 x_2^2 (T_1 - T_2)}{x_1^2 - x_2^2} \right] \frac{1}{x^3} = \frac{1}{2} \frac{k \pi a^2 x_1^2 x_2^2 (T_2 - T_1)}{x_1^2 - x_2^2} \quad (130)$$

Como um exemplo numérico, vamos considerar uma seção cônica fabricada de alumínio puro ( $k = 238 \text{ W/(m.K)}$ ), com sua face menor localizada em  $x_1 = 75 \text{ mm}$  e sua

face maior localizada em  $x_2 = 225 \text{ mm}$ . Sejam  $T_1 = 100 \text{ K}$  e  $T_2 = 20 \text{ K}$ . Assuma que a variação do diâmetro com  $x$  seja caracterizada pelo parâmetro  $a = 1,0 \text{ m}$ . Utilizando as Eqs (126-130) obtém-se:

$$C_1 = \frac{2 \cdot 0,075^2 \cdot 0,225^2 (100 - 20)}{0,075^2 - 0,225^2} = -1,0125 \text{ K.m}^2$$

$$C_2 = \frac{T_1 x_1^2 - T_2 x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{100 \cdot 0,075^2 - 20 \cdot 0,225^2}{0,075^2 - 0,225^2} = 10 \text{ K}$$

$$T(x) = \frac{0,50625}{x^2} + 10$$

$$q = \frac{1}{2} \frac{238\pi \cdot 1,0^2 \cdot 0,075^2 \cdot 0,225^2 (20 - 100)}{0,075^2 - 0,225^2} = 189,26 \text{ W}$$

Esses cálculos também podem ser feitos utilizando o MAPLE, cuja rotina de cálculos está mostrada no arquivo MAPLE5.mw.

## 6-GEOMETRIAS COMPOSTAS

Transferência de calor por condução através de geometrias compostas (planas, cilíndricas e esféricas) é mais facilmente analisada utilizando o conceito de resistências térmicas. Três exemplos, um para cada geometria, são apresentados e formulados nesse tópico. As soluções são obtidas com o auxílio do MAPLE.

### 6.1-PAREDE PLANA COMPOSTA

Uma janela de painel duplo, conforme a Fig. (9a), consiste em duas placas de vidro com espessura de 6 mm cada separadas por um espaço de ar com 3 mm de espessura. Já uma janela de painel triplo, conforme a Fig. (9b), consiste em três placas de vidro com espessura de 6 mm cada separadas por dois espaços de ar com 3 mm de espessura cada. Ambos os sistemas devem ser avaliados para instalação em uma sala

que está a uma temperatura de 20 °C e um ambiente externo que está a uma temperatura de -10 °C. O coeficiente de transferência de calor por convecção natural na superfície interna de ambos os modelos de janela é estimado como sendo 12 W/(m².K). O coeficiente de transferência de calor por convecção associado com o ambiente externo varia com a velocidade do vento, sendo estimado como variando entre 10 a 100 W/(m².K). Compare a taxa de perda de calor para cada tipo de janela como uma função do coeficiente de transferência de calor externo para uma área superficial de 0,4 m². A condutividade térmica do espaço de ar é igual a 0,0245 W/(m.K) e a condutividade térmica do vidro é igual a 1,4 W/(m.K).

Denotando a resistência térmica do arranjo com parede dupla por  $R_{t,2}$  e a resistência térmica do arranjo com parede tripla por  $R_{t,3}$ , pode-se escrever que:

$$R_{t,2} = \frac{1}{h_i A} + \frac{L_v}{k_v A} + \frac{L_{ar}}{k_{ar} A} + \frac{L_v}{k_v A} + \frac{1}{h_e A} = \frac{1}{h_i A} + \frac{2L_v}{k_v A} + \frac{L_{ar}}{k_{ar} A} + \frac{1}{h_e A} \quad (131)$$

$$R_{t,3} = \frac{1}{h_i A} + \frac{L_v}{k_v A} + \frac{L_{ar}}{k_{ar} A} + \frac{L_v}{k_v A} + \frac{L_{ar}}{k_{ar} A} + \frac{L_v}{k_v A} + \frac{1}{h_e A} = \frac{1}{h_i A} + \frac{3L_v}{k_v A} + \frac{2L_{ar}}{k_{ar} A} + \frac{1}{h_e A} \quad (132)$$

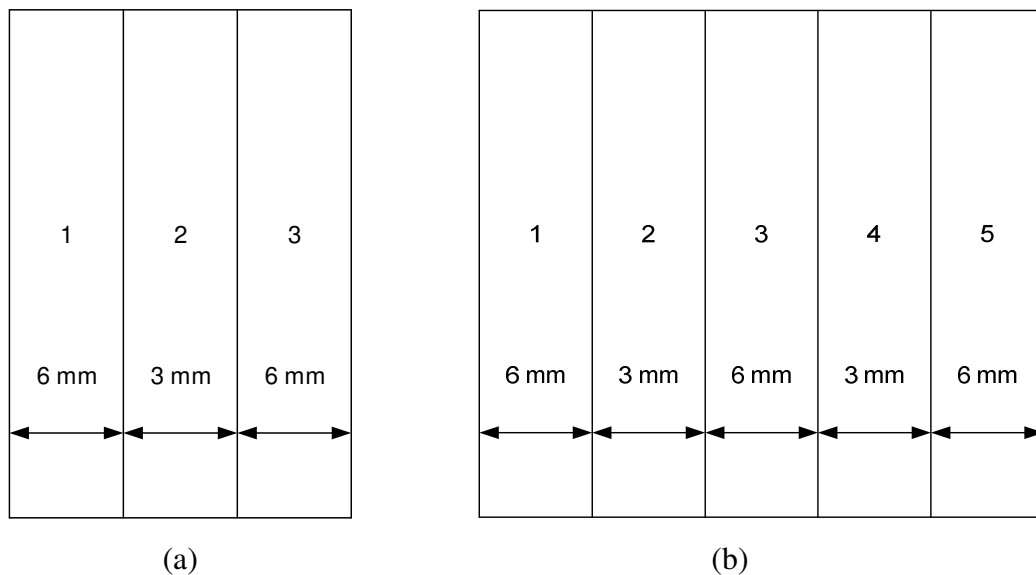


Figura 9 – Configuração plana composta, janela de parede dupla e parede tripla.

Denotando a taxa de transferência de calor através da janela dupla por  $q_2$  e a taxa de transferência de calor através da janela tripla por  $q_3$ , e utilizando a analogia entre a lei de Fourier e a lei de Ohm, pode-se escrever que:

$$q_2 = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,e}}{\frac{1}{h_i A} + \frac{2L_v}{k_v A} + \frac{L_{ar}}{k_{ar} A} + \frac{1}{h_e A}} \quad (133)$$

$$q_3 = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,e}}{\frac{1}{h_i A} + \frac{3L_v}{k_v A} + \frac{2L_{ar}}{k_{ar} A} + \frac{1}{h_e A}} \quad (134)$$

O comportamento da taxa de transferência de calor para os dois arranjos de janela em função da variação do coeficiente de transferência de calor externo pode ser facilmente determinado utilizando o MAPLE, cuja rotina de cálculos está mostrada no arquivo MAPLE6.mw. Os resultados mostrados do MAPLE6.mw indicam que a janela de painel triplo é mais efetiva na redução da taxa de transferência de calor quando comparada com a janela de painel duplo. Isso é devido ao aumento da resistência térmica total pelo terceiro painel e pelo segundo espaço de ar. Para  $h_e = 10 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K})$ , a redução na taxa de calor pela janela tripla quando comparada com a janela dupla é de 28,7%. Esse valor aumenta para 36,1% quando  $h_e = 100 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K})$ .

Entretanto, conforme  $h_e$  aumenta, ou seja, com o aumento do coeficiente de transferência de calor externo, as curvas de taxa de perda de calor tendem a se estabilizar, indicando que a influência de  $h_e$  na taxa de perda de calor é consideravelmente reduzida para altos valores de  $h_e$ . Isso é particularmente verdade para a janela de painel triplo.

## 6.2-SISTEMA CILÍNDRICO COMPOSTO

Um duto metálico, conforme mostrado na Fig. (10), é aquecido pelo envelopamento de um aquecedor elétrico delgado em torno de sua superfície externa. O duto tem 1 m de comprimento, 20 mm de raio interno e 30 mm de raio externo. A superfície interna do duto está mantida a uma temperatura de 15 °C, enquanto a superfície externa do duto está exposta ao ar ambiente a 10 °C com um coeficiente de transferência de calor de 80 W/(m<sup>2</sup>.K). A potência elétrica requerida para manter o aquecedor a 30 °C depende da condutividade térmica do duto,  $k$ , e da resistência térmica

de contato entre o aquecedor elétrico delgado e a superfície externa do duto,  $R_{t,c}$ . O objetivo desse problema é estudar como a variação da condutividade térmica do duto e da resistência térmica de contato afetam a taxa de calor para o duto e a potência elétrica requerida. Assuma que  $25 \leq k \leq 200 \text{ W/(m.K)}$  e que  $0,01 \leq R_{t,c} \leq 0,05 \text{ K/W}$ .

A resistência térmica  $R_{t,i}$  para o lado do duto é composta pela resistência térmica de contato e pela resistência térmica de condução da parede cilíndrica, ou seja:

$$R_{t,i} = R_{t,c} + \frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi Lk} \quad (135)$$

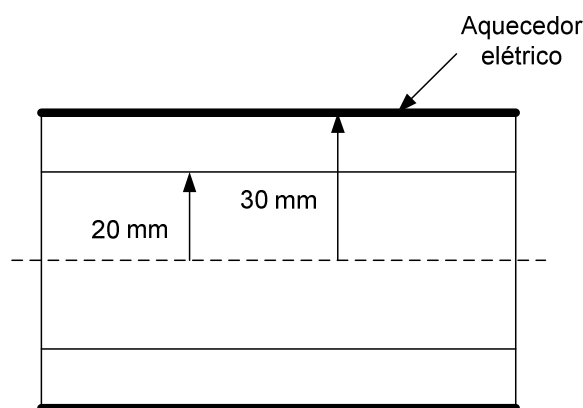


Figura 10 – Casca cilíndrica com aquecedor elétrico delgado.

Já no lado externo do duto a resistência térmica  $R_{t,e}$  é a de convecção da superfície exposta do duto para o ar ambiente, ou seja:

$$R_{t,e} = \frac{1}{2\pi r_e Lh} \quad (136)$$

A taxa de transferência de calor para o duto é então calculada como:

$$q_i = \frac{T_{\text{aquecedor}} - T_i}{R_{t,i}} = \frac{T_{\text{aquecedor}} - T_i}{R_{t,c} + \frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi Lk}} \quad (137)$$

Já a taxa de transferência de calor do duto para o meio externo é calculada como:

$$q_e = \frac{T_{aquecedor} - T_{\infty}}{R_{t,e}} = \frac{T_{aquecedor} - T_{\infty}}{\frac{1}{2\pi_e Lh}} \quad (138)$$

A potência elétrica requerida é calculada como sendo:

$$P_{elétrica} = q_i + q_e = \frac{T_{aquecedor} - T_i}{R_{t,c} + \frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi Lk}} + \frac{T_{aquecedor} - T_{\infty}}{\frac{1}{2\pi_e Lh}} \quad (139)$$

O comportamento da taxa de transferência de calor para o duto cilíndrico em função da variação da condutividade térmica do duto para várias resistências térmicas de contato pode ser determinado utilizando o MAPLE, cuja rotina de cálculos está mostrada no arquivo MAPLE7.mw. De acordo com os resultados mostrados no MAPLE7.mw, a taxa de transferência de calor aumenta com o aumento da condutividade térmica do duto e diminui com o aumento da resistência térmica de contato. Além disso, a potência elétrica requerida aumenta com o aumento da condutividade térmica do duto e diminui com o aumento da resistência térmica de contato. Mais ainda, a potência elétrica requerida é maior que a taxa de calor fornecida ao duto devido à taxa de calor perdida para o meio externo por convecção.

### 6.3-SISTEMA ESFÉRICO COMPOSTO

Um tanque esférico composto consiste em uma casca interna de chumbo e uma casca externa de aço inoxidável, conforme mostrado na Fig. (11), que deve ser projetado para armazenar material radioativo com uma capacidade de remover calor a uma taxa de 32.725 W. A superfície externa do tanque é resfriada por uma corrente de água a 10 °C. O controle da vazão de água permite que o coeficiente de transferência de calor externo fique na faixa de 100 a 1000 W/(m<sup>2</sup>.K). O raio interno e o raio externo da casca de chumbo são 0,25 m e 0,30 m, respectivamente. O raio externo da casca de aço inoxidável pode variar entre 0,30 m e 0,50 m. Deseja-se investigar como a máxima temperatura do chumbo, que ocorre na superfície interna de sua casca, é afetada por

variações no coeficiente convectivo externo e pelo raio externo da casca de aço inoxidável.

Deseja-se conhecer também qual o mínimo valor de  $h$  que deve ser mantido na superfície externa da casca de aço inoxidável com espessura 0,05 m para garantir que a máxima temperatura na casca de chumbo não ultrapasse 220 °C. Considere que as condutividades térmicas do chumbo e do aço inoxidável são 35 e 15 W/(m.K), respectivamente. A resistência térmica para esse problema consiste na resistência térmica de condução nas duas cascas esféricas e a de convecção da superfície externa da casca de aço inoxidável para a água, ou seja:

$$R_t = \frac{1}{4\pi k_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi k_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{1}{4\pi r_3^2 h} \quad (140)$$

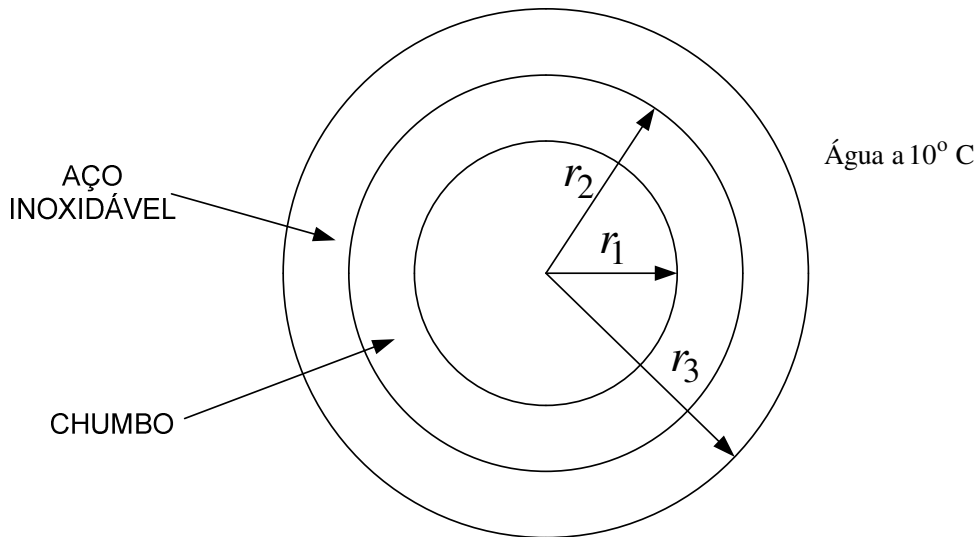


Figura 11 – Casca esférica composta.

A taxa de transferência de calor da casca de chumbo (superfície interna a  $T_i$ ) para o escoamento de água é então calculada como:

$$q = \frac{T_i - T_\infty}{R_t} = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{1}{4\pi k_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi k_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{1}{4\pi r_3^2 h}} \quad (141)$$

Para estudar o comportamento da máxima temperatura do chumbo, que ocorre na superfície interna de sua casca, ou seja, quando  $T_i = T_{\max}$ , pode-se reescrever a Eq. (141) na seguinte forma:

$$T_{\max} = T_{\infty} + q \left[ \frac{1}{4\pi k_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi k_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{1}{4\pi r_3^2 h} \right] \quad (142)$$

O MAPLE pode então ser utilizado para analisar o comportamento de  $T_{\max}$  em função das variações de  $h$  e  $r_3$ , cuja rotina de cálculos está mostrada no arquivo MAPLE8.mw. De acordo com os resultados do MAPLE8.mw, para um raio  $r_3$  especificado,  $T_{\max}$  diminui com o aumento do coeficiente de transferência de calor (a taxa de calor por convecção aumenta). O menor valor de  $T_{\max}$  ocorre quando a casca de aço inoxidável é totalmente removida ( $r_3 = r_2 = 0,3\text{ m}$ ). Entretanto, para o sistema operar com segurança, uma mínima espessura de aço inoxidável é desejável. Para uma casca de aço inoxidável de 0,05 m de espessura,  $r_3 = 0,35\text{ m}$ , pode-se utilizar o MAPLE para determinar qual o mínimo valor de  $h$  para que a máxima temperatura no chumbo não ultrapasse os 220 °C, obtendo-se o valor de 273,5 W/(m<sup>2</sup>.K).

## 7-GERAÇÃO DE CALOR UNIFORME

Nos tópicos anteriores, analisamos problemas de condução nos quais a distribuição de temperaturas em um meio foi determinada somente pelas condições nas suas fronteiras. Agora queremos considerar o efeito adicional na distribuição de temperaturas de processos que podem ocorrer no interior do meio. Em particular, desejamos analisar situações nas quais energia térmica está sendo gerada devido à conversão de outra forma de energia.

Um processo comum de geração de energia térmica envolve a conversão de energia elétrica em energia térmica em um meio que conduz corrente elétrica (aquecimento ôhmico, resistivo ou de Joule). A taxa na qual energia é gerada em função da passagem de uma corrente  $I$  através de um meio com resistência elétrica  $R_e$  é:

$$\dot{E}_g = I^2 R_e \quad (143)$$

Se esta taxa de geração de energia (W) ocorrer uniformemente ao longo de todo o meio com volume  $V$ , a taxa volumétrica de geração de energia (W/m<sup>3</sup>) é, então:

$$\dot{q} = \frac{\dot{E}_g}{V} = \frac{I^2 R_e}{V} \quad (144)$$

A geração de energia também pode ocorrer como um resultado da desaceleração e absorção de nêutrons no elemento combustível de um reator nuclear ou de reações químicas exotérmicas que ocorrem em um meio. Reações endotérmicas apresentam, obviamente, o efeito inverso (um sumidouro de energia térmica), convertendo energia térmica em energia de ligações químicas. Finalmente, uma conversão de energia eletromagnética em energia térmica pode ocorrer devido à absorção de radiação no interior do meio. Esse processo ocorre, por exemplo, quando raios gama são absorvidos em componentes externos de reatores nucleares (revestimento, blindagens térmicas, vasos de pressão, etc.), ou quando radiação visível é absorvida em um meio semitransparente.

### 7.1-A PAREDE PLANA

Considere a parede plana da Fig. (12) na qual há geração de calor uniforme denotada por  $\dot{q}$ . A parede tem espessura  $L$  e condutividade térmica constante  $k$ . A face esquerda da parede em  $x=0$  é resfriada por um fluido com temperatura  $T_{\infty,1}$  e coeficiente de transferência de calor  $h_1$ . A face direita da parede em  $x=L$  é resfriada por um fluido com temperatura  $T_{\infty,2}$  e coeficiente de transferência de calor  $h_2$ . Nas superfícies em  $x=0$  e  $x=L$  as temperaturas, desconhecidas, são denotadas respectivamente por  $T_{s,1}$  e  $T_{s,2}$ .

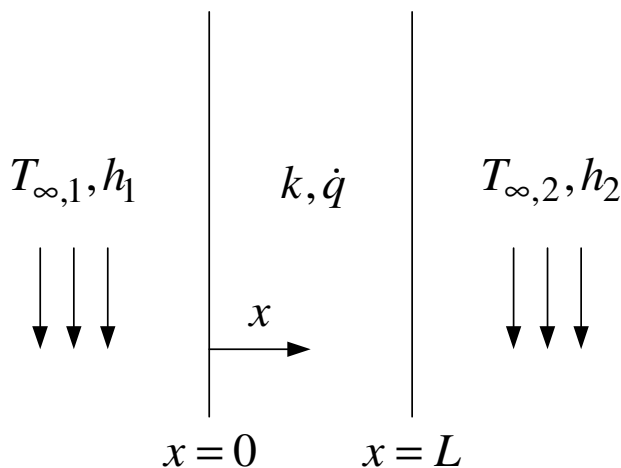


Figura 12 – Parede plana com geração de calor uniforme.

A equação diferencial para esse problema é escrita como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (145)$$

As condições de contorno são escritas como:

$$k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = h_1 [T(x=0) - T_{\infty,1}] \quad (146)$$

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h_2 [T(x=L) - T_{\infty,2}] \quad (147)$$

Expressões para a distribuição de temperaturas, fluxo de calor em ambas as faces e fluxo de calor total podem ser obtidas analiticamente através da solução da Eq. (145) por dupla integração em  $x$  e obtenção das constantes de integração pelas Eqs. (146-147). Nesse exemplo a solução completa será feita utilizando o MAPLE, cuja rotina de cálculos está mostrada no arquivo MAPLE9.mw. Após isso, como um exemplo numérico, é plotada a distribuição de temperatura na placa, são calculadas as temperaturas superficiais, é calculada a posição de máxima temperatura e o valor desta temperatura. Os seguintes dados foram assumidos:  $\dot{q} = 3 \times 10^6 \text{ W/m}^3$ ,  $L = 0,1 \text{ m}$ ,  $h_1 = 400 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$ ,  $T_{\infty,1} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $h_2 = 200 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$  e  $T_{\infty,2} = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ .

## 7.2-CASCA CILÍNDRICA COMPOSTA

Uma casca cilíndrica com duas camadas é composta por dois materiais conforme mostrado na Fig. (13). A casca interna tem condutividade térmica  $k_1$  e possui geração de energia volumétrica a uma taxa  $\dot{q}_1$ . A casca externa tem condutividade térmica  $k_2$  e possui geração de energia volumétrica a uma taxa  $\dot{q}_2$ . A superfície em  $r_1$  é resfriada por um refrigerante com temperatura  $T_\infty$  e coeficiente de transferência de calor  $h$ . A superfície externa em  $r_3$  está isolada. As equações diferenciais para esse problema são escritas como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_1}{dr} \right) + \frac{\dot{q}_1}{k_1} = 0 \quad (148)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_2}{dr} \right) + \frac{\dot{q}_2}{k_2} = 0 \quad (149)$$

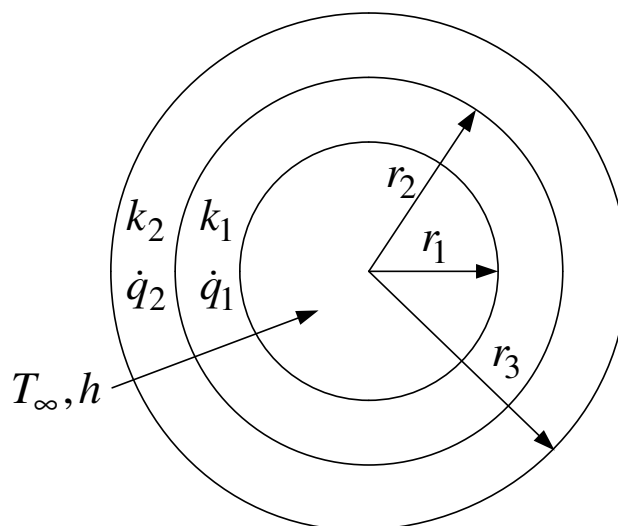


Figura 13 – Casca cilíndrica composta com geração de energia volumétrica uniforme.

As condições de contorno são escritas como:

$$k_1 \left. \frac{dT_1}{dr} \right|_{r=r_1} = h[T_1(r=r_1) - T_\infty] \quad (150)$$

$$T_1(r = r_2) = T_2(r = r_2) \quad (151)$$

$$k_1 \left. \frac{dT_1}{dr} \right|_{r=r_2} = k_2 \left. \frac{dT_2}{dr} \right|_{r=r_2} \quad (152)$$

$$\left. \frac{dT_2}{dr} \right|_{r=r_3} = 0 \quad (153)$$

Expressões para a distribuição de temperaturas em ambas as cascas cilíndricas podem ser obtidas analiticamente através da solução das Eqs. (148-149) por dupla integração em  $r$  e obtenção das constantes de integração pelas Eqs. (150-153). Nesse exemplo a solução completa será feita utilizando o MAPLE, cuja rotina de cálculos está mostrada no arquivo MAPLE10.mw. Após isso, como um exemplo numérico, são calculadas as temperaturas na superfície interna, na interface e na superfície externa. Os seguintes dados foram assumidos:  $r_1 = 0,02$  m,  $r_2 = 0,04$  m,  $r_3 = 0,06$  m,  $\dot{q}_1 = 5 \times 10^4$  W/m<sup>3</sup>,  $\dot{q}_2 = 2 \times 10^5$  W/m<sup>3</sup>,  $L = 1,0$  m,  $h = 400$  W/(m<sup>2</sup>.K),  $T_\infty = 20$  °C,  $k_1 = 20$  (W/m.K) e  $k_2 = 10$  W/(m.K).

### 7.3-A ESFERA MACIÇA

Considere a parede plana, o cilindro longo e a esfera mostrados esquematicamente, todos com o mesmo comprimento característico  $a$ , mesma condutividade térmica  $k$  e mesma taxa volumétrica de geração de energia uniforme  $\dot{q}$ , conforme a Fig. (14). É de interesse prático selecionar a geometria preferível para uso como um elemento combustível nuclear em função da diferença de temperaturas entre o centro e a superfície da geometria de interesse. Para isso, pode-se representar a temperatura adimensional em regime estacionário em função do comprimento característico adimensional para cada geometria. Nas hipóteses de condução unidimensional em regime permanente, condutividade térmica constante, taxa volumétrica de geração de energia uniforme e parede plana estacionária, a equação de condução em coordenadas retangulares é escrita na seguinte forma:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (154)$$

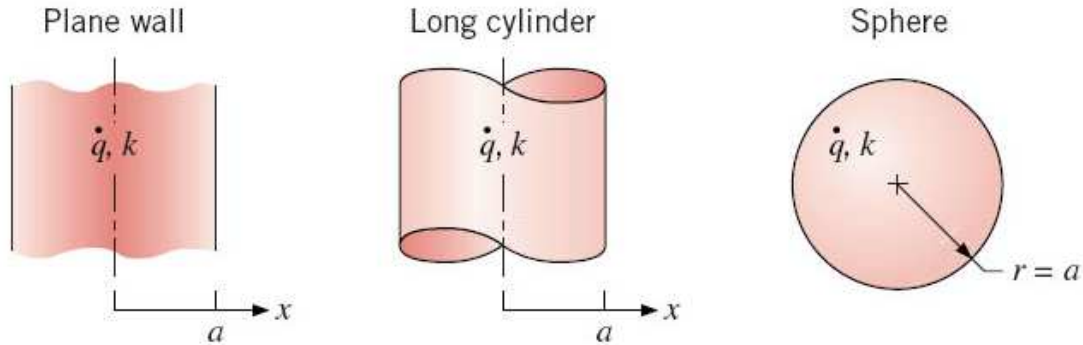


Figura 14 – Geometrias com mesmo comprimento característico  $a$ .

Admitindo que a temperatura na superfície na parede plana seja conhecida, as condições de contorno são escritas como:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (155)$$

$$T(x=a) = T_s \quad (156)$$

A solução da Eq. (154) é obtida por dupla integração em  $x$ , cujos resultados são:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}x}{k} + C_1 \quad (157)$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}x^2}{2k} + C_1x + C_2 \quad (158)$$

Utilizando as condições de contorno e a solução da equação diferencial, obtêm-se as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$ , ou seja:

$$C_1 = 0 \quad (159)$$

$$C_2 = T_s + \frac{\dot{q}a^2}{2k} \quad (160)$$

Substituindo as constantes de integração na solução da equação diferencial e rearranjando, obtém-se a distribuição de temperaturas na parede plana:

$$T(x) = T_s - \frac{\dot{q}x^2}{2k} + \frac{\dot{q}a^2}{2k} \quad (161)$$

A Eq. (161) pode ser rearranjada na forma adimensional como:

$$\frac{T(x) - T_s}{\dot{q}a^2/2k} = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad (162)$$

Mantendo as hipóteses simplificadoras, a equação de condução em coordenadas cilíndricas é escrita na seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (163)$$

Admitindo que a temperatura na superfície do cilindro longo seja conhecida, as condições de contorno são escritas como:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (164)$$

$$T(r = a) = T_s \quad (165)$$

A solução da Eq. (163) é obtida por dupla integração  $r$ , cujos resultados são:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{C_1}{r} \quad (166)$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2 \quad (167)$$

Utilizando as condições de contorno e a solução da equação diferencial, obtém-se as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$ , ou seja:

$$C_1 = 0 \quad (168)$$

$$C_2 = T_s + \frac{\dot{q}a^2}{4k} \quad (169)$$

Substituindo as constantes de integração na solução da equação diferencial e rearranjando, obtém-se a distribuição de temperaturas no cilindro longo:

$$T(r) = T_s - \frac{\dot{q}r^2}{4k} + \frac{\dot{q}a^2}{4k} \quad (170)$$

A Eq. (170) pode ser rearranjada na forma adimensional como:

$$\frac{T(r) - T_s}{\dot{q}a^2/2k} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (171)$$

Mantendo as hipóteses simplificadoras, a equação de condução em coordenadas esféricas é escrita na seguinte forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (172)$$

Admitindo que a temperatura na superfície da esfera seja conhecida, as condições de contorno são escritas como:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (173)$$

$$T(r=a)=T_s \quad (174)$$

A solução da Eq. (172) é obtida por dupla integração em  $r$ , cujos resultados são:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{3k} + C_1 r^{-2} \quad (175)$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (176)$$

Utilizando as condições de contorno e a solução da equação diferencial, obtém-se as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$ , ou seja:

$$C_1 = 0 \quad (177)$$

$$C_2 = T_s + \frac{\dot{q}a^2}{6k} \quad (178)$$

Substituindo as constantes de integração na solução da equação diferencial e reorganizando, obtém-se a distribuição de temperaturas na esfera:

$$T(r) = T_s - \frac{\dot{q}r^2}{6k} + \frac{\dot{q}a^2}{6k} \quad (179)$$

A Eq. (179) pode ser reorganizada na forma adimensional como:

$$\frac{T(r)-T_s}{\dot{q}a^2/2k} = \frac{1}{3} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (180)$$

As Eqs. (162, 171 e 180) podem ser plotadas em um mesmo gráfico em função de um comprimento adimensional para  $x$  ou  $r$  variando de 0 a  $a$ . Os resultados podem ser visualizados na Fig. (15). Conforme a Fig. (15), a esfera tem a menor diferença de

temperaturas entre o centro e a superfície, ou seja,  $T(0) - T(a)$ . Um parâmetro de controle para essa análise é a relação volume/área superficial da geometria, ou seja,  $V/A_s$ , que serve como controle da taxa de geração e da taxa de calor. Para cada geometria tem-se que:

$$\text{PAREDE PLANA: } \frac{V}{A_s} = \frac{a(1 \times 1)}{(1 \times 1)} = a$$

$$\text{CILINDRO: } \frac{V}{A_s} = \frac{\pi a^2 \times 1}{2\pi a \times 1} = \frac{a}{2}$$

$$\text{ESFERA: } \frac{V}{A_s} = \frac{4\pi a^3/3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

Nota-se que quanto menor a relação  $V/A_s$ , menor a diferença de temperaturas  $T(0) - T(a)$ . Para a utilização como elemento combustível nuclear, a geometria esférica é preferida, pois a esfera irá operar com uma menor temperatura.

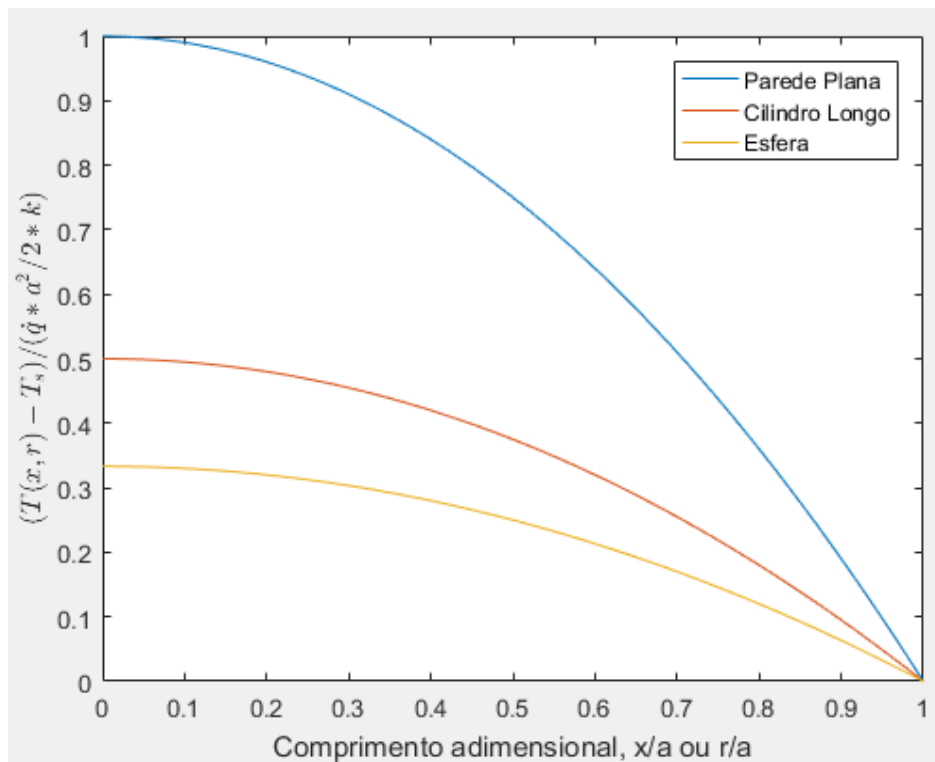
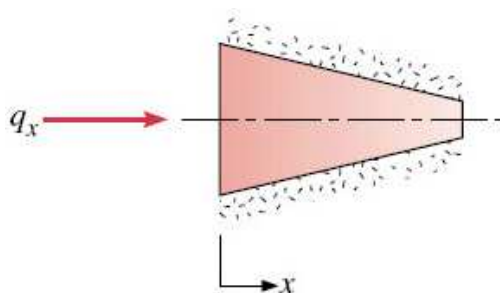


Figura 15 – Distribuição adimensional de temperaturas.

## 8-EXERCÍCIOS PROPOSTOS

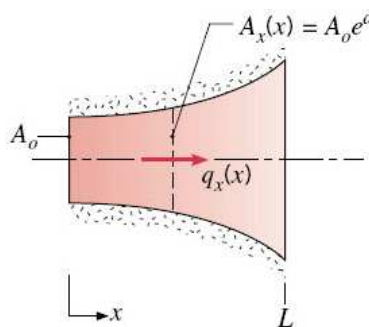
1) Considere condução de calor unidimensional, em regime permanente, através da geometria simétrica mostrada na figura abaixo. Supondo que não há geração interna de calor, desenvolva uma expressão para a condutividade térmica  $k(x)$  para as seguintes condições:  $A(x) = (1 - x)$ ,  $T(x) = 300(1 - 2x - x^3)$ , e  $q = 6000$  W, onde  $A$  está em metros quadrados,  $T$  em Kelvins e  $x$  em metros.



2) Condução de calor unidimensional, em regime permanente, ocorre em uma barra de condutividade térmica constante  $k$  e cuja área da seção transversal varia conforme a relação  $A_x(x) = A_0 e^{ax}$ , na qual  $A_0$  e  $a$  são constantes. A superfície lateral da barra encontra-se isolada termicamente.

a) Escreva uma expressão para a taxa de condução de calor,  $q_x(x)$ . Use esta expressão para determinar a distribuição de temperaturas  $T(x)$  e esboce, qualitativamente, a distribuição para  $T(0) > T(L)$ .

b) Agora, considere condições nas quais há geração de energia térmica no interior da barra, a uma taxa volumétrica  $\dot{q} = \dot{q}_0 \exp(-ax)$ , na qual  $\dot{q}_0$  é uma constante. Obtenha uma expressão para  $q_x(x)$ , quando a face esquerda da barra ( $x = 0$ ) se encontra isolada termicamente.



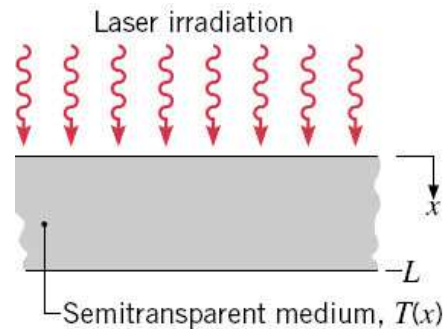
3) Em uma parede plana com espessura  $2L=40\text{mm}$  e condutividade térmica  $k=5\text{ W/(m.K)}$  há geração de calor uniforme a uma taxa  $\dot{q}$ , enquanto transferência de calor por convecção ocorre em suas duas superfícies ( $x=-L, +L$ ), cada uma exposta a um fluido com temperatura  $T_\infty=20^\circ\text{C}$ . Em condições de regime permanente, a distribuição de temperaturas no interior da parede tem a forma  $T(x)=a+bx+cx^2$ , onde  $a=82,0^\circ\text{C}$ ,  $b=-210^\circ\text{C/m}$ ,  $c=-2\times 10^4^\circ\text{C/m}^2$  e  $x$  está em metros. A origem da coordenada  $x$  encontra-se no plano central da parede.

- Esboce a distribuição de temperaturas e identifique características físicas significativas.
- Qual é a taxa volumétrica de geração de calor  $\dot{q}$  no interior da parede?
- Determine os fluxos térmicos nas superfícies,  $q_x''(-L)$  e  $q_x''(+L)$ . Como esses fluxos estão relacionados com a taxa de geração de calor?
- Quais são os coeficientes de transferência de calor por convecção nas superfícies  $x=-L$  e  $x=+L$ ?
- Obtenha uma expressão para a distribuição de fluxos térmicos,  $q_x''(x)$ . O fluxo térmico é nulo em algum local? Explique as características significativas desta distribuição.
- Se a fonte de geração térmica for subitamente desativada ( $\dot{q}=0$ ), qual é a taxa de variação da energia acumulada na parede neste instante?
- Com  $\dot{q}=0$ , qual temperatura de parede será atingida após um longo período de tempo? Que quantidade de energia tem que ser removida da parede pelo fluido, por unidade de área da parede ( $\text{J/m}^2$ ), para ela atingir esse estado? A densidade e o calor específico do material da parede são  $2600\text{ kg/m}^3$  e  $800\text{ J/(kg.K)}$ , respectivamente.

4) A distribuição de temperaturas, em regime permanente, em um material semitransparente, com condutividade térmica  $k$  e espessura  $L$ , exposto à irradiação laser é descrita como:

$$T(x) = -\frac{A}{ka^2}e^{-ax} + Bx + C$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $a$  são constantes conhecidas. Nessa situação, a absorção de radiação no material é manifestada por um termo de geração de calor distribuída,  $\dot{q}(x)$ .

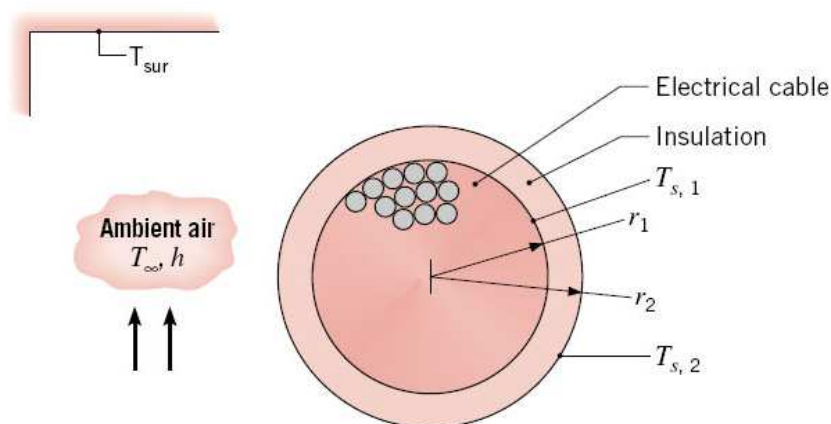


a) Obtenha expressões para os fluxos de calor por condução nas superfícies superior e inferior.

b) Deduza uma expressão para  $\dot{q}(x)$ .

c). Desenvolva uma expressão para a taxa na qual a radiação é absorvida em todo material, por unidade de área superficial. Expresse o seu resultado em termos das constantes conhecidas para a distribuição de temperaturas, da condutividade térmica do material e de sua espessura.

5) Um cabo elétrico, de raio  $r_1$  e condutividade térmica  $k_c$ , encontra-se coberto por uma camada isolante cuja superfície externa possui raio  $r_2$  e troca calor por convecção e radiação com o ar circundante e a vizinhança, respectivamente. Quando uma corrente elétrica passa pelo cabo, há geração de energia térmica em seu interior a uma taxa volumétrica  $\dot{q}$ .



a) Escreva as formas da equação de condução térmica, em regime permanente, para o isolamento e para o cabo. Verifique se essas equações são satisfeitas pelas seguintes distribuições de temperaturas:

$$\text{Isolamento térmico: } T(r) = T_{s,2} + (T_{s,1} - T_{s,2}) \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}$$

$$\text{Cabo: } T(r) = T_{s,1} + \frac{\dot{q} r_1^2}{4k_c} \left( 1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right)$$

Esboce a distribuição de temperaturas,  $T(r)$ , no cabo e no isolante, identificando as principais características.

b) Utilizando a lei de Fourier, mostre que a taxa de transferência de calor por condução, por unidade de comprimento, através do isolamento pode ser representada por

$$\dot{q}_r = \frac{2\pi k_i (T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln(r_2/r_1)}$$

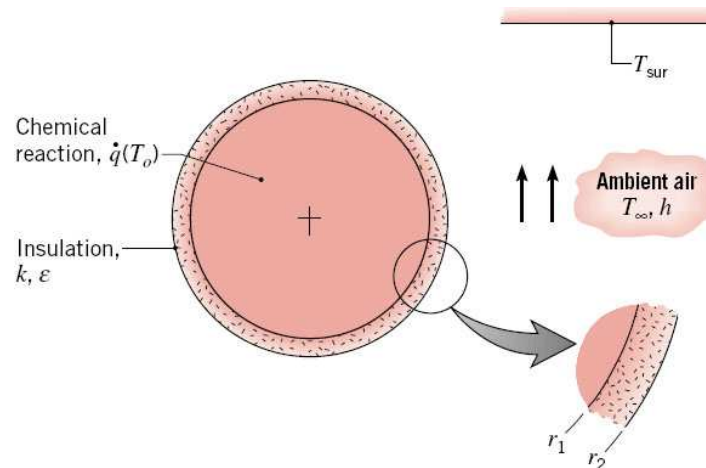
Usando um balanço de energia em uma superfície de controle envolvendo o cabo, obtenha uma expressão alternativa para  $\dot{q}_r$ , escrevendo seu resultado em termos de  $\dot{q}$  e  $r_1$ .

c) Fazendo um balanço de energia em uma superfície de controle colocada ao redor da superfície externa da camada isolante, obtenha uma expressão na qual  $T_{s,2}$  possa ser determinada como uma função de  $\dot{q}$ ,  $r_1$ ,  $h$ ,  $T_\infty$ ,  $\varepsilon$  e  $T_{viz}$ .

d) Considere condições nas quais uma corrente elétrica de 250 A atravessa um cabo cuja resistência elétrica por unidade de comprimento é de  $R'_e = 0,005 \, \Omega/\text{m}$ , com um raio  $r_1 = 15 \text{ mm}$  e condutividade térmica  $k_c = 200 \text{ W}/(\text{m.K})$ . Para  $k_i = 0,15 \text{ W}/(\text{m.K})$ ,  $r_2 = 15,5 \text{ mm}$ ,  $h = 25 \text{ W}/\text{m}^2.\text{K}$ ,  $\varepsilon = 0,9$ ,  $T_\infty = 25^\circ\text{C}$  e  $T_{viz} = 35^\circ\text{C}$ , calcule as temperaturas superficiais,  $T_{s,1}$  e  $T_{s,2}$ , bem como a temperatura  $T_0$  na linha de centro do cabo.

e) Mantendo todas as demais condições, calcule e represente graficamente  $T_0$ ,  $T_{s,1}$  e  $T_{s,2}$  como uma função de  $r_2$ , para  $15,5 \leq r_2 \leq 20,0 \text{ mm}$ .

6) Uma mistura quimicamente reativa é armazenada em um recipiente esférico com paredes finas, de raio  $r_1 = 200$  mm. Uma reação exotérmica gera calor a uma taxa volumétrica uniforme e dependente da temperatura na forma  $\dot{q} = \dot{q}_0 \exp(-A/T_0)$ , onde  $\dot{q}_0 = 5000$  W/m<sup>3</sup>,  $A = 75$  K e  $T_0$  é a temperatura em Kelvins. O recipiente é envolto por uma camada de material isolante que possui raio externo  $r_2$ , condutividade térmica  $k$  e emissividade  $\varepsilon$ . A superfície externa do isolamento troca calor por convecção e radiação com o ar adjacente e uma grande vizinhança, respectivamente.



a) Escreva a forma do estado permanente da equação de condução térmica para o isolante. Verifique se essa equação é satisfeita pela seguinte distribuição de temperaturas:

$$T(r) = T_{s,1} - (T_{s,1} - T_{s,2}) \left[ \frac{1 - (r_1/r)}{1 - (r_2/r_1)} \right]$$

Esboce a distribuição de temperaturas,  $T(r)$ , identificando as suas principais características.

b) Utilizando a lei de Fourier, mostre que a taxa de transferência de calor por condução através do isolamento pode ser representada por:

$$q_r = \frac{4\pi k (T_{s,1} - T_{s,2})}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

Fazendo um balanço de energia em uma superfície de controle envolvendo o recipiente, obtenha uma expressão alternativa para  $q_r$  expressando o seu resultado em termos de  $\dot{q}$  e  $r_1$ .

c) Fazendo um balanço de energia em uma superfície de controle coincidente com a superfície externa da camada de isolamento, obtenha uma expressão na qual  $T_{s,2}$  possa ser determinada em função de  $\dot{q}$ ,  $r_1$ ,  $h$ ,  $T_\infty$ ,  $\varepsilon$  e  $T_{viz}$ .

d) O engenheiro de processos deseja manter a temperatura no reator em  $T(0)=T(r_1)=95^\circ\text{C}$  em condições nas quais  $k=0,05\text{ W/(m.K)}$ ,  $r_2=208\text{ mm}$ ,  $h=5\text{ W/(m}^2\text{.K)}$ ,  $\varepsilon=0,9$ ,  $T_\infty=25^\circ\text{C}$  e  $T_{viz}=35^\circ\text{C}$ . Qual é a temperaturas real do reator e a temperatura da superfície externa do isolamento térmico,  $T_{s,2}$ ?

e) Calcule e represente graficamente a variação de  $T_{s,2}$  em função de  $r_2$  para  $201 \leq r \leq 210\text{ mm}$ . O engenheiro está preocupado com eventuais acidentes por queimadura que possam ocorrer com o pessoal que entrar em contato com a superfície exposta do isolamento térmico. O aumento da espessura da camada de isolante térmico é uma solução prática para manter  $T_{s,2} \leq 45^\circ\text{C}$ ? Que outro parâmetro poderia ser alterado para reduzir o valor de  $T_{s,2}$ ?

7) Uma parede plana, que tem um de seus lados ( $x=0$ ) termicamente isolado, está inicialmente a uma temperatura uniforme  $T_i$ , quando sua superfície exposta em  $x=L$  tem a sua temperatura subitamente elevada para  $T_s$ .

a) Verifique se a equação a seguir satisfaz à equação de condução e às condições de contorno:

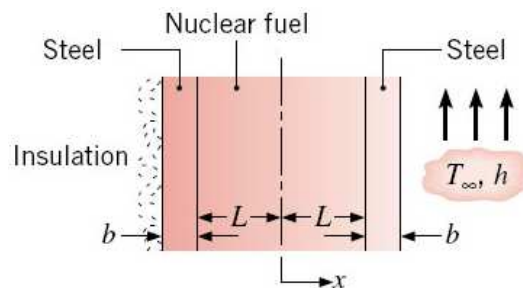
$$\frac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s} = C_1 \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} \frac{\alpha t}{L^2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

na qual  $C_1$  é uma constante e  $\alpha$  é a difusividade térmica.

b) Esboce a distribuição de temperaturas  $T(x)$  em  $t=0$ , em  $t \rightarrow \infty$  e em um instante de tempo intermediário. Esboce a variação com o tempo do fluxo térmico em  $x=L$ ,  $q_L''(t)$ .

c) Qual o efeito de  $\alpha$  na resposta térmica do material a uma mudança na temperatura da superfície?

8) Um elemento de combustível nuclear, com espessura  $2L$ , é coberto com um revestimento de aço com espessura  $b$ . O calor gerado no interior do combustível nuclear, a uma taxa  $\dot{q}$ , é removido por um fluido a  $T_\infty$ , que se encontra em contato com uma das superfícies e é caracterizado por um coeficiente convectivo  $h$ . A outra superfície encontra-se isolada termicamente. O combustível e o aço possuem condutividades térmicas  $k_c$  e  $k_a$ , respectivamente.



a) Obtenha uma equação para a distribuição de temperaturas  $T(x)$  no combustível nuclear. Expresse seus resultados em termos de  $\dot{q}$ ,  $k_c$ ,  $L$ ,  $b$ ,  $k_a$ ,  $h$  e  $T_\infty$ .

b) Esboce a distribuição de temperaturas para o sistema inteiro.

9) A superfície exposta ( $x = 0$ ) de uma parede plana, com condutividade térmica  $k$ , está sujeita à radiação de micro-ondas, que causa um aquecimento volumétrico que varia conforme a seguinte expressão:

$$\dot{q}(x) = \dot{q}_0 \left( 1 - \frac{x}{L} \right)$$

onde  $\dot{q}_0$  ( $\text{W/m}^3$ ) é uma constante. A fronteira em  $x = L$  está perfeitamente isolada, enquanto a superfície exposta é mantida a uma temperatura constante  $T_0$ . Determine a distribuição de temperaturas  $T(x)$  em termos de  $x$ ,  $L$ ,  $k$ ,  $\dot{q}_0$  e  $T_0$ .

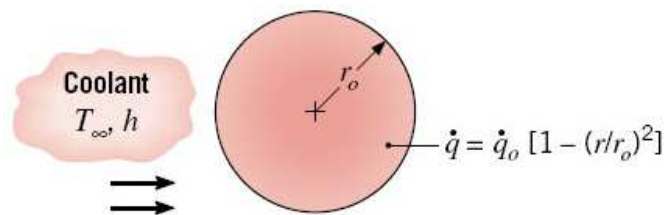
10) Uma janela de quartzo com espessura  $L$  serve como visor em um forno usado para temperar aço. A superfície interna ( $x = 0$ ) da janela é irradiada com um fluxo de calor uniforme  $\dot{q}_0''$  devido à emissão dos gases quentes no interior do forno. Pode-se supor que uma fração,  $\beta$ , dessa radiação é absorvida na superfície interna, enquanto a radiação

restante é parcialmente absorvida ao atravessar o quartzo. A geração volumétrica de calor devido à essa absorção pode ser descrita por uma expressão com a forma:

$$\dot{q}(x) = (1 - \beta)q_0''e^{-\alpha x}$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de absorção do quartzo. Há transferência de calor por convecção na superfície externa da janela ( $x = L$ ) para o ar ambiente, a  $T_\infty$ , e ela é caracterizada por um coeficiente convectivo  $h$ . A convecção e a emissão de radiação na superfície interna podem ser desprezadas, assim como a emissão de radiação da superfície externa. Determine a distribuição de temperaturas no quartzo, representando o seu resultado em termos dos parâmetros definidos anteriormente.

11) Rejeitos radiativos são colocados em um recipiente esférico de parede delgada. Os rejeitos geram energia térmica de forma não uniforme de acordo com a relação  $\dot{q} = \dot{q}_0[1 - (r/r_0)^2]$ , onde  $\dot{q}$  é a taxa local de geração de energia por unidade de volume,  $\dot{q}_0$  é uma constante e  $r_0$  é o raio do recipiente. Condições de regime permanente são mantidas pela imersão do recipiente em um líquido que se encontra a  $T_\infty$  e fornece um coeficiente convectivo  $h$  uniforme.



Determine a distribuição de temperaturas,  $T(r)$ , no interior do recipiente. Expresse o seu resultado em termos de  $\dot{q}_0, r_0, T_\infty, h$  e da condutividade térmica  $k$  dos rejeitos radioativos.

## CAPÍTULO 3

# PROBLEMAS AVANÇADOS DE CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

### 1-INTRODUÇÃO

No Cap. (2), o assunto tratado foi a análise teórica de problemas elementares de condução unidimensional em regime permanente. A análise apresentada foi baseada em hipóteses tais como condutividade térmica do meio constante, geração volumétrica de energia uniforme e aquecimento ou resfriamento de superfícies somente por convecção. Em diversas situações de engenharia, entretanto, essas hipóteses não são válidas ou introduzem erros significativos na previsão do desempenho de sistemas térmicos.

Por exemplo, a região de condução pode ser não-homogênea e, conseqüentemente, a condutividade térmica pode ser dependente da posição. Similarmente, a diferença de temperaturas em uma região de condução pode ser significativa de maneira a invalidar a hipótese de condutividade térmica constante.

Já a hipótese de geração de energia volumétrica uniforme também pode ser restritiva em diversos casos. Por exemplo, quando a barreira de proteção de um reator nuclear é irradiada com raios gama, a geração de energia no interior da barreira decai exponencialmente com a distância a partir da superfície recebendo a radiação, e um modelo de condução de calor mais apropriado deve permitir a inclusão de geração de energia dependente da posição. Nos casos onde a geração de energia é devido à energia elétrica ou reação química interna, a geração de energia torna-se dependente da temperatura.

Em algumas situações de condução unidimensional, pode ser necessário considerar o efeito da radiação térmica aquecendo ou resfriando uma superfície além do efeito da convecção. Isso é particularmente verdade para sistemas operando em

temperaturas elevadas ou quando a fronteira do sistema é resfriada por convecção natural, tornando a contribuição da radiação térmica comparável com a contribuição da convecção natural. O objetivo desse capítulo é analisar os problemas mencionados nos parágrafos anteriores. Serão obtidas a distribuição de temperaturas e também a taxa de calor no meio em análise utilizando técnicas analíticas e também o MAPLE.

## 2-CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL

A condutividade térmica de um meio com condução pode ser dependente da posição, da temperatura ou de ambos. Cada um desses casos será discutido a seguir através de exemplos resolvidos, tanto para uma parede plana quando para uma casca cilíndrica. Os procedimentos de solução para uma casca esférica são similares e detalhes de solução não serão mostrados.

### 2.1-CONDUTIVIDADE TÉRMICA DEPENDENTE DA POSIÇÃO

Considere uma parede plana de espessura  $L$  conforme a Fig. (1), feita de um material cuja condutividade térmica é dependente da posição de acordo com a seguinte expressão:

$$k = k_0(1 + ax^2) \quad (1)$$

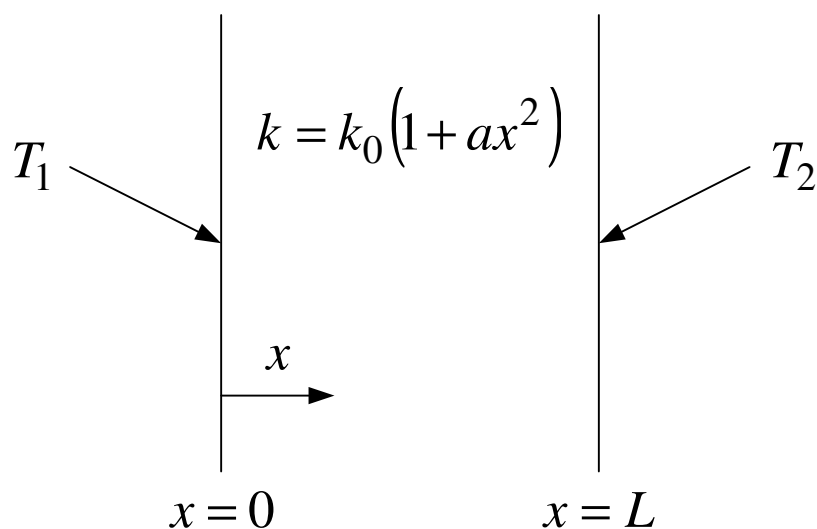


Figura 1 – Parede plana com condutividade térmica dependente da posição.

onde  $a$  é uma constante e  $k_0$  é a condutividade térmica avaliada em  $x=0$ . De acordo com a Fig. (1), não há geração interna de energia e ambas as faces são mantidas à temperaturas conhecidas. Considera-se também que a parede está em regime permanente, está estacionária e que a condução térmica é unidimensional em  $x$ . Assim, a equação de condução de calor e as condições de contorno para esse problema são escritas como:

$$\frac{d}{dx} \left[ k \frac{dT}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[ k_0(1+ax^2) \frac{dT}{dx} \right] = 0 \quad (2)$$

$$T(x=0) = T_1 \quad (3)$$

$$T(x=L) = T_2 \quad (4)$$

A Eq. (2) pode ser integrada duas vezes em  $x$  para a obtenção da distribuição de temperaturas em  $x$ . A primeira integração em  $x$  fornece que:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{C_1}{k_0(1+ax^2)} \quad (5)$$

Já a segunda integração em  $x$  fornece que:

$$T(x) = \frac{C_1}{k_0} \int \frac{dx}{(1+ax^2)} + C_2 = \frac{C_1}{k_0 a} \int \frac{dx}{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + x^2} + C_2 \quad (6)$$

A solução da integral da Eq. (6) pode ser obtida com o auxílio de tabelas de integrais, que, utilizando uma notação geral, tem a seguinte forma:

$$\int \frac{dx}{u^2 + x^2} = \frac{1}{u} \arctan\left(\frac{x}{u}\right) \quad (7)$$

onde  $u$  é uma constante. A constante de integração na Eq. (7) foi suprimida pelo fato de já ter sido incluída na Eq. (6). Comparando a integral da Eq. (6) com a Eq. (7) obtém-se:

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + x^2} = \sqrt{a} \arctan(\sqrt{a}x) \quad (8)$$

Substituindo a Eq. (8) na Eq. (6) e rearranjando obtém-se:

$$T(x) = \frac{C_1}{k_0} \frac{\sqrt{a}}{a} \arctan(\sqrt{a}x) + C_2 \quad (9)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (3) e sabendo que  $\arctan(0) = 0$  obtém-se:

$$T(x=0) = \frac{C_1}{k_0} \frac{\sqrt{a}}{a} \arctan(\sqrt{a}0) + C_2 = T_1 \Rightarrow C_2 = T_1 \quad (10)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (4) e utilizando o resultado indicado pela Eq. (10) obtém-se:

$$T(x=L) = \frac{C_1}{k_0} \frac{\sqrt{a}}{a} \arctan(\sqrt{a}L) + T_1 = T_2 \Rightarrow C_1 = \frac{(T_2 - T_1)k_0 a}{\sqrt{a} \arctan(\sqrt{a}L)} \quad (11)$$

Substituindo as Eqs. (10-11) na Eq. (9) e rearranjando obtém-se:

$$T(x) = T_1 - \frac{\arctan(\sqrt{a}x)(T_1 - T_2)}{\arctan(\sqrt{a}L)} \quad (12)$$

A taxa de calor é então calculada pela lei de Fourier em conjunto com as Eqs. (5) e (11):

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = -k_0(1+ax^2)A \frac{C_1}{k_0(1+ax^2)} = -AC_1 = \frac{A(T_1 - T_2)k_0\sqrt{a}}{\arctan(\sqrt{a}L)} \quad (13)$$

O modelo anterior foi implementado no MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE1.mw. Deve ser notado que para  $a=0$ , tem-se que  $k=k_0$  e as Eqs. (12-13) se reduzem às expressões padrões para a distribuição de temperaturas e taxa de calor para uma parede plana com condutividade térmica constante e as mesma hipóteses mostradas na Fig. (1). Entretanto, a simples substituição  $a=0$  nas Eqs. (12-13) implica em indeterminações do tipo 0/0, que podem ser contornadas utilizando a regra de L'Hospital, escrita abaixo para duas funções genéricas  $f(a)$  e  $g(a)$ :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{d[f(a)]/da}{d[g(a)]/da} \quad (14)$$

Utilizando a Eq. (14) na Eq. (12) obtém-se:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{d[\arctan(\sqrt{a}x)]/da}{d[\arctan(\sqrt{a}L)]/da} \quad (15)$$

Com o auxílio de tabelas de derivadas e utilizando uma notação geral, pode-se calcular as derivadas da Eq. (15) pela seguinte expressão:

$$y = \arctan(u) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+u^2} \quad (16)$$

Aplicando a Eq. (16) nas derivadas da Eq. (15) obtém-se:

$$\arctan(\sqrt{a}x)' = \frac{1}{2} \frac{a^{-1/2}x}{(1+ax^2)} \quad (17)$$

$$\arctan(\sqrt{a}L)' = \frac{1}{2} \frac{a^{-1/2}L}{(1+aL^2)} \quad (18)$$

Substituindo as Eqs. (17-18) na Eq. (15) obtém-se:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{d[\arctan(\sqrt{a}x)]/da}{d[\arctan(\sqrt{a}L)]/da} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \frac{a^{-1/2}x}{(1+ax^2)}}{\frac{1}{2} \frac{a^{-1/2}L}{(1+aL^2)}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{x(1+aL^2)}{L(1+ax^2)} = \frac{x}{L} \quad (19)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (19) na Eq. (12) obtém-se:

$$T(x) = T_1 - \frac{x}{L}(T_1 - T_2) \quad (20)$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para a taxa de calor. Utilizando a Eq. (14) na Eq. (13) obtém-se:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{d[\sqrt{a}]/da}{d[\arctan(\sqrt{a}L)]/da} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}a^{-1/2}}{\frac{1}{2} \frac{a^{-1/2}L}{(1+aL^2)}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1+aL^2}{L} = \frac{1}{L} \quad (21)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (21) na Eq. (13) obtém-se:

$$q_x = \frac{k_0 A (T_1 - T_2)}{L} \quad (22)$$

Outro exemplo é o caso de uma casca cilíndrica com raios interno e externo iguais a  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, conforme a Fig. (2), feita de um material cuja condutividade térmica é dependente da posição de acordo com a seguinte expressão:

$$k = a(1+br) \quad (23)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes. De acordo com a Fig. (2), não há geração interna de energia e ambas as superfícies interna e externa são mantidas a temperaturas conhecidas. Considera-se também que a casca cilíndrica está em regime permanente, está estacionária e que a condução térmica é unidimensional em  $r$ . Assim, a equação de condução e as condições de contorno para esse problema são escritas como:

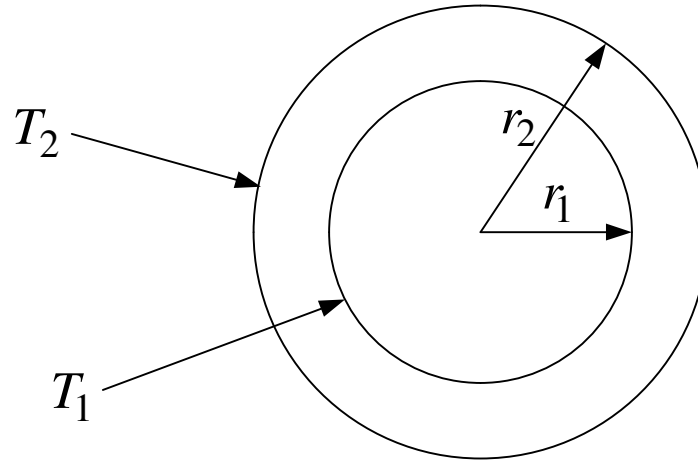


Figura 2 – Casca cilíndrica com condutividade térmica dependente da posição.

$$\frac{d}{dr} \left[ kr \frac{dT}{dr} \right] = \frac{d}{dr} \left[ a(1 + br)r \frac{dT}{dr} \right] = 0 \quad (24)$$

$$T(r = r_1) = T_1 \quad (25)$$

$$T(r = r_2) = T_2 \quad (26)$$

A Eq. (24) pode ser integrada duas vezes em  $r$  para a obtenção da distribuição de temperaturas. A primeira integração em  $r$  fornece que:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{a(1 + br)r} \quad (27)$$

Já a segunda integração em  $r$  fornece que:

$$T(r) = \frac{C_1}{a} \int \frac{dr}{r + br^2} + C_2 \quad (28)$$

A solução da integral da Eq. (28) pode ser obtida com o auxílio de tabelas de integrais, que, utilizando uma notação geral, tem a seguinte forma:

$$\int \frac{dx}{x + ux^2} = \ln x - \ln(ux + 1) \quad (29)$$

onde  $u$  é uma constante. A constante de integração na Eq. (29) foi suprimida pelo fato de já ter sido incluída na Eq. (28). Comparando a integral da Eq. (28) com a Eq. (29) obtém-se:

$$\int \frac{dr}{r + br^2} = \ln r - \ln(br + 1) \quad (30)$$

Substituindo a Eq. (30) na Eq. (28) e rearranjando obtém-se:

$$T(r) = \frac{C_1}{a} [\ln r - \ln(br + 1)] + C_2 \quad (31)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (25) obtém-se:

$$T(r = r_1) = \frac{C_1}{a} [\ln r_1 - \ln(br_1 + 1)] + C_2 = T_1 \quad (32)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (26) obtém-se:

$$T(r = r_2) = \frac{C_1}{a} [\ln r_2 - \ln(br_2 + 1)] + C_2 = T_2 \quad (33)$$

Resolvendo o sistema de duas equações e duas incógnitas representado pelas Eqs. (32-33) obtêm-se expressões para  $C_1$  e  $C_2$ , escritas como:

$$C_1 = \frac{a(T_2 - T_1)}{\ln r_2 - \ln r_1 - \ln(br_2 + 1) + \ln(br_1 + 1)} \quad (34)$$

$$C_2 = \frac{T_1 \ln r_2 - T_1 \ln(br_2 + 1) - T_2 \ln r_1 + T_2 \ln(br_1 + 1)}{\ln r_2 - \ln r_1 - \ln(br_2 + 1) + \ln(br_1 + 1)} \quad (35)$$

Substituindo as Eqs. (34-35) na Eq. (31) e rearranjando obtém-se:

$$T(r) = \frac{(T_2 - T_1)[\ln r - \ln(br + 1)]}{\ln r_2 - \ln r_1 - \ln(br_2 + 1) + \ln(br_1 + 1)} + \frac{T_1 \ln r_2 - T_1 \ln(br_2 + 1) - T_2 \ln r_1 + T_2 \ln(br_1 + 1)}{\ln r_2 - \ln r_1 - \ln(br_2 + 1) + \ln(br_1 + 1)} \quad (36)$$

A taxa de calor é então calculada pela lei de Fourier em conjunto com as Eqs. (23) e (27):

$$q_r = -kA_r \frac{dT}{dr} = -a(1 + br)(2\pi r L) \frac{C_1}{a(1 + br)r} = -2\pi L C_1 = \frac{2\pi L a (T_1 - T_2)}{\ln r_2 - \ln r_1 - \ln(br_2 + 1) + \ln(br_1 + 1)} \quad (37)$$

O modelo anterior foi implementado no MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE2.mw. Deve ser notado que para  $b=0$ , tem-se que  $k=a$  e as Eqs. (36-37) se reduzem às expressões padrões para a distribuição de temperaturas e a taxa de calor para uma casca cilíndrica com condutividade térmica constante e as mesma hipóteses mostradas na Fig. (2), ou seja:

$$T(r) = \frac{T_1 \ln r_2 - T_2 \ln r_1 + (T_2 - T_1) \ln r}{\ln(r_2/r_1)} \quad (38)$$

$$q_r = \frac{2\pi L a (T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)} \quad (39)$$

## 2.2-CONDUTIVIDADE TÉRMICA DEPENDENTE DA TEMPERATURA

Considera-se uma parede plana de espessura  $L$  conforme Fig. (3), feita de um material cuja condutividade térmica é dependente da temperatura de acordo com a seguinte expressão:

$$k = k_0(1 + \beta T) \quad (40)$$

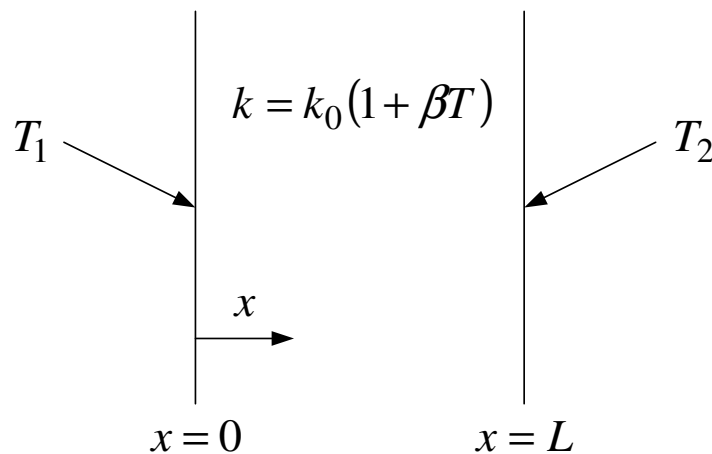


Figura 3 – Parede plana com condutividade térmica dependente da temperatura.

onde  $\beta$  é uma constante e  $k_0$  é a condutividade térmica avaliada em uma temperatura de referência. De acordo com a Fig. (3), não há geração interna de energia e ambas as faces são mantidas a temperaturas conhecidas. Considera-se também que a parede está em regime permanente, está estacionária e que a condução térmica é unidimensional em  $x$ . Assim, a equação de condução e as condições de contorno para esse problema são escritas como:

$$\frac{d}{dx} \left[ k \frac{dT}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[ k_0(1 + \beta T) \frac{dT}{dx} \right] = 0 \quad (41)$$

$$T(x=0) = T_1 \quad (42)$$

$$T(x=L) = T_2 \quad (43)$$

A Eq. (41) pode ser integrada duas vezes em  $x$  para a obtenção da distribuição de temperaturas. A primeira integração em  $x$  fornece que:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{C_1}{k_0(1 + \beta T)} \quad (44)$$

A Eq. (44) é de variáveis separáveis e a segunda integração em  $x$  fornece que:

$$k_0 T + \frac{k_0 \beta T^2}{2} = C_1 x + C_2 \quad (45)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (42) obtém-se:

$$k_0 T_1 + \frac{k_0 \beta T_1^2}{2} = C_2 \quad (46)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (43) e utilizando o resultado indicado pela Eq. (46) obtém-se

$$k_0 T_2 + \frac{k_0 \beta T_2^2}{2} = C_1 L + k_0 T_1 + \frac{k_0 \beta T_1^2}{2} \quad (47)$$

donde obtém-se uma expressão para a constante  $C_1$  :

$$C_1 = \frac{2k_0 T_2 + k_0 \beta T_2^2 - 2k_0 T_1 - k_0 \beta T_1^2}{2L} \quad (48)$$

Substituindo as Eqs. (46) e (48) na Eq. (45) obtém-se:

$$k_0 T + \frac{k_0 \beta T^2}{2} = \frac{x}{2L} (2k_0 T_2 + k_0 \beta T_2^2 - 2k_0 T_1 - k_0 \beta T_1^2) + k_0 T_1 + \frac{k_0 \beta T_1^2}{2} \quad (49)$$

Multiplicando a Eq. (49) por  $(2/k_0)$  e rearranjando obtém-se:

$$\beta T^2 + 2T - \left[ \frac{x}{L} (2T_2 + \beta T_2^2 - 2T_1 - \beta T_1^2) + 2T_1 + \beta T_1^2 \right] = 0 \quad (50)$$

A Eq. (50) é uma equação do segundo grau que pode ser resolvida utilizando a fórmula de Bhaskara, ou seja:

$$T(x) = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\beta \left[ \frac{x}{L} (2T_2 + \beta T_2^2 - 2T_1 - \beta T_1^2) + 2T_1 + \beta T_1^2 \right]}}{2\beta} \quad (51)$$

Das duas soluções da Eq. (51) deve-se escolher aquela que fornece um valor positivo para  $T(x)$ . Rearranjando a Eq. (51) obtém-se então:

$$T(x) = \frac{1}{2} \frac{-2 \pm 2 \sqrt{1 - \frac{\beta(2T_1 + \beta T_1^2 - 2T_2 - \beta T_2^2)x}{L} + 2\beta \left( T_1 + \frac{\beta T_1^2}{2} \right)}}{\beta} \quad (52)$$

A taxa de calor é obtida pela aplicação da lei de Fourier em conjunto com as Eqs. (44) e (48), ou seja:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = -k_0(1 + \beta T)A \frac{C_1}{k_0(1 + \beta T)} = -AC_1 = \frac{Ak_0}{2L} (\beta T_1^2 + 2T_1 - \beta T_2^2 - 2T_2) \quad (53)$$

O modelo anterior foi implementado no MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE3.mw. Outro exemplo é o caso de uma casca cilíndrica com raios interno e externo iguais a  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, conforme a Fig. (4), feita de um material cuja condutividade térmica é dependente da temperatura de acordo com a seguinte expressão:

$$k = k_0(1 + \beta T) \quad (54)$$

onde  $\beta$  é uma constante e  $k_0$  é a condutividade térmica avaliada em uma temperatura de referência. De acordo com a Fig. (4), não há geração interna de energia e ambas as superfícies interna e externa são mantidas a temperaturas conhecidas. Considera-se também que a casca cilíndrica está em regime permanente, está estacionária e que a condução térmica é unidimensional em  $r$ . Assim, a equação de condução e as condições de contorno para esse problema são escritas como:

$$\frac{d}{dr} \left[ kr \frac{dT}{dr} \right] = \frac{d}{dr} \left[ k_0(1 + \beta T)r \frac{dT}{dr} \right] = 0 \quad (55)$$

$$T(r = r_1) = T_1 \quad (56)$$

$$T(r = r_2) = T_2 \quad (57)$$

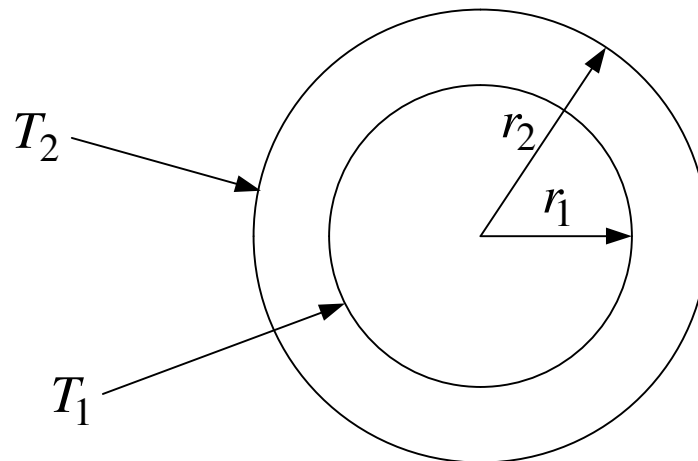


Figura 4 – Casca cilíndrica com condutividade térmica dependente da temperatura.

A Eq. (55) pode ser integrada duas vezes em  $r$  para a obtenção da distribuição de temperaturas. A primeira integração em  $r$  fornece que:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{k_0(1 + \beta T)r} \quad (58)$$

A Eq. (58) é de variáveis separáveis e a segunda integração em  $r$  fornece que:

$$k_0 T + \frac{k_0 \beta T^2}{2} = C_1 \ln r + C_2 \quad (59)$$

Substituindo a Eq. (56) na Eq. (59) obtém-se:

$$k_0 T_1 + \frac{k_0 \beta T_1^2}{2} = C_1 \ln r_1 + C_2 \quad (60)$$

Substituindo a Eq. (57) na Eq. (59) obtém-se:

$$k_0 T_2 + \frac{k_0 \beta T_2^2}{2} = C_1 \ln r_2 + C_2 \quad (61)$$

Resolvendo o sistema de duas equações e duas incógnitas representado pelas Eqs. (60-61) obtêm-se expressões para  $C_1$  e  $C_2$ , escritas como:

$$C_1 = \frac{k_0(T_2 - T_1) + (k_0 \beta / 2)(T_2^2 - T_1^2)}{\ln(r_2 / r_1)} \quad (62)$$

$$C_2 = k_0 T_2 + \frac{k_0 \beta T_2^2}{2} - \left[ \frac{k_0(T_2 - T_1) + (k_0 \beta / 2)(T_2^2 - T_1^2)}{\ln(r_2 / r_1)} \right] \ln r_2 \quad (63)$$

Substituindo as Eqs. (62-63) na Eq. (59) e rearranjando obtém-se:

$$\begin{aligned} k_0 T + \frac{k_0 \beta T^2}{2} = & \left[ \frac{k_0(T_2 - T_1) + (k_0 \beta / 2)(T_2^2 - T_1^2)}{\ln(r_2 / r_1)} \right] \ln r \\ & + k_0 T_2 + \frac{k_0 \beta T_2^2}{2} - \left[ \frac{k_0(T_2 - T_1) + (k_0 \beta / 2)(T_2^2 - T_1^2)}{\ln(r_2 / r_1)} \right] \ln r_2 \quad (64) \end{aligned}$$

Multiplicando a Eq. (64) por  $(2/k_0)$  e rearranjando obtém-se:

$$\beta T^2 + 2T - \left\{ 2 \left[ \frac{(T_2 - T_1) + (\beta/2)(T_2^2 - T_1^2)}{\ln(r_2/r_1)} \right] \ln(r/r_2) + 2T_2 + \beta T_2^2 \right\} = 0 \quad (65)$$

A Eq. (65) é uma equação do segundo grau que pode ser resolvida utilizando a fórmula de Bhaskara, ou seja:

$$T(r) = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\beta \left\{ 2 \left[ \frac{(T_2 - T_1) + (\beta/2)(T_2^2 - T_1^2)}{\ln(r_2/r_1)} \right] \ln(r/r_2) + 2T_2 + \beta T_2^2 \right\}}}{2\beta} \quad (66)$$

Das duas soluções da Eq. (66) deve-se escolher aquela que fornece um valor positivo para  $T(r)$ . Rearranjando a Eq. (66) obtém-se então:

$$T(r) = \frac{1}{2} \frac{-2 \pm 2 \sqrt{1 + 2\beta \left[ \frac{(T_2 - T_1) + (\beta/2)(T_2^2 - T_1^2)}{\ln(r_2/r_1)} \right] \ln(r/r_2) + 2\beta \left( T_2 + \frac{\beta T_2^2}{2} \right)}}{\beta} \quad (67)$$

A taxa de calor é obtida pela aplicação da lei de Fourier em conjunto com as Eqs. (54) e (58), ou seja:

$$q_r = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k_0(1 + \beta T)(2\pi r L) \frac{C_1}{k_0(1 + \beta T)r} = -2\pi L C_1 = 2\pi L \left[ \frac{k_0(T_2 - T_1) + (k_0\beta/2)(T_2^2 - T_1^2)}{\ln(r_2/r_1)} \right] \quad (68)$$

O modelo anterior foi implementado no MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE4.mw.

### 3-GERAÇÃO DE ENERGIA NÃO UNIFORME

Conforme citado na introdução, a geração de energia volumétrica em um meio com condução pode depender da posição, da temperatura ou de ambos. Primeiro, será considerado o caso de geração de energia dependente da posição. Em seguida, será considerado o caso de geração de energia dependente da temperatura.

### 3.1-GERAÇÃO DE ENERGIA DEPENDENTE DA POSIÇÃO

Considera-se uma parede plana de espessura  $L$  conforme a Fig. (5), feita de um material cuja condutividade térmica é constante, mas possuindo taxa de geração de energia dependente da posição de acordo com a seguinte expressão:

$$\dot{q}(x) = \dot{q}_0 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad (69)$$

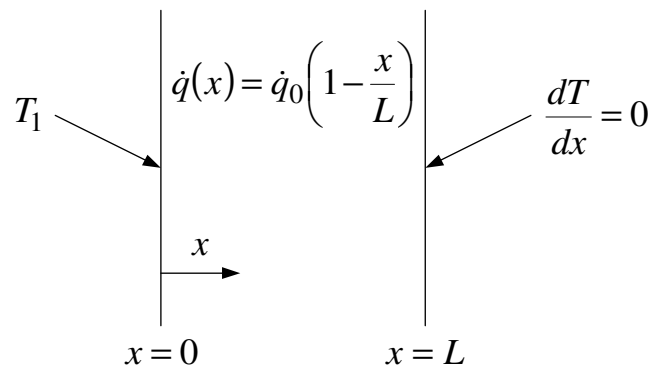


Figura 5 – Parede plana com taxa de geração de energia térmica dependente da posição.

onde  $\dot{q}_0$  é a taxa de geração de energia avaliada em  $x=0$ . De acordo com a Fig. (5), a condutividade térmica é constante, a face a esquerda é mantida à temperatura conhecida e a face direita está isolada termicamente. Considera-se também que a parede está em regime permanente, está estacionária e que a condução térmica é unidimensional em  $x$ . Assim, a equação de condução e as condições de contorno para esse problema são escritas como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}(x)}{k} = 0 \quad (70)$$

$$T(x=0) = T_1 \quad (71)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (72)$$

A Eq. (70) pode ser integrada duas vezes em  $x$  para a obtenção da distribuição de temperaturas. A primeira integração em  $x$  fornece que:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_0 x}{k} + \frac{\dot{q}_0 x^2}{2kL} + C_1 \quad (73)$$

Já a segunda integração em  $x$  fornece que:

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_0 x^2}{2k} + \frac{\dot{q}_0 x^3}{6kL} + C_1 x + C_2 \quad (74)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (71) obtém-se:

$$T(x=0) = -\frac{\dot{q}_0 0^2}{2k} + \frac{\dot{q}_0 0^3}{6kL} + C_1 0 + C_2 = T_1 \Rightarrow C_2 = T_1 \quad (75)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (72) e utilizando o resultado indicado pela Eq. (75) obtém-se:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = -\frac{\dot{q}_0 L}{k} + \frac{\dot{q}_0 L^2}{2kL} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\dot{q}_0 L}{2k} \quad (76)$$

Substituindo as Eqs. (75-76) na Eq. (74) e rearranjando obtém-se:

$$T(x) = \frac{\dot{q}_0}{kL} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2} + \frac{x L^2}{2} \right) + T_1 \quad (77)$$

A taxa de calor é então calculada pela lei de Fourier em conjunto com as Eqs. (73) e (76), ou seja:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = -kA \left( -\frac{\dot{q}_0 x}{k} + \frac{\dot{q}_0 x^2}{2kL} + C_1 \right) = -kA \left( -\frac{\dot{q}_0 x}{k} + \frac{\dot{q}_0 x^2}{2kL} + \frac{\dot{q}_0 L}{2k} \right) = A\dot{q}_0 \left( x - \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{2} \right) \quad (78)$$

O modelo anterior foi implementado no MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE.mw. Outro exemplo é o caso de uma parede plana de espessura  $L$  conforme a Fig. (6), feita de um material cuja condutividade térmica é constante, mas possuindo taxa de geração de energia dependente da posição de acordo com a seguinte expressão:

$$\dot{q}(x) = \dot{q}_0 a (1 - b) e^{-ax} \quad (79)$$

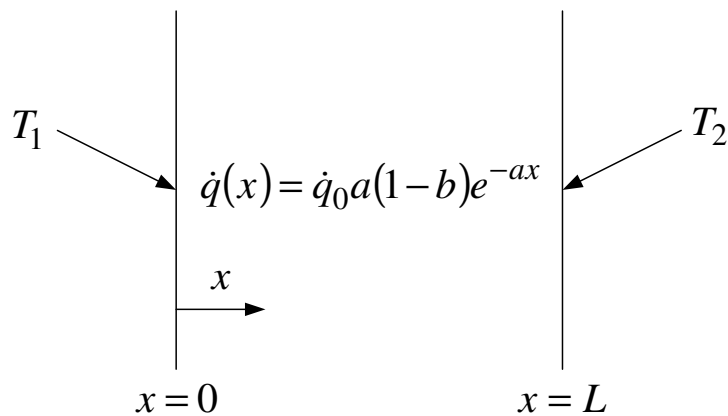


Figura 6 – Parede plana com taxa de geração de energia térmica dependente da posição.

onde  $\dot{q}_0$  é a taxa de geração de energia avaliada em  $x=0$  e  $a$  e  $b$  são constantes. De acordo com a Fig. (6), a condutividade térmica é constante e ambas as faces esquerda e direita são mantidas a temperaturas conhecidas. Considera-se também que a parede está em regime permanente, está estacionária e que a condução térmica é unidimensional em  $x$ . Assim, a equação de condução e as condições de contorno para esse problema são escritas como:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}(x)}{k} = 0 \quad (80)$$

$$T(x=0) = T_1 \quad (81)$$

$$T(x=L) = T_2 \quad (82)$$

A Eq. (80) pode ser integrada duas vezes em  $x$  para a obtenção da distribuição de temperaturas. A primeira integração em  $x$  fornece que:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\dot{q}_0(1-b)e^{-ax}}{k} + C_1 \quad (83)$$

Já a segunda integração em  $x$  fornece que:

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_0(1-b)e^{-ax}}{ak} + C_1x + C_2 \quad (84)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (81) obtém-se:

$$C_2 = \frac{akT_1 + \dot{q}_0(1-b)}{ak} \quad (85)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (82) e utilizando o resultado indicado pela Eq. (85) obtém-se:

$$C_1 = \frac{ak(T_2 - T_1) + \dot{q}_0(1-b)(e^{-aL} - 1)}{akL} \quad (86)$$

Substituindo as Eqs. (85-86) na Eq. (84) e rearranjando obtém-se:

$$T(x) = \left[ \frac{ak(T_2 - T_1) + \dot{q}_0(1-b)(e^{-aL} - 1)}{akL} \right]x + \frac{akT_1 - \dot{q}_0(1-b)(e^{-ax} - 1)}{ak} \quad (87)$$

A taxa de calor é então calculada pela lei de Fourier em conjunto com as Eqs. (83) e (86), ou seja:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = -kA \left[ \frac{\dot{q}_0(1-b)e^{-ax}}{k} + C_1 \right] = -A \left[ \dot{q}_0(1-b)e^{-ax} + \frac{ak(T_2 - T_1) + \dot{q}_0(1-b)(e^{-aL} - 1)}{aL} \right] \quad (88)$$

O modelo anterior foi implementado no MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE6.mw. Outro exemplo é o caso de um cilindro longo maciço de raio  $R$  conforme a Fig. (7), feito de um material cuja condutividade térmica é constante, mas possuindo taxa de geração de energia dependente da posição de acordo com a seguinte expressão:

$$\dot{q}(r) = \dot{q}_0 r \quad (89)$$

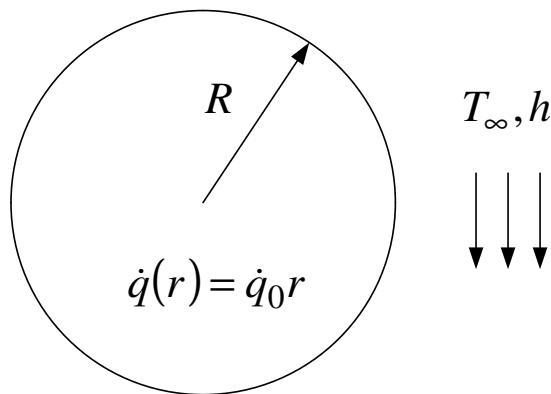


Figura 7 – Cilindro maciço com taxa de geração de energia térmica dependente da posição.

onde  $\dot{q}_0$  é a taxa de geração de energia avaliada em uma temperatura de referência. De acordo com a Fig. (7), a condutividade térmica é constante e o cilindro maciço está sendo resfriado por um fluido com temperatura e coeficiente de transferência de calor conhecidos. Considera-se também que o cilindro maciço está em regime permanente, estacionário e que a condução térmica é unidimensional em  $r$ . Assim, a equação de condução e as condições de contorno para esse problema são escritas como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}(r)}{k} = 0 \quad (90)$$

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (91)$$

$$-k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R} = h[T(r=R) - T_{\infty}] \quad (92)$$

A Eq. (90) pode ser integrada duas vezes em  $r$  para a obtenção da distribuição de temperaturas. A primeira integração em  $r$  fornece que:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_0 r^2}{3k} + \frac{C_1}{r} \quad (93)$$

Já a segunda integração em  $r$  fornece que:

$$T(r) = -\frac{\dot{q}_0 r^3}{9k} + C_1 \ln r + C_2 \quad (94)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (91) obtém-se:

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = -\frac{\dot{q}_0 0^2}{3k} + \frac{C_1}{0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (95)$$

Aplicando a condição de contorno indicada pela Eq. (92) e utilizando o resultado indicado pela Eq. (95) obtém-se:

$$C_2 = \frac{3\dot{q}_0 k R^2 + \dot{q}_0 h R^3 + 9khT_{\infty}}{9kh} \quad (96)$$

Substituindo as Eqs. (95-96) na Eq. (94) e rearranjando obtém-se:

$$T(r) = -\frac{\dot{q}_0 r^3}{9k} + \frac{3\dot{q}_0 k R^2 + \dot{q}_0 h R^3 + 9khT_{\infty}}{9kh} \quad (97)$$

A temperatura na linha de centro do cilindro maciço pode ser calculada substituindo  $r=0$  na Eq. (97), ou seja:

$$T(r=0) = \frac{3\dot{q}_0 k R^2 + \dot{q}_0 h R^3 + 9khT_\infty}{9kh} \quad (98)$$

Já a temperatura na superfície do cilindro maciço pode ser calculada substituindo  $r = R$  na Eq. (97), ou seja:

$$T(r=R) = -\frac{\dot{q}_0 R^3}{9k} + \frac{3\dot{q}_0 k R^2 + \dot{q}_0 h R^3 + 9khT_\infty}{9kh} \quad (99)$$

A taxa de calor é então calculada pela lei de Fourier em conjunto com as Eqs. (93) e (95), ou seja:

$$q_r = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k(2\pi r L) \left( -\frac{\dot{q}_0 r^2}{3k} + \frac{C_1}{r} \right) = \frac{2\pi L \dot{q}_0 r^3}{3} \quad (100)$$

A taxa de calor na superfície do cilindro maciço pode ser calculada substituindo  $r = R$  na Eq. (100), ou seja:

$$q_r(r=R) = \frac{2\pi L \dot{q}_0 R^3}{3} \quad (101)$$

Já a taxa de convecção a partir da superfície do cilindro maciço para o fluido pode ser calculada utilizando a lei do resfriamento de Newton e o resultado da Eq. (99), ou seja:

$$q_{conv} = hA_{sup} [T(r=R) - T_\infty] = h(2\pi RL) \left[ -\frac{\dot{q}_0 R^3}{9k} + \frac{3\dot{q}_0 k R^2 + \dot{q}_0 h R^3 + 9khT_\infty}{9kh} - T_\infty \right] \quad (102)$$

Rearranjando a Eq. (102) obtém-se:

$$q_{conv} = \frac{2\pi L \dot{q}_0 R^3}{3} \quad (103)$$

Deve ser notado que, conforme esperado, as taxas de condução em  $r = R$  e a taxa de convecção da superfície do cilindro maciço para o fluido são iguais, conforme as Eqs. (101) e (103). O modelo anterior foi implementado no MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE7.mw.

### 3.2-GERAÇÃO DE ENERGIA DEPENDENTE DA TEMPERATURA

Considera-se uma parede plana de espessura  $2L$  conforme a Fig. (8), feita de um material cuja condutividade térmica é constante, mas possuindo taxa de geração de energia dependente da temperatura de acordo com a seguinte expressão:

$$\dot{q} = a[1 + b(T - T_s)] \quad (104)$$

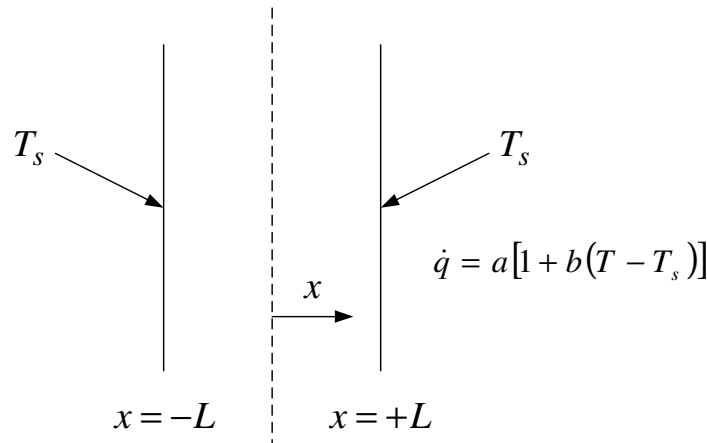


Figura 8 – Parede plana com geração de energia térmica dependente da temperatura.

onde  $a$  e  $b$  são constantes. De acordo com a Fig. (8), ambas as faces são mantidas à mesma temperatura conhecida  $T_s$ , o que indica simetria com relação a  $x=0$ . Considera-se também que a parede está em regime permanente, está estacionária e que a condução térmica é unidimensional em  $x$ . Assim, a equação de condução e as condições de contorno para esse problema são escritas como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}(T)}{k} = 0 \quad (105)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (106)$$

$$T(x=L) = T_s \quad (107)$$

As Eqs. (105-107) podem ser reescritas de maneira mais simplificada através da introdução da variável  $\theta(x) = T(x) - T_s$  de tal forma que  $dT/dx = d\theta/dx$  e  $d^2T/dx^2 = d^2\theta/dx^2$ . Substituindo esses resultados juntamente com a Eq. (104) nas Eqs. (105-107) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{ab}{k}\theta = -\frac{a}{k} \quad (108)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (109)$$

$$\theta(x=L) = 0 \quad (110)$$

A Eq. (108) é uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem, linear, com coeficientes constantes e não-homogênea, cuja solução é composta pela solução homogênea e pela solução particular, conforme mostrado no Apêndice, ou seja:

$$\theta(x) = \theta_H(x) + \theta_P(x) \quad (111)$$

A solução homogênea é função das raízes da equação característica, ou seja:

$$m^2 + \frac{ab}{k} = 0 \Rightarrow m = \pm i\sqrt{\frac{ab}{k}} \quad (112)$$

As raízes da equação característica são conjugados complexos na forma  $s \pm it$  de tal forma que  $s=0$  e  $t=\sqrt{ab/k}$ . Assim, de acordo com o Apêndice, a solução homogênea é escrita na seguinte forma:

$$\theta_H(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}x\right) \quad (113)$$

Já a solução particular da Eq. (108) é dependente do tipo de função mostrada no lado direito dessa equação diferencial, que nesse caso é uma constante. Conforme o Apêndice, pelo método dos coeficientes indeterminados, caso o lado direito da equação diferencial seja uma constante, espera-se que a solução particular dessa equação diferencial também seja uma constante, ou seja:

$$\theta_P(x) = C_3 \quad (114)$$

Como a Eq. (114) é solução, ela deve satisfazer a Eq. (108), ou seja:

$$\frac{d^2\theta_P}{dx^2} + \frac{ab}{k}\theta_P = -\frac{a}{k} \Rightarrow \frac{ab}{k}C_3 = -\frac{a}{k} \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{b} \quad (115)$$

Agrupando as Eqs. (113-114) tem-se então a solução geral da Eq. (108), ou seja:

$$\theta(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}x\right) - \frac{1}{b} \quad (116)$$

A derivada da Eq. (116) com relação a  $x$  tem a seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{dx} = -C_1 \sqrt{\frac{ab}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}x\right) + C_2 \sqrt{\frac{ab}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}x\right) \quad (117)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (109) obtém-se:

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -C_1 \sqrt{\frac{ab}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}0\right) + C_2 \sqrt{\frac{ab}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}0\right) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (118)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (110) e utilizando o resultado da Eq. (118) obtém-se:

$$\theta(x=L) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}L\right) - \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{b \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}L\right)} \quad (119)$$

Substituindo as Eqs. (118-119) na Eq. (116) e retornando a variável original  $T(x)$  obtém-se:

$$T(x) = T_s + \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}x\right)}{b \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}L\right)} - \frac{1}{b} \quad (120)$$

A taxa de calor pode ser calculada utilizando a lei de Fourier em conjunto com as Eqs. (117-119), ou seja:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = -kA \frac{d\theta}{dx} = -kA \left[ -C_1 \sqrt{\frac{ab}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}x\right) \right] = A \sqrt{\frac{ak}{b}} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}x\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}L\right)} \quad (121)$$

O modelo anterior foi implementado no MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE8.mw. Outro caso é um cilindro longo maciço de raio  $R$  e comprimento  $L$  conforme a Fig. (9), feito de um material cuja condutividade térmica é constante, mas possuindo taxa de geração de energia dependente da temperatura de acordo com a seguinte expressão:

$$\dot{q} = a[1 + b(T - T_s)] \quad (122)$$

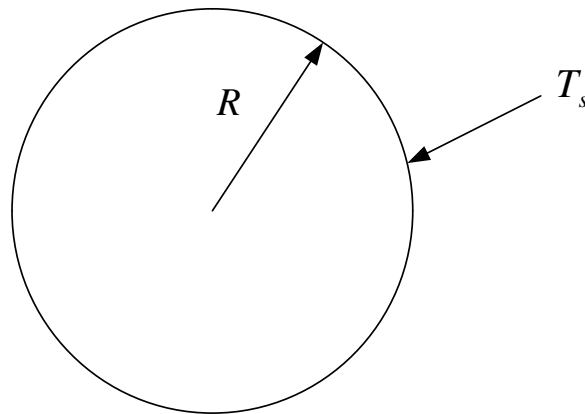


Figura 9 – Cilindro maciço longo com geração de energia térmica dependente da temperatura.

onde  $a$  e  $b$  são constantes. De acordo com a Fig. (9), a superfície externa do cilindro é mantida à temperatura conhecida  $T_s$ . Considera-se também que o cilindro está em regime permanente, está estacionário e que a condução térmica é unidimensional em  $r$ . Assim, a equação de condução e as condições de contorno para esse problema são escritas como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}(T)}{k} = 0 \quad (123)$$

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (124)$$

$$T(r = R) = T_s \quad (125)$$

As Eqs. (123-125) podem ser reescritas de maneira mais simplificada através da introdução da variável  $\theta(r) = T(r) - T_s$  de tal forma que  $dT/dr = d\theta/dr$  e  $d^2T/dr^2 = d^2\theta/dr^2$ . Substituindo esses resultados juntamente com a Eq. (122) nas Eqs. (123-125), fazendo a derivada do produto na Eq. (123) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \frac{ab}{k} \theta = -\frac{a}{k} \quad (126)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (127)$$

$$\theta(r=R)=0 \quad (128)$$

A Eq. (126) é uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem, linear, com coeficientes não-constantes e não-homogênea, cuja solução é composta pela solução homogênea e pela solução particular, conforme mostrado no Apêndice, ou seja:

$$\theta(r) = \theta_H(r) + \theta_P(r) \quad (129)$$

A solução homogênea é obtida a partir da equação geral de Bessel, Eq. (A15) conforme procedimento mostrado Apêndice, ou seja, deve-se inicialmente multiplicar a Eq. (126) na forma homogênea por  $r^2$  e comparar a expressão resultante com a Eq. (15) do Apêndice, convenientemente alterada para as variáveis dependente  $r$  e  $\theta$ , ou seja:

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dr^2} + r \frac{d\theta}{dr} + r^2 \frac{ab}{k} \theta = 0 \quad (130)$$

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dr^2} + [(1-2A)r - 2Br^2] \frac{d\theta}{dr} + [C^2 D^2 r^{2C} + B^2 r^2 - B(1-2A)r + A^2 - C^2 n^2] \theta = 0 \quad (131)$$

Comparando os coeficientes das Eqs. (130-131) obtém-se:

$$(1-2A)r - 2Br^2 = r \quad (132)$$

$$C^2 D^2 r^{2C} + B^2 r^2 - B(1-2A)r + A^2 - C^2 n^2 = r^2 \frac{ab}{k} \quad (133)$$

Das Eqs. (132-133) obtém-se:

$$1-2A=1 \Rightarrow A=0$$

$$-2B=0 \Rightarrow B=0$$

$$C=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 D^2 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^2 = \frac{ab}{k} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{ab}{k}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 n^2 = 0 \Rightarrow n = 0$$

o que se encaixa no CASO 1 do item 3.2 do Apêndice. Dessa forma, a solução homogênea tem a seguinte forma:

$$\theta_H(r) = C_1 J_0 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) + C_2 Y_0 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) \quad (134)$$

Já a solução particular da Eq. (126) é fortemente dependente do tipo de função mostrada no lado direito dessa equação diferencial, que nesse caso é uma constante. Conforme o Apêndice, pelo método dos coeficientes indeterminados, caso o lado direito da equação diferencial seja uma constante, espera-se que a solução particular dessa equação diferencial também seja uma constante, ou seja:

$$\theta_P(r) = C_3 \quad (135)$$

Como a Eq. (135) é solução, ela deve satisfazer a Eq. (126), ou seja:

$$\frac{d^2 \theta_P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_P}{dr} + \frac{ab}{k} \theta_P = -\frac{a}{k} \Rightarrow \frac{ab}{k} C_3 = -\frac{a}{k} \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{b} \quad (136)$$

Agrupando as Eqs. (134-135) tem-se então a solução geral da Eq. (126), ou seja:

$$\theta(r) = C_1 J_0 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) + C_2 Y_0 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) - \frac{1}{b} \quad (137)$$

A derivada da Eq. (137) com relação a  $r$  pode ser obtida com o auxílio da Eq. (A38) e com  $n = 0$ , ou seja:

$$\frac{d\theta}{dr} = -C_1 \sqrt{\frac{ab}{k}} J_1 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) - C_2 \sqrt{\frac{ab}{k}} Y_1 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) \quad (138)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (127) em conjunto com os resultados da Tab. (A.1) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = -C_1 \sqrt{\frac{ab}{k}} \underbrace{J_1 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} 0 \right)}_{=0} - C_2 \sqrt{\frac{ab}{k}} \underbrace{Y_1 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} 0 \right)}_{=-\infty} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (139)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (128) e utilizando o resultado da Eq. (139) obtém-se:

$$\theta(r=R) = C_1 J_0 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} R \right) - \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{b J_0 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} R \right)} \quad (140)$$

Substituindo as Eqs. (139-140) na Eq. (137) e retornando a variável original  $T(r)$  obtém-se:

$$T(r) = T_s + \frac{J_0 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right)}{b J_0 \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} R \right)} - \frac{1}{b} \quad (141)$$

A taxa de calor pode ser calculada utilizando a lei de Fourier em conjunto com as Eqs. (138-140), ou seja:

$$q_r = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL) \frac{d\theta}{dr} = (2\pi rL) \sqrt{\frac{ak}{b}} \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}r\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{ab}{k}}R\right)} \quad (142)$$

O modelo anterior foi implementado no MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE9.mw. Um terceiro caso é uma esfera maciça de raio  $R$  conforme a Fig. (10), feita de um material cuja condutividade térmica é constante, mas possuindo taxa de geração de energia dependente da temperatura de acordo com a seguinte expressão:

$$\dot{q} = a[1 + b(T - T_s)] \quad (143)$$

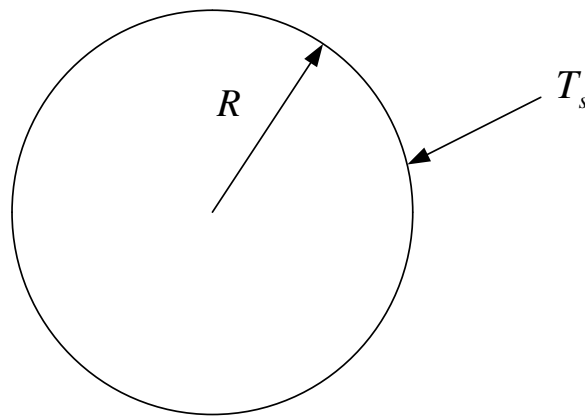


Figura 10 – Esfera maciça com geração de energia térmica dependente da temperatura.

onde  $a$  e  $b$  são constantes. De acordo com a Fig. (10), a superfície externa da esfera é mantida à temperatura conhecida  $T_s$ . Considera-se também que a esfera está em regime permanente, está estacionária e que a condução térmica é unidimensional em  $r$ . Assim, a equação de condução e as condições de contorno para esse problema são escritas como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}(T)}{k} = 0 \quad (144)$$

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (145)$$

$$T(r = R) = T_s \quad (146)$$

As Eqs. (144-146) podem ser reescritas de maneira mais simplificada através da introdução da variável  $\theta(r) = T(r) - T_s$  de tal forma que  $dT/dr = d\theta/dr$  e  $d^2T/dr^2 = d^2\theta/dr^2$ . Substituindo esses resultados juntamente com a Eq. (143) nas Eqs. (144-146), fazendo a derivada do produto na Eq. (144) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} + \frac{ab}{k} \theta = -\frac{a}{k} \quad (147)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (148)$$

$$\theta(r = R) = 0 \quad (149)$$

A Eq. (147) é uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem, linear, com coeficientes não-constantes e não-homogênea, cuja solução é composta pela solução homogênea e pela solução particular, conforme mostrado no Apêndice, ou seja:

$$\theta(r) = \theta_H(r) + \theta_P(r) \quad (150)$$

A solução homogênea é obtida a partir da equação geral de Bessel, Eq. (15) do Apêndice, ou seja, deve-se inicialmente multiplicar a Eq. (147) na forma homogênea por  $r^2$  e comparar a expressão resultante com a Eq. (15), convenientemente alterada para as variáveis dependente  $r$  e  $\theta$ , ou seja:

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dr^2} + 2r \frac{d\theta}{dr} + r^2 \frac{ab}{k} \theta = 0 \quad (151)$$

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dr^2} + [(1 - 2A)r - 2Br^2] \frac{d\theta}{dr} + [C^2 D^2 r^{2C} + B^2 r^2 - B(1 - 2A)r + A^2 - C^2 n^2] \theta = 0 \quad (152)$$

Comparando os coeficientes das Eqs. (151-152) obtém-se:

$$(1-2A)r - 2Br^2 = 2r \quad (153)$$

$$C^2 D^2 r^{2C} + B^2 r^2 - B(1-2A)r + A^2 - C^2 n^2 = r^2 \frac{ab}{k} \quad (154)$$

Das Eqs. (153-154) obtém-se:

$$1-2A=2 \Rightarrow A=-1/2$$

$$-2B=0 \Rightarrow B=0$$

$$C=1$$

$$\underset{=1}{C}^2 D^2 + \underset{=0}{B}^2 = \frac{ab}{k} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{ab}{k}}$$

$$\underset{=-1/2}{A}^2 - \underset{=1}{C}^2 n^2 = 0 \Rightarrow n = 1/2$$

o que se encaixa no CASO 2 do item A.3.2. Dessa forma, a solução homogênea tem a seguinte forma:

$$\theta_H(r) = r^{-1/2} \left[ C_1 J_{1/2} \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) + C_2 J_{-1/2} \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) \right] \quad (155)$$

Já a solução particular da Eq. (147) é fortemente dependente do tipo de função mostrada no lado direito dessa equação diferencial, que nesse caso é uma constante. Conforme o Apêndice, pelo método dos coeficientes indeterminados, caso o lado direito da equação diferencial seja uma constante, espera-se que a solução particular dessa equação diferencial também seja uma constante, ou seja:

$$\theta_p(r) = C_3 \quad (156)$$

Como a Eq. (156) é solução, ela deve satisfazer a Eq. (147), ou seja:

$$\frac{d^2\theta_p}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta_p}{dr} + \frac{ab}{k} \theta_p = -\frac{a}{k} \Rightarrow \frac{ab}{k} C_3 = -\frac{a}{k} \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{b} \quad (157)$$

Agrupando as Eqs. (155-156) tem-se então a solução geral da Eq. (147), ou seja:

$$\theta(r) = r^{-1/2} \left[ C_1 J_{1/2} \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) + C_2 J_{-1/2} \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) \right] - \frac{1}{b} \quad (158)$$

As funções  $J_{1/2} \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right)$  e  $J_{-1/2} \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right)$  podem ser reescritas utilizando as Eqs.

(25-26) do Apêndice, ou seja:

$$J_{1/2} \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}} r}} \sin \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) \quad (159)$$

$$J_{-1/2} \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}} r}} \cos \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) \quad (160)$$

Substituindo as Eqs. (159-160) na Eq. (158) obtém-se:

$$\theta(r) = r^{-1/2} \left[ C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}} r}} \sin \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}} r}} \cos \left( \sqrt{\frac{ab}{k}} r \right) \right] - \frac{1}{b} \quad (161)$$

Rearranjando a Eq. (161) obtém-se:

$$\theta(r) = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}}}} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right)}{r} + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}}}} \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right)}{r} - \frac{1}{b} \quad (162)$$

A derivada da Eq. (162) com relação a  $r$  pode ser obtida na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dr} = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}}}} \left[ \frac{\sqrt{\frac{ab}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right)}{r} - \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right)}{r^2} \right] \\ + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}}}} \left[ -\frac{\sqrt{\frac{ab}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right)}{r} - \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right)}{r^2} \right] \quad (163) \end{aligned}$$

A aplicação direta da condição de contorno dada pela Eq. (148) não é possível devido ao surgimento de uma indeterminação do tipo  $0/0$ . Para contornar esse problema aplica-se a regra de L'Hospital duas vezes na Eq. (163), fornecendo:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dr} = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}}}} \left[ -\frac{ab}{k} \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right) + \frac{ab}{2k} \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right) \right] \\ + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}}}} \left[ -\frac{ab}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right) + \frac{ab}{2k} \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right) \right] \quad (164) \end{aligned}$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (148) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}}}} \left[ -\frac{ab}{k} \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} 0\right) + \frac{ab}{2k} \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} 0\right) \right]$$

$$+ C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}}}} \left[ -\frac{ab}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} 0\right) + \frac{ab}{2k} \cos\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} 0\right) \right] = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (165)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (149) e utilizando o resultado da Eq. (165) obtém-se:

$$\theta(r=R) = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}}}} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} R\right)}{R} - \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{b \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\frac{ab}{k}}}} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} R\right)}{R}} \quad (166)$$

Substituindo as Eqs. (165-166) na Eq. (162) e retornando a variável original  $T(r)$  obtém-se:

$$T(r) = T_s + \frac{R}{b} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right)}{r \sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} R\right)} - \frac{1}{b} \quad (167)$$

A taxa de calor pode ser calculada utilizando a lei de Fourier em conjunto com as Eqs. (164-166), ou seja:

$$q_r = -kA_r \frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2) \frac{d\theta}{dr} = 2\pi r^2 a R \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} r\right)}{\sin\left(\sqrt{\frac{ab}{k}} R\right)} \quad (168)$$

O modelo anterior foi implementado no MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE10.mw.

#### 4-RESFRIAMENTO CONVECTIVO-RADIATIVO DE SÓLIDOS

Considere condução unidimensional em regime permanente em uma parede de espessura  $2L$ , em um cilindro de raio  $r_0$  e em uma esfera de raio  $r_0$ . Existe geração de energia uniforme  $\dot{q}$  conforme mostrado na Fig. (11). A condutividade térmica  $k$  é assumida constante. A superfície externa é resfriada tanto por convecção por um meio a  $T_\infty$  quanto por radiação por uma vizinhança a  $T_{viz}$  de tal maneira que  $T_\infty = T_{viz}$ . Para as três geometrias, a temperatura da superfície é definida como sendo  $T_s$ .

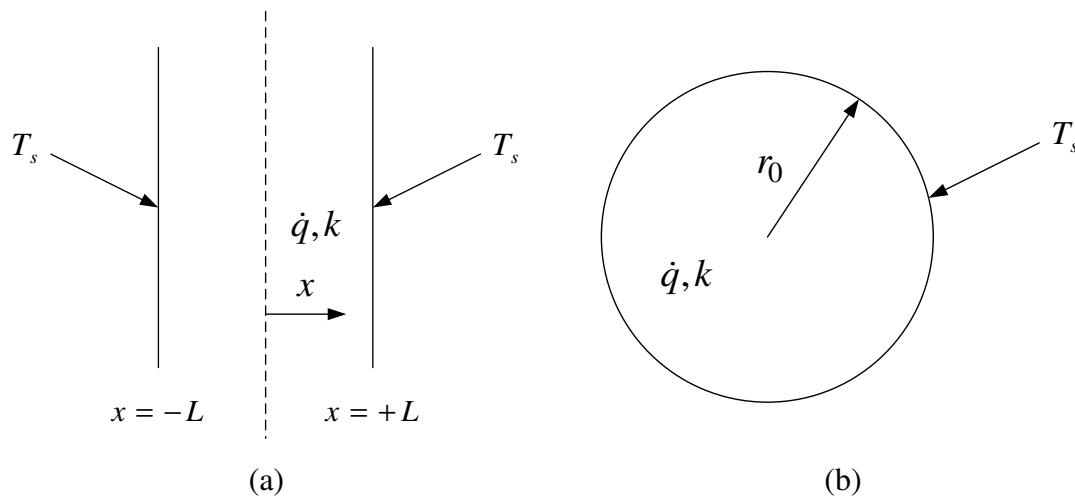


Figura 11 – Configurações para o estudo do resfriamento combinado convectivo-radiativo (a) parede plana e (b) cilindro e esfera maciços.

A equação diferencial e as condições de contorno para a parede plana tem a seguinte forma:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (169)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (170)$$

$$T(x = L) = T_s \quad (171)$$

A equação diferencial e as condições de contorno para o cilindro maciço tem a seguinte forma:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (172)$$

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (173)$$

$$T(r = r_0) = T_s \quad (174)$$

A equação diferencial e as condições de contorno para a esfera maciça tem a seguinte forma:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (175)$$

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (176)$$

$$T(r = r_0) = T_s \quad (177)$$

Um balanço de energia para a parede plana em  $x = L$  fornece que:

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h[T(x=L) - T_\infty] + \varepsilon \sigma [T(x=L)^4 - T_{viz}^4] \quad (178)$$

Já um balanço de energia para o cilindro e para a esfera maciços em  $r = r_0$  fornece que:

$$-k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_0} = h[T(r=r_0) - T_\infty] + \varepsilon \sigma [T(r=r_0)^4 - T_{viz}^4] \quad (179)$$

Definindo as seguintes variáveis adimensionais para o problema da parede plana:

$$X = \frac{x}{L}, \quad \theta = \frac{T}{T_{viz}}, \quad Q = \frac{\dot{q}L^2}{kT_{viz}}, \quad N_1 = \frac{\varepsilon\sigma T_{viz}^3 L}{k}, \quad N_2 = \frac{hL}{k} \quad (180)$$

Pode então reescrever as Eqs. (169-171) na seguinte forma:

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} + Q = 0 \quad (181)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dX} \right|_{X=0} = 0 \quad (182)$$

$$\theta(X=1) = \theta_s = \frac{T_s}{T_{viz}} \quad (183)$$

Definindo as seguintes variáveis adimensionais para o problema do cilindro e esfera maciços:

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad \theta = \frac{T}{T_{viz}}, \quad Q = \frac{\dot{q}r_0^2}{kT_{viz}}, \quad N_1 = \frac{\varepsilon\sigma T_{viz}^3 r_0}{k}, \quad N_2 = \frac{hr_0}{k} \quad (184)$$

Pode então reescrever as Eqs. (172-177) na seguinte forma:

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dR} + Q = 0 \quad (185)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dR} \right|_{R=0} = 0 \quad (186)$$

$$\theta(R=1) = \theta_s = \frac{T_s}{T_{viz}} \quad (187)$$

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\theta}{dR} + Q = 0 \quad (188)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dR} \right|_{R=0} = 0 \quad (189)$$

$$\theta(R=1) = \theta_s = \frac{T_s}{T_{viz}} \quad (190)$$

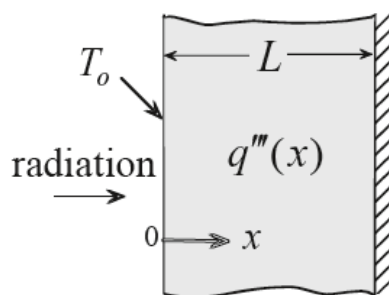
Já os balanços de energia nas superfícies da parede plana, cilindro e esfera maciços, Eqs. (178-179) podem ser reescritos utilizando as variáveis adimensionais na seguinte forma:

$$-\frac{d\theta}{dX} = N_2(\theta - 1) + N_1(\theta^4 - 1) \quad (191)$$

$$-\frac{d\theta}{dR} = N_2(\theta - 1) + N_1(\theta^4 - 1) \quad (192)$$

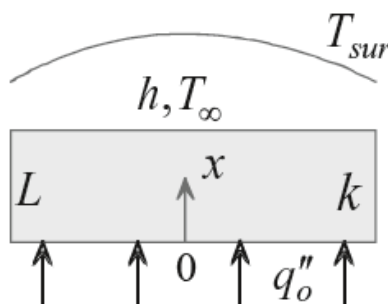
## 5-EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Radiação é utilizada para aquecer uma placa de espessura  $L$  e condutividade térmica  $k$ . A radiação tem o efeito de geração de energia volumétrica com taxa variável dada por  $\dot{q}(x) = \dot{q}_o e^{-bx}$  onde  $\dot{q}_o$  e  $b$  são constantes e  $x$  é a distância medida ao longo da placa. A superfície aquecida em  $x=0$  é mantida a uma temperatura uniforme  $T_o$  enquanto a superfície exposta está isolada. Determine a temperatura da superfície isolada.



2) Um lado de uma placa é aquecido com um fluxo de calor uniforme  $q_o''$  enquanto o outro lado troca calor por convecção e radiação. A emissividade da superfície é  $\varepsilon$ , o coeficiente de transferência de calor é  $h$ , a temperatura ambiente é  $T_\infty$ , a temperatura da vizinhança é  $T_{viz}$ , a espessura da placa é  $L$  e a condutividade térmica da placa é  $k$ . Assumindo condução unidimensional em regime permanente e utilizando um modelo simplificado de radiação, determine:

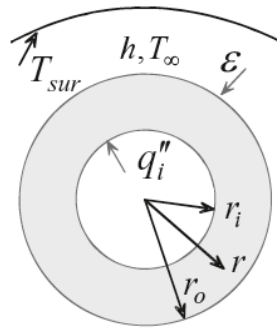
- A distribuição de temperaturas na placa.
- A temperatura das duas superfícies para  $h = 27 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ ,  $k = 15 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ,  $L = 0,08 \text{ m}$ ,  $q_o'' = 19.500 \text{ W/m}^2$ ,  $T_{viz} = 18^\circ\text{C}$ ,  $T_\infty = 22^\circ\text{C}$  e  $\varepsilon = 0,95$ .



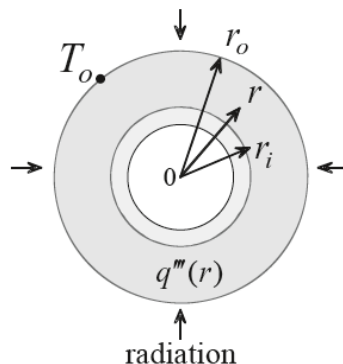
3) Uma casca cilíndrica de raio interno  $r_i$  e raio externo  $r_o$  é aquecida com um fluxo de calor  $q_i''$  na sua superfície interna. A superfície externa troca calor com o ambiente e com as vizinhanças por convecção e radiação. O coeficiente de transferência de calor é  $h$ , a temperatura ambiente é  $T_\infty$ , a temperatura das vizinhanças é  $T_{viz}$  e a emissividade da superfície é  $\varepsilon$ . Assuma condução unidimensional em regime permanente e utilizando um modelo simplificado de radiação, determine:

a) A distribuição de temperaturas.

b) A temperatura em  $r_i$  e  $r_o$  para  $q_i'' = 35.500 \text{ W/m}^2$ ,  $T_\infty = 24^\circ\text{C}$ ,  $T_{viz} = 14^\circ\text{C}$ ,  $k = 3,8 \text{ W/m.K}$ ,  $r_i = 5,5 \text{ cm}$ ,  $r_o = 12 \text{ cm}$ ,  $\varepsilon = 0,92$  e  $h = 31,4 \text{ W/m}^2.\text{K}$ .

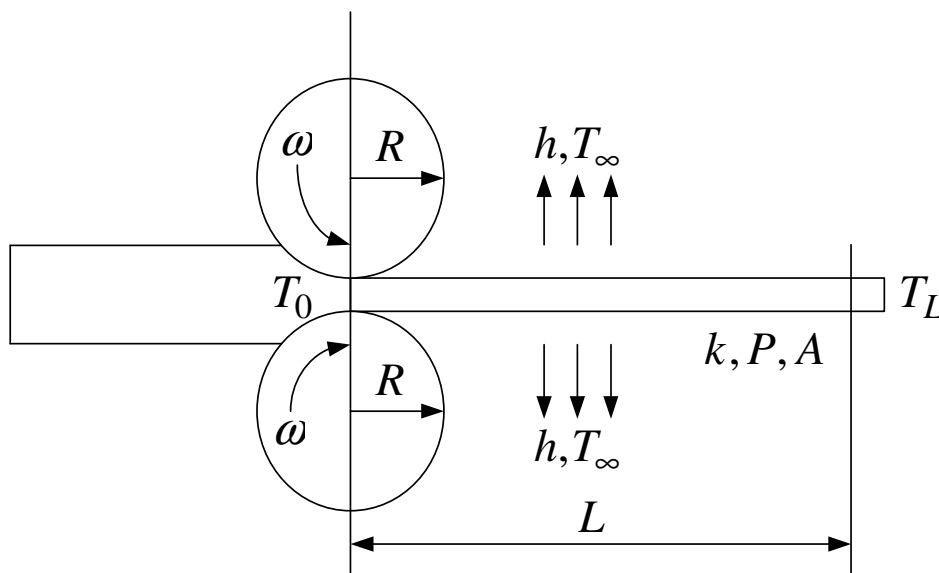


4) Radiação é utilizada para aquecer uma casca esférica de raio interno  $r_i$ , raio externo  $r_o$  e condutividade térmica  $k$ . Devido as características de absorção térmica do material da esfera a radiação resulta em uma geração de energia variável na forma  $\dot{q}(r) = \dot{q}_o (r^2/r_o^2)$  onde  $\dot{q}_o$  é uma constante e  $r$  é a coordenada radial. A superfície interna está isolada e a superfície externa está mantida a uma temperatura  $T_o$ . Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente para condução unidimensional radial.



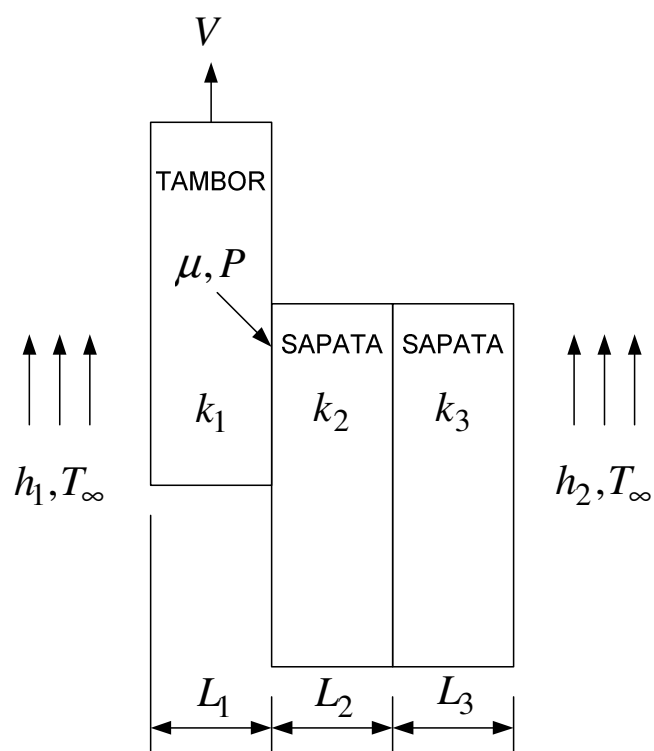
5) No laminador a quente mostrado na figura o calor é transferido do arame quente para o ambiente a  $T_\infty$  com coeficiente de transferência de calor  $h$ . Em uma posição  $L$  a temperatura do arame deve ser  $T_L$  para fins de um tratamento químico. A temperatura do arame na entrada do laminador é  $T_0$ .

- Obter a equação diferencial do problema.
- Calcular a velocidade angular dos rolos laminadores para o caso particular de  $Pe=100$ , quando a condução axial de calor pode ser desprezada.  $Pe=VD/\alpha$  é o número de Peclet onde  $D=A/P$  (área da seção transversal/perímetro da seção transversal) é a dimensão característica do arame e  $V$  é sua velocidade linear.



6) Desprezando os efeitos de curvatura, admita que o sistema de freio de um veículo possa ser simulado por uma placa plana (tambor) movendo-se sobre uma placa composta (sapata) com velocidade constante  $V$ . A pressão  $P$  de contato na interface é constante e uniforme, o coeficiente de atrito seco é  $\mu$ , a temperatura ambiente é  $T_\infty$  e os coeficientes de transferência de calor por convecção são  $h_1$  e  $h_2$ . As condutividades térmicas e as espessuras das placas são  $k_1, k_2$  e  $k_3$  e  $L_1, L_2$  e  $L_3$ .

- Desenhar o circuito térmico para o sistema.
- Calcular o calor transferido para o tambor e a sapata.
- Calcular a temperatura máxima do sistema.



# CAPÍTULO 4

## ALETAS

### 1-OBJETIVO DAS ALETAS

O termo superfície estendida é comumente utilizado para descrever um caso especial importante envolvendo a transferência de calor por condução no interior de um sólido e a transferência de calor por convecção (e/ou radiação) nas fronteiras do sólido. Até agora, consideramos transferência de calor nas fronteiras de um sólido na mesma direção da transferência de calor por condução em seu interior. De forma distinta, em uma superfície estendida, a direção da transferência de calor nas fronteiras é perpendicular à direção principal da transferência de calor no interior do sólido.

Seja um suporte que une duas paredes a diferentes temperaturas, sobre o qual há um escoamento cruzado de um fluido, conforme Fig. (1). Com  $T_1 > T_2$ , gradientes de temperatura na direção  $x$  mantêm a transferência de calor por condução no suporte. Contudo, se  $T_1 > T_2 > T_\infty$ , há ao mesmo tempo transferência de calor por convecção para o fluido, causando a diminuição, com o aumento de  $x$ , do gradiente de temperaturas  $|dT/dx|$ .

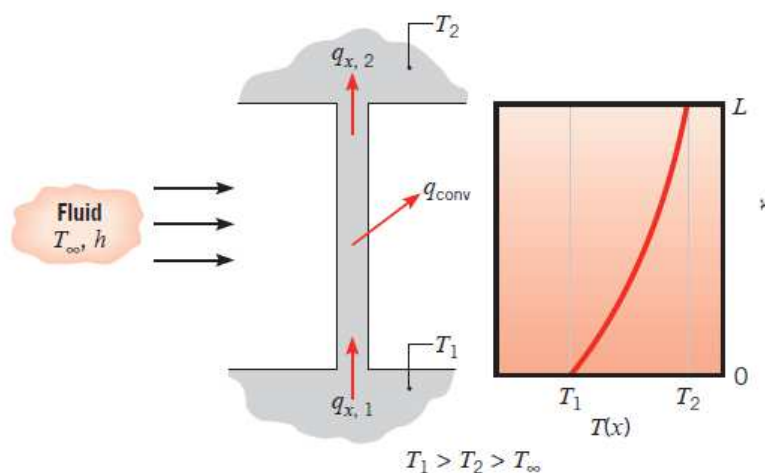


Figura 1 – Condução e convecção combinadas em um elemento estrutural (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

Embora existam muitas situações diferentes que envolvam tais efeitos combinados de condução/convecção, a aplicação mais frequente é aquela na qual uma superfície estendida é usada especificamente para aumentar a taxa de transferência de calor entre um sólido e um fluido adjacente. Tal superfície estendida é chamada de aleta. Considere a parede plana da Fig. (2a). Se  $T_s$  é fixa, há duas formas nas quais a taxa de transferência de calor pode ser aumentada. O coeficiente convectivo  $h$  poderia ser aumentado através do aumento da velocidade do fluido e/ou a temperatura do fluido  $T_\infty$  poderia ser reduzida. No entanto, há muitas situações nas quais o aumento de  $h$  até o valor máximo possível é insuficiente para obter a taxa de transferência de calor desejada ou os custos associados são proibitivos. Tais custos estão relacionados à exigência de potência nos sopradores e nas bombas necessária para elevar o  $h$  através do aumento da movimentação do fluido. Além disso, a segunda opção de redução de  $T_\infty$  é frequentemente impraticável.

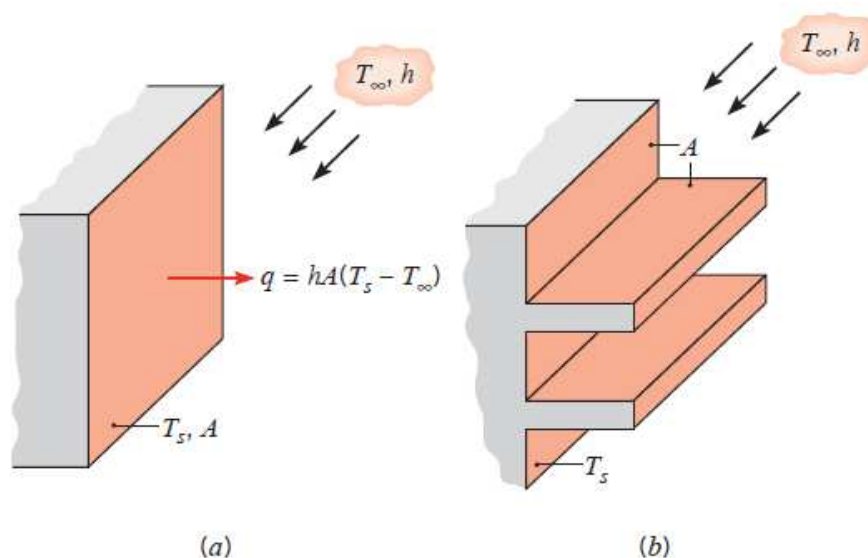


Figura 2 – Uso de aletas para melhorar a transferência de calor em uma parede plana.

(a) Superfície sem aletas. (b) Superfície aletada (Fonte: Bergman *et al.* 2014).

Contudo, examinando a Fig. (2b), verificamos que há uma terceira opção, ou seja, a taxa de transferência de calor pode ser elevada pelo aumento da área superficial através da qual ocorre a convecção. Isso pode ser efetuado pelo emprego de aletas que se estendem da parede para o interior do fluido adjacente. A condutividade térmica do material da aleta tem grande efeito na distribuição de temperaturas ao longo da aleta e, conseqüentemente, influencia o nível de melhora da taxa de transferência de calor.

Idealmente, o material da aleta deveria ter uma condutividade térmica elevada para minimizar variações de temperatura desde a sua base até a sua extremidade. No limite de condutividade térmica infinita, toda a aleta estaria à mesma temperatura da superfície de sua base, fornecendo assim o máximo possível de melhora da transferência de calor.

## **2-HISTÓRICO**

Três quartos de séculos atrás, um artigo de Harper e Brown (1922) foi enviado para análise da NACA (National Advisory Committee for Aeronautics). Era um trabalho matematicamente elegante e parece ser o primeiro esforço significativo para fornecer uma base matemática para o problema combinado condução-convecção sobre uma única superfície estendida. Harper e Brown chamaram essa superfície estendida de aleta de resfriamento, o que mais tarde seria chamada simplesmente de aleta. É bastante provável que Harper e Brown tenham sido os pioneiros nesse assunto embora Jakob (1949) mencione que publicações relacionadas à análise matemática de superfícies estendidas podem ser encontradas desde 1789. Jakob também cita que Fourier (1822) e Despretz (1822, 1828 a,b) publicaram análises matemáticas relacionadas a variação de temperaturas ao longo de barras e eixos de metal. Embora esses trabalhos mais antigos possam ter significância na época em que foram publicados, o histórico sugere que a trabalho de Harper e Brown pode ser considerado como o precursor do que se tornou uma literatura crescente sobre um tópico de grande importância na área de transferência de calor.

O trabalho de Harper e Brown enviado a NACA foi desenvolvido a partir de uma solicitação da Divisão de Engenharia do Exército dos Estados Unidos juntamente com o Escritório de Padronizações dos Estados Unidos do estudo das características de dissipação de calor de motores de aeronaves refrigerados a ar. O trabalho considerou aletas longitudinais de perfil retangular e perfil trapezoidal e aletas radiais de perfil retangular. Foram também introduzidos os conceitos de eficiência da aleta, embora a expressão empregada por Harper e Brown tenha sido chamada de efetividade da aleta. A partir desse começo modesto, mas brilhante, a análise e avaliação do desempenho de aletas individuais bem como de conjuntos de aletas tornou-se uma arte.

Harper e Brown (1922) desenvolveram soluções analíticas bidimensionais tanto para aletas longitudinais retangulares e trapezoidais como para aletas radiais com espessura uniforme. Essas soluções forneceram expressões para a eficiência da aleta (chamada de efetividade) e fatores de correção para ajustar a eficiência de aletas longitudinais de perfil retangular. Os autores concluíram que a utilização de modelos unidimensionais eram suficientes e propuseram que a perda de calor pela extremidade da aleta fosse levada em consideração através de um comprimento corrigido, que virtualmente aumentaria o comprimento da aleta de um valor igual à metade da espessura da aleta.

Schmidt (1926) analisou os três perfis considerados por Harper e Brown do ponto de vista de economia de material. O autor afirmou que menos material é requerido para uma dada condição se o gradiente de temperaturas na aleta (da base para a extremidade) é linear, mostrando também que a espessura de cada tipo de aleta deve ser variável para produzir esse resultado. Os resultados obtidos, em geral, eram impraticáveis para manufatura. Dessa forma, o autor finalizou seu trabalho sugerindo expressões para as dimensões ótimas de aletas longitudinais e radiais com espessura constante (perfil retangular) e para aletas longitudinais de perfil trapezoidal. O autor também considerou uma aleta longitudinal de perfil triangular como um caso particular de uma aleta longitudinal de perfil trapezoidal com espessura de extremidade nula.

Aletas piniformes de diferentes perfis foram analisadas por Bueche e Schau (1936). Os autores analisaram a dissipação de calor em aletas cônicas em função do número de Biot baseando-se no raio da base  $a$  na relação de aspecto comprimento da aleta/raio da base. Foi também mostrada uma otimização relacionada ao peso das aletas.

Murray (1938) analisou o problema de uma aleta radial de espessura uniforme (uma aleta radial de perfil retangular) apresentando equações para o gradiente de temperaturas e efetividade sob condições de distribuição de temperaturas simétrica em torno da base da aleta. O autor também propôs que a análise de superfícies estendidas pode ser baseada em um conjunto de considerações que ficaram conhecidas desde 1945 como hipóteses de Murray-Gardner. Historicamente essas considerações foram de grande importância no desenvolvimento e análise das superfícies estendidas pois forneceram um caminho de análise a ser seguido, sugerindo uma série de simplificações e alternativas de modelagem matemática.

Um procedimento para o cálculo do gradiente de temperaturas e eficiência de aletas com espessura variável foi apresentado por Hausen (1940). O gradiente de temperaturas em aletas piniformes cilíndricas e cônicas foi determinado por Focke (1942) que, assim como Shmidt (1926), mostrou que a espessura das aletas piniformes deve ser variável para um mínimo de material. Avrami e Little (1942) desenvolveram equações para o gradiente de temperaturas em aletas espessas e mostraram sob quais condições as aletas podem ser consideradas como isoladas em sua extremidade. Carrier e Anderson (1944) analisaram aletas retangulares e aletas radiais com espessura constante, apresentando expressões para a eficiência na forma de séries infinitas.

Gardner (1945) deu um grande salto no desenvolvimento do conhecimento sobre aletas, fornecendo expressões gerais para a distribuição de temperaturas e eficiência para qualquer forma de superfície estendida na qual as considerações de Murray-Gardner fossem aplicáveis e cuja espessura variasse na forma de potência com relação à distância medida ao longo de um eixo normal a base da superfície primária (comprimento da aleta). O autor propôs funções de perfil para geometrias longitudinais, radiais e piniformes e a partir das funções de perfil e de uma equação diferencial generalizada, Gardner forneceu diversas soluções analíticas para a distribuição de temperaturas e eficiência, além de gráficos de eficiência. O autor também mencionou que os conceitos de eficiência da aleta e efetividade da aleta não estavam sendo utilizados de maneira consistente na literatura, redefinindo ambos os termos e fornecendo uma relação matemática para permitir a conversão entre esses conceitos.

Considera-se que o trabalho de Gardner é notável por diversas razões. Primeiro e provavelmente mais importante é o fato de que o autor reenfatizou o conceito de eficiência da aleta, gerando ansiedade em centenas de projetistas de equipamentos até aquele momento. Além disso, parece que Gardner foi um dos primeiros a demonstrar a utilização de matemática aplicada como base para conceitos que engenheiros pudessem utilizar. Deve ser observado que em 1945, ano do trabalho de Gardner, a tecnologia das superfícies estendidas foi praticamente consolidada. O que se iniciou com Harper e Brown e que se concluiu com o trabalho de Gardner estabeleceu equações de projeto úteis e praticamente definitivas para a análise de aletas. Atualmente, a principal referência bibliográfica sobre aletas é o livro chamado “Extended Surface Heat Transfer”, dos autores Allan D. Kraus, Abdul Aziz e James Welty, da editora John Wiley e Sons, lançado no ano de 2001.

### 3-TIPOS DE ALETAS

Um número crescente de áreas de engenharia estão relacionadas com transições de energia necessitando de rápido deslocamento do calor. Existe uma demanda em expansão por componentes de transferência de calor de alto desempenho com progressivamente menores pesos, volumes, custos e melhores formas de instalação. Transferência de calor em superfícies estendidas é o estudo desses componentes de transferência de calor de alto desempenho com relação ao peso, volume, custos e instalação em uma variedade de ambientes térmicos. Componentes comuns são encontrados em diversas aplicações tais como veículos terrestres, aéreos e espaciais e suas fontes de potência, em processos químicos, de refrigeração e criogênicos, em equipamentos elétricos e eletrônicos, em fornos convencionais e turbinas a gás, em dissipadores de calor e dutos para aproveitamento de rejeitos térmicos, em módulos de combustíveis nucleares, dentro outros.

No projeto e construção dos vários tipos de equipamentos de transferência de calor, formas simples tais como cilindros, barras e placas são utilizadas para implementar o fluxo de calor entre a fonte e o sumidouro. Essas formas fornecem superfícies de absorção ou de rejeição de calor e cada uma delas é conhecida como superfície primária. Quando uma superfície primária é estendida por apêndices intimamente conectados a ela, tais como fitas metálicas ou pinos em dutos conforme a Fig. (3), a superfície adicional é conhecida como superfície estendida. Em algumas áreas de engenharia, superfícies primárias e suas superfícies estendidas são conhecidas coletivamente como superfícies estendidas para diferenciá-las das superfícies primárias utilizadas isoladamente. Os elementos utilizados para estender as superfícies primárias são conhecidos como aletas. Quando as aletas são cônicas ou cilíndricas, elas podem ser chamadas de piniformes. Na Fig. (3) pode-se utilizar a seguinte nomenclatura:

- Fig. (3a): aleta longitudinal de perfil retangular;
- Fig. (3b): duto cilíndrico equipado com aletas de perfil retangular;
- Fig. (3c): aleta longitudinal de perfil trapezoidal;
- Fig. (3d): aleta longitudinal de perfil parabólico;
- Fig. (3e): duto cilíndrico equipado com aleta radial de perfil retangular;
- Fig. (3f): duto cilíndrico equipado com aleta radial de perfil trapezoidal;
- Fig. (3g): aleta piniforme cilíndrica;

- Fig. (3h): aleta piniforme cônica truncada;
- Fig. (3i): aleta piniforme parabólica truncada.

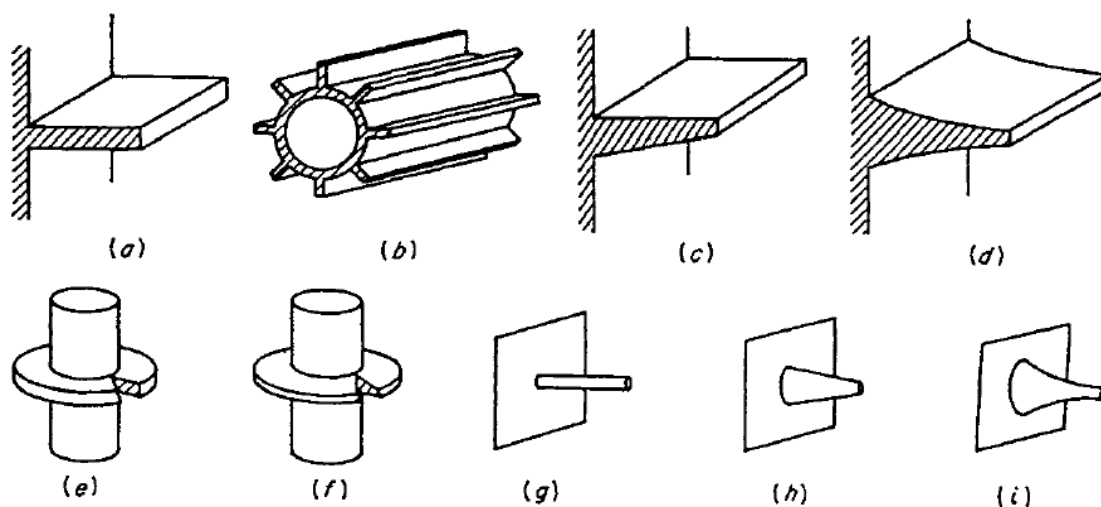
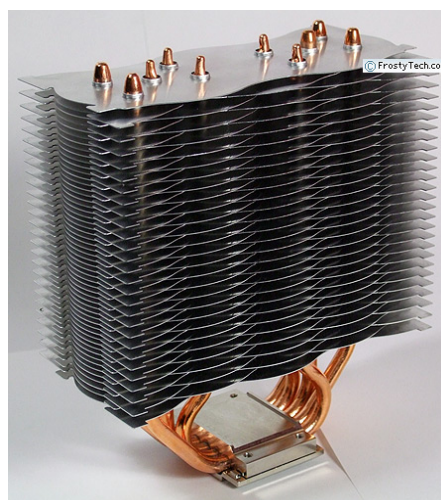


Figura 3 – Alguns exemplos comuns de superfícies estendidas (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

Qualquer que seja a aplicação, a seleção de um determinado tipo de configuração de aletas depende do espaço disponível, peso do conjunto aletado, viabilidade de manufatura e custos de fabricação. Deve ser verificada também a extensão na qual as aletas reduzem o coeficiente convectivo e o aumento da queda de pressão associado ao escoamento sobre a aleta ou ao conjunto de aletas. Nas Figs. (4) e (5) podem ser vistas aplicações comuns de conjuntos de aletas:

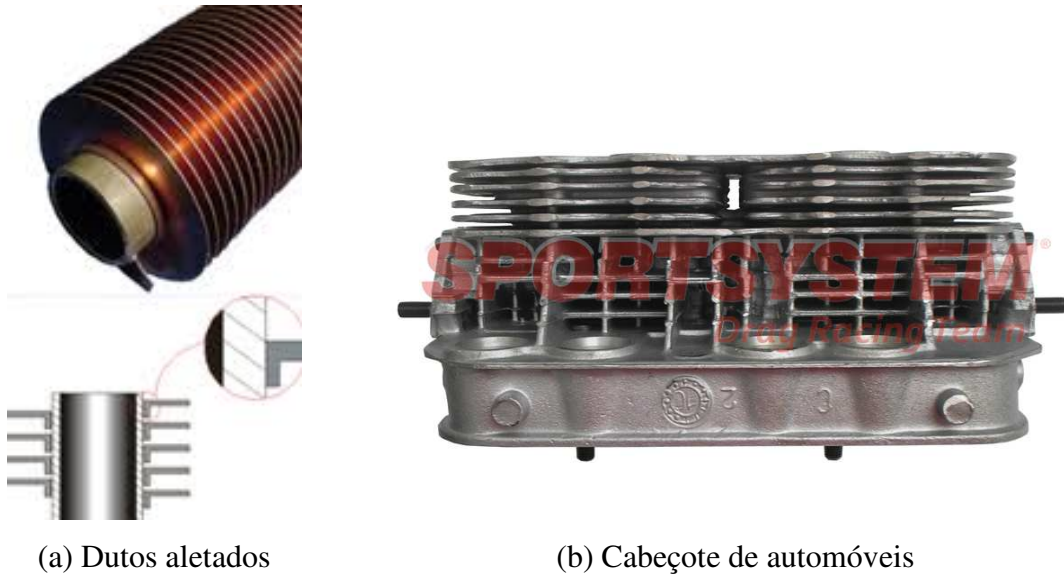


(a) Resfriamento de processadores



(b) Dissipadores de calor

Figura 4 – Aplicações de conjuntos de aletas.



(a) Dutos aletados

(b) Cabeçote de automóveis

Figura 5 – Aplicações de conjuntos de aletas.

#### 4-EFICIÊNCIA DE UMA ALETA

Uma medida do desempenho térmico de uma aleta é determinada pela eficiência da aleta. O potencial máximo para convecção é a diferença de temperaturas entre a base da aleta e o fluido,  $\theta_b = T_b - T_\infty$  (excesso de temperaturas). Consequentemente, a taxa máxima na qual uma aleta poderia dissipar energia é a taxa que existiria se toda a superfície da aleta estivesse na temperatura da base. Entretanto, como qualquer aleta é caracterizada por uma resistência de condução finita, existe um gradiente de temperaturas finito ao longo da aleta e a condição anterior é uma idealização. Uma definição lógica para a definição de eficiência da aleta  $\eta$  é então escrita como:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo, aleta}}} = \frac{q_b}{hA_{\text{superfície, aleta}}(T_b - T_\infty)} = \frac{q_b}{hA_{\text{superfície, aleta}}\theta_b} \quad (1)$$

onde  $q_b$  é a taxa real de transferência de calor da aleta e  $A_{\text{superfície, aleta}}$  é a área superficial total da aleta.

#### 5-HIPÓTESES DE ANÁLISE

Uma análise matemática pode ser realizada para superfícies estendidas compreendendo vários tipos de superfícies primárias e diversos tipos de aletas. Muitos dos resultados para a taxa de calor, distribuição de temperaturas, eficiências e otimizações podem ser obtidos a partir da análise das três geometrias fundamentais mostradas na Fig. (3): aletas longitudinais, aletas radiais e aletas piniformes. Aletas de diferentes geometrias e condutividades térmicas respondem diferentemente a fontes de calor e sumidouros idênticos. Similarmente, existem diversas maneiras nas quais as temperaturas e os coeficientes de transferência de calor das fontes e sumidouro podem variar. É de grande importância na análise de geometrias aletadas as condições de contorno e considerações de análise que são empregadas para definir e limitar o problema e usualmente simplificar a solução. A análise das três geometrias fundamentais analisadas nesse capítulo emprega as considerações propostas por Murray (1938) e Gardner (1945). Essas considerações limitantes quase sempre são referidas como considerações de Murray-Gardner, que são:

1. A taxa de calor na aleta e sua distribuição de temperaturas são constantes no tempo, ou seja, admite-se regime permanente de operação;
2. O material da aleta é homogêneo, sua condutividade térmica é a mesma em todas as direções e é uma constante;
3. O coeficiente de transferência de calor nas faces da aleta é constante e uniforme sobre toda a superfície da aleta;
4. A temperatura do meio circundante é uniforme;
5. A espessura da aleta é pequena quando comparada com seu comprimento e profundidade de tal maneira que os gradientes de temperaturas através da espessura da aleta e a transferência de calor a partir das bordas da aleta podem ser desprezados;
6. A temperatura na base da aleta é uniforme;
7. Não há resistência de contato entre a base da aleta e a superfície primária;
8. Não existe geração de energia volumétrica no interior da aleta;
9. O calor transferido através da extremidade da aleta é desprezível quando comparado com o calor transferido através de sua superfície lateral;
10. A transferência de calor da aleta ou para a aleta é proporcional ao excesso de temperaturas entre a aleta e o meio circundante.

## 6-ALETAS LONGITUDINAIS

### 6.1-EQUAÇÃO DIFERENCIAL GENERALIZADA

Gardner (1945) propôs uma equação diferencial generalizada para a análise de aletas longitudinais. Para isso considere uma aleta longitudinal de perfil arbitrário conforme mostrado na Fig. (6a) e assuma que a aleta está dissipando calor para o meio circundante somente por convecção. Note que o eixo  $x$  está relacionado ao comprimento da aleta, tendo sua origem na extremidade da aleta com orientação positiva da extremidade para a base da aleta. O perfil da aleta mostrado na Fig. (6b) está confinado por duas curvas que são quase sempre simétricas,  $y = f_2(x)$  e  $y = -f_2(x)$ , de tal maneira que a espessura da aleta é  $\delta(x) = 2f_2(x)$ . A seção transversal da aleta conforme Fig. (6c) é  $A(x) = f_1(x) = 2Lf_2(x)$ , onde  $L$  é a profundidade da aleta. Os limites da aleta são delimitados pelas curvas de perfil da aleta,  $\pm f_2(x)$ . A base da aleta é mostrada na área hachurada da Fig. (6c).

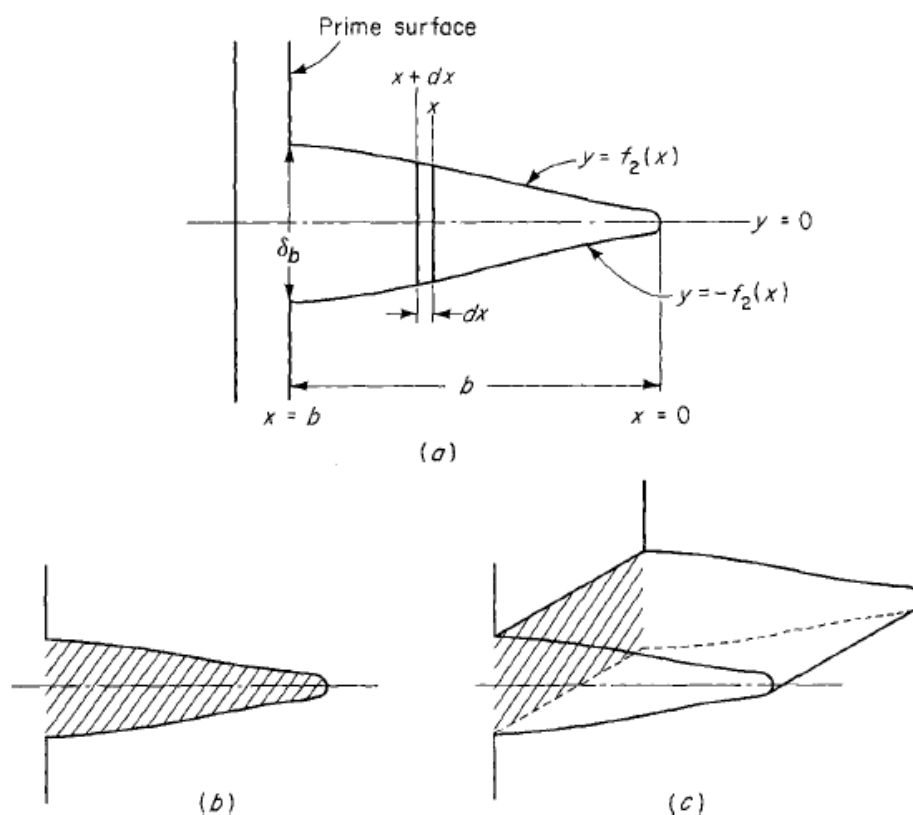


Figura 6 – Aleta longitudinal de perfil arbitrário: (a) sistema de coordenadas, (b) área de perfil da aleta, e (c) área da seção transversal da aleta (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

Características na base da aleta, localizada em  $x=b$ , são designadas pela subscrito  $b$ . Por exemplo,  $\theta_b$ ,  $q_b$  e  $T_b$  representam o excesso de temperaturas, taxa de transferência de calor e temperatura da base da aleta, respectivamente. Características na extremidade da aleta, localizada em  $x=a$ , são designadas pelo subscrito  $a$  ( $\theta_a$ ,  $q_a$  e  $T_a$ ). Em geral, a extremidade da aleta está localizada em  $x=a$ , mas para as aletas longitudinais e aletas piniformes discutidas nesse capítulo, a extremidade e a origem da coordenada de comprimento está especificamente localizada em  $x=a=0$ .

Na análise de superfícies estendidas é comum trabalhar com a variável excesso de temperaturas  $\theta(x)$ , uma função da coordenada de comprimento  $x$  definida como a diferença de temperaturas ou excesso entre um ponto na superfície da aleta e o ambiente, ou seja:

$$\theta(x) = T(x) - T_{\infty} \quad (2)$$

A equação diferencial para a distribuição de temperaturas na aleta longitudinal é formulada através de um balanço de energia em um volume de controle diferencial de comprimento  $dx$  conforme mostrado na Fig. (6a). Esse elemento diferencial está limitado por plano paralelos a base da aleta em  $x$  e  $x+dx$  e pelas curvas de perfil,  $y \pm f_2(x)$ . Se a temperatura da superfície da aleta é  $T(x)$ , de tal maneira que em  $dx$  a temperatura é  $T$  e a condutividade térmica da aleta é  $k$ , a diferença entre as taxas de condução entrando na aleta em  $x+dx$  e saindo da aleta em  $x$  é escrita como:

$$q_{\text{condução}} = q_{x+dx} - q_x = \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} - \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_x \quad (3)$$

A taxa de condução saindo da aleta em  $x$  pode ser calculada em termos da taxa de condução entrando na aleta em  $x+dx$  utilizando série de Taylor, ou seja:

$$\left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_x = \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} - \frac{d}{dx} \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} dx \quad (4)$$

Substituindo a Eq. (4) na Eq. (3) e rearranjando obtém-se:

$$q_{\text{condução}} = \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} - \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_x + \frac{d}{dx} \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} dx = k \frac{d}{dx} \left[ f_1(x) \frac{dT}{dx} \right] dx \quad (5)$$

Com a consideração de regime permanente, a diferença entre as taxas de condução entrando e saindo do elemento  $dx$ , conforme resultado da Eq. (5), deve ser equalizada por algum modo de dissipação de calor a partir da superfície lateral exposta da aleta. Se o calor é dissipado por convecção para o meio circundante e  $h$  é o coeficiente de transferência de calor, da lei do resfriamento de Newton obtém-se:

$$dq_{\text{convecção}} = h dA_{\text{superfíciealeta}}(x)(T - T_{\infty}) \quad (6)$$

Uma expressão para a área superficial de transferência de calor por convecção pode ser escrita como:

$$dA_{\text{superfíciealeta}}(x) = 2Ldx + 4f_2(x)dx = 2[L + 2f_2(x)]dx \approx 2Ldx \quad (7)$$

onde  $L + 2f_2(x) \approx L$  pela hipótese 5 de Murray-Gardner. Substituindo a Eq. (7) na Eq. (6), igualando o resultado com a Eq. (5) e utilizando a definição da Eq. (2) obtém-se:

$$k \frac{d}{dx} \left[ f_1(x) \frac{d\theta}{dx} \right] dx = h(2Ldx)\theta \quad (8)$$

Fazendo a derivada do produto na Eq. (8) e rearranjando obtém-se

$$f_1(x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{df_1(x)}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{2hL}{k} \theta = 0 \quad (9)$$

Com  $f_1(x) = 2Lf_2(x)$  a Eq. (9) pode ser reescrita como:

$$f_2(x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{df_2(x)}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{h}{k} \theta = 0 \quad (10)$$

A Eq. (10) é a equação diferencial generalizada para aletas longitudinais. Conforme Gardner (1945), a função de perfil  $f_2(x)$  para aletas longitudinais usualmente tem a seguinte forma:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{(1-2n)/(1-n)} \quad (11)$$

onde  $\delta_b$  é a espessura da aleta na base e  $n$  é um número real que define o perfil da aleta longitudinal. A Eq. (10) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes ou variáveis, linear e homogênea. Para sua solução geral são necessárias duas condições de contorno, ou seja:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta(x=0) = \text{finito} \quad (12)$$

$$T(x=b) = T_b \Rightarrow \theta(x=b) = T_b - T_\infty = \theta_b \quad (13)$$

A taxa real de transferência de calor da aleta pode ser calculada a partir da solução da Eq. (10) para um perfil especificado juntamente com as Eqs. (12-13) e posterior aplicação da lei de Fourier na base da aleta, ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=b} = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} \quad (14)$$

A eficiência da aleta pode então ser calculada pela Eq. (1) juntamente com o resultado da Eq. (14).

## 6.2-ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL RETANGULAR

Para a aleta longitudinal de perfil retangular mostrada na Fig. (7), a equação do perfil é obtida substituindo  $n = 1/2$  na Eq. (11), ou seja:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{\left(1-2\frac{1}{2}\right)} = \frac{\delta_b}{2} \quad (15)$$

de tal forma que  $df_2(x)/dx = 0$ . Substituindo esses resultados na Eq. (10), multiplicando por  $(2/\delta_b)$  e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{2h}{k\delta_b}\theta = 0 \quad (16)$$

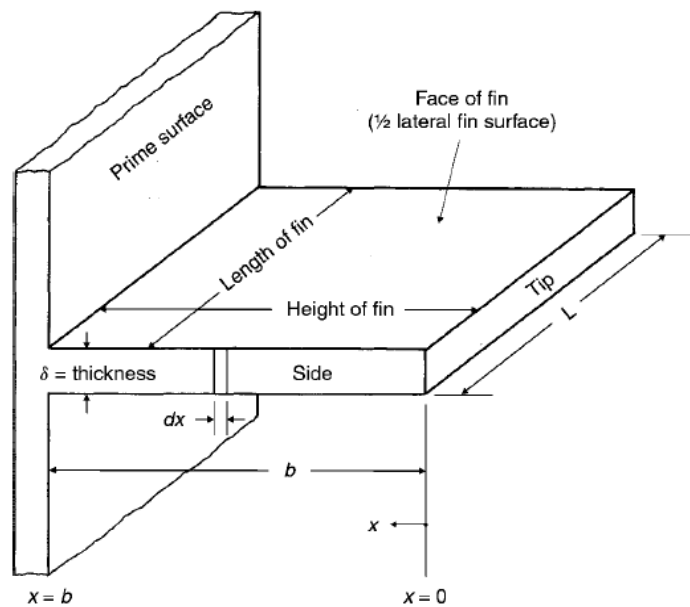


Figura 7 – Aleta longitudinal de perfil retangular (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

A Eq. (16) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da técnica da equação característica. A Eq. (16) pode ser simplificada definindo o chamado parâmetro de desempenho da aleta, escrito da seguinte forma:

$$m = \left( \frac{2h}{k\delta_b} \right)^{1/2} \quad (17)$$

A equação característica é escrita como  $t^2 - m^2 = 0$  de forma que  $t = \pm m$ . Para duas raízes reais e distintas, a solução da Eq. (16) tem a seguinte forma:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (18)$$

A derivada da Eq. (18) com relação a  $x$  tem a seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx} \quad (19)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (12) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = mC_1 e^{m0} - mC_2 e^{-m0} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \quad (20)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (13) e utilizando o resultado da Eq. (20) obtém-se:

$$\theta(x=b) = C_1 e^{mb} + C_1 e^{-mb} = \theta_b \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (21)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (20-21) na Eq. (18) obtém-se:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (22)$$

Sabendo que  $e^{mx} + e^{-mx} = 2 \cosh(mx)$  e  $e^{mb} + e^{-mb} = 2 \cosh(mb)$  pode-se reescrever a Eq (22) na seguinte forma:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{\cosh(mx)}{\cosh(mb)} \quad (23)$$

A taxa real de transferência de calor da aleta pode ser calculada a partir da Eq. (14), ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} = k(\delta_b L) m C_1 (e^{mb} - e^{-mb}) = k(\delta_b L) m \theta_b \frac{e^{mb} - e^{-mb}}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (24)$$

Sabendo que  $e^{mb} + e^{-mb} = 2 \cosh(mb)$  e  $e^{mb} - e^{-mb} = 2 \sinh(mb)$  pode-se reescrever a Eq. (24) na seguinte forma:

$$q_b = k(\delta_b L) m \theta_b \tanh(mb) \quad (25)$$

A taxa máxima de transferência de calor é obtida pelo denominador da Eq. (1), ou seja:

$$q_{\text{máximo,aleta}} = hA_{\text{superfíciealeta}} \theta_b = h\theta_b \int_0^b dA_{\text{superfíciealeta}}(x) = h\theta_b \int_0^b 2L dx = h(2Lb)\theta_b \quad (26)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) com os resultados das Eqs. (25-26), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo,aleta}}} = \frac{k(\delta_b L) m \theta_b \tanh(mb)}{h(2Lb)\theta_b} = \frac{k\delta_b}{\underbrace{2h}_{\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} \frac{m \tanh(mb)}{b} = \frac{\tanh(mb)}{mb} \quad (27)$$

**EXEMPLO 1:** Uma aleta longitudinal de perfil retangular está exposta a um meio com temperatura de 50 °C e um coeficiente de transferência de calor de 50,2 W/(m<sup>2</sup>.K). A temperatura da base da aleta é 90 °C e a aleta é feita de aço com  $k = 33,5$  W/(m.K). A aleta tem um comprimento de 101,6 mm e uma espessura 9,525 mm. Determine (a) a eficiência da aleta, (b) a temperatura da extremidade da aleta e (c) a taxa de transferência de calor da aleta se ela tem 250 mm de profundidade.

$$\theta_b = T_b - T_\infty = 90 - 50 = 40 \text{ °C}$$

$$b = 101,6/1000 = 0,1016 \text{ m}$$

$$\delta_b = 9,525/1000 = 9,525 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$L = 250/1000 = 0,250 \text{ m}$$

$$m = \left( \frac{2h}{k\delta_b} \right)^{1/2} = \left( \frac{2.50,2}{33,5.9,525 \times 10^{-3}} \right)^{1/2} = 17,738 \text{ m}^{-1}$$

$$\eta = \frac{\tanh(mb)}{mb} = \frac{\tanh(17,738.0,1016)}{17,738.0,1016} = 0,526$$

$$\theta_a = \theta_b \frac{\cosh(m0)}{\cosh(mb)} = 40 \frac{\cosh(17,738.0)}{\cosh(17,738.0,1016)} = 12,8^\circ\text{C}$$

$$T_a = \theta_a + T_\infty = 12,8 + 50 = 62,8^\circ\text{C}$$

$$q_b = k(\delta_b L) m \theta_b \tanh(mb) = 33,5.(9,525 \times 10^{-3}.0,250).17,738.40 \tanh(17,738.0,1016) = 53,6 \text{ W}$$

ou,

$$q_{\text{máximo,alda}} = h(2Lb)\theta_b = 50,2.(2.0,250.0,1016).40 = 102,0 \text{ W}$$

$$q_b = \eta q_{\text{máximo,aleta}} = 0,526.102,0 = 53,6 \text{ W}$$

### 6.3-ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL TRIANGULAR

Para a aleta longitudinal de perfil triangular mostrada na Fig. (8), a equação do perfil é obtida substituindo  $n = 0$  na Eq. (11), ou seja:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{\frac{(1-2,0)}{(1-0)}} = \frac{\delta_b x}{2b} \quad (28)$$

de tal forma que  $df_2(x)/dx = \delta_b/2b$ . Substituindo esses resultados na Eq. (10), multiplicando por  $(2bx/\delta_b)$  e rearranjando obtém-se:

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + x \frac{d\theta}{dx} - x \frac{2h}{k\delta_b} b\theta = 0 \quad (29)$$

A Eq. (29) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da equação geral de Bessel, conforme Apêndice. A Eq. (29) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na mesma forma da Eq. (17).

Comparando a Eq. (29) com a Eq. (15) do Apêndice, obtém-se os seguintes coeficientes:  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1/2$ ,  $D = i2m\sqrt{b}$ ,  $p = 2m\sqrt{b}$  e  $n = 0$ . Esses resultados indicam o CASO 3 do Apêndice, cuja solução geral é dada pela Eq. (A18), ou seja:

$$\theta(x) = C_1 I_0(2m\sqrt{bx}) + C_2 K_0(2m\sqrt{bx}) \quad (30)$$

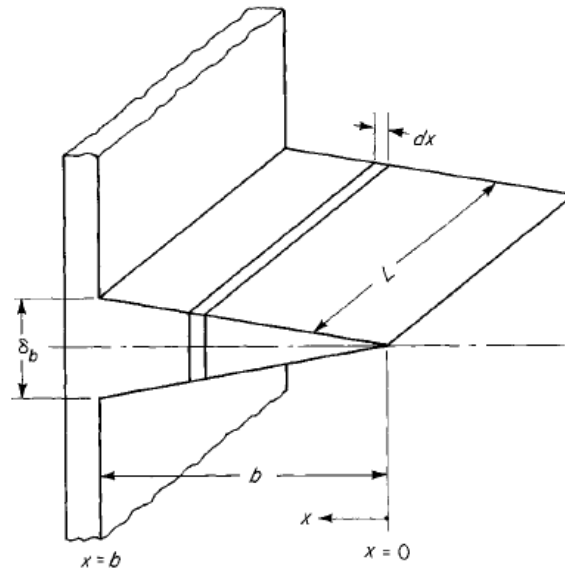


Figura 8 - Aleta longitudinal de perfil triangular (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

A temperatura na extremidade da aleta deve ser finita, ou seja, substituindo  $x = 0$  na Eq. (30), obtém-se:

$$\theta(x=0) = C_1 \underbrace{I_0(2m\sqrt{b0})}_{=1} + C_2 \underbrace{K_0(2m\sqrt{b0})}_{=\infty} = \text{finito} \Rightarrow C_2 = 0 \quad (31)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (13) e utilizando o resultado da Eq. (31) obtém-se:

$$\theta(x=b) = C_1 I_0(2m\sqrt{bb}) = \theta_b \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{I_0(2mb)} \quad (32)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (31-32) na Eq. (30) obtém-se:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{I_0(2m\sqrt{bx})}{I_0(2mb)} \quad (33)$$

A taxa real de transferência de calor na aleta pode ser calculada a partir da Eq. (14), ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} = k(\delta_b L) \frac{d}{dx} \left[ \theta_b \frac{I_0(2m\sqrt{bx})}{I_0(2mb)} \right]_{x=b} = \frac{k(\delta_b L)\theta_b}{I_0(2mb)} \frac{d}{dx} [I_0(2m\sqrt{bx})]_{x=b} \quad (34)$$

A derivada em com relação a  $x$  da Eq. (34) tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dx} [I_0(2m\sqrt{bx})] = \frac{mbI_1(2m\sqrt{bx})}{\sqrt{bx}} \Rightarrow \frac{d}{dx} [I_0(2m\sqrt{bx})]_{x=b} = mI_1(2mb) \quad (35)$$

Substituindo a Eq. (35) na Eq. (34) e rearranjando obtém-se:

$$q_b = \frac{k(\delta_b L)\theta_b m I_1(2mb)}{I_0(2mb)} = \underbrace{\frac{k\delta_b}{2h}}_{=m^2} \frac{2hL\theta_b m I_1(2mb)}{I_0(2mb)} = \frac{2hL\theta_b}{m} \frac{I_1(2mb)}{I_0(2mb)} \quad (36)$$

A taxa máxima de transferência de calor é obtida pelo denominador da Eq. (1), ou seja:

$$q_{\text{máximo,aleta}} = hA_{\text{superfíciealeta}} \theta_b = h\theta_b \int_0^b dA_{\text{superfíciealeta}}(x) = h\theta_b \int_0^b 2Ldx = h(2Lb)\theta_b \quad (37)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) com os resultados das Eqs. (36-37), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo,aleta}}} = \frac{\frac{2hL\theta_b}{m} \frac{I_1(2mb)}{I_0(2mb)}}{h(2Lb)\theta_b} = \frac{I_1(2mb)}{(mb)I_0(2mb)} \quad (38)$$

#### 6.4-ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL PARABÓLICO CÔNCAVO

Para a aleta longitudinal de perfil parabólico côncavo mostrada na Fig. (9), a equação do perfil é obtida substituindo  $n = \infty$  na Eq. (11), ou seja:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{\frac{(1-2, \infty)}{(1-\infty)}} = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{\frac{\infty}{\infty}} \quad (39)$$

Nota-se uma indeterminação do tipo  $\infty/\infty$  na Eq. (39) que pode ser contornada utilizando a regra de L'Hospital, ou seja,  $(1-2n)'/(1-n)' = 2$ , fornecendo então:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^2 \quad (40)$$

de tal forma que  $df_2(x)/dx = \delta_b x/b^2$ . Substituindo esses resultados na Eq. (10), multiplicando por  $(2b^2/\delta_b)$  e rearranjando obtém-se:

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2x \frac{d\theta}{dx} - \frac{2h}{k\delta_b} b^2 \theta = 0 \quad (41)$$

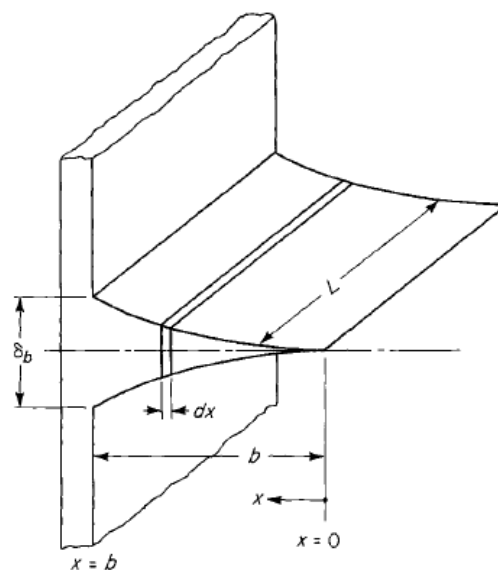


Figura 9 – Aleta longitudinal de perfil parabólico côncavo (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

A Eq. (41) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, conhecida por equação de Euler. A Eq. (41) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na mesma forma da Eq. (17). A solução geral da equação de Euler é obtida fazendo a transformação  $v = \ln x$  de tal forma que as derivadas da Eq. (41) possam ser reescritas como:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{d\theta}{dv} \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dv} \quad (42)$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d\theta}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dv} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\theta}{dv} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x} \frac{d(d\theta/dv)}{dx} \quad (43)$$

O segundo termo do lado direito da Eq. (43) pode ser avaliado de maneira similar à Eq. (42), ou seja:

$$\frac{d(d\theta/dv)}{dx} = \frac{d(d\theta/dv)}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{d^2\theta}{dv^2} \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \frac{d^2\theta}{dv^2} \quad (44)$$

Substituindo a Eq. (44) na Eq. (43) obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2\theta}{dv^2} \quad (45)$$

Substituindo as Eqs. (42) e (45) na Eq. (41) obtém-se:

$$x^2 \left( -\frac{1}{x^2} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2\theta}{dv^2} \right) + 2x \left( \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dv} \right) - m^2 b^2 \theta = 0 \quad (46)$$

Rearranjando a Eq. (46) obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dv^2} + \frac{d\theta}{dv} - m^2 b^2 \theta = 0 \quad (47)$$

Com a transformação  $v = \ln x$ , a Eq. (41) foi transformada em uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução é obtida pela equação característica. A equação característica tem a forma  $t^2 + t - m^2 b^2 = 0$ , cuja solução é obtida pela fórmula de Bhaskara, ou seja:

$$t = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (1 + 4m^2 b^2)^{1/2} \quad (48)$$

Para duas raízes reais e distintas ( $t_1$  e  $t_2$ ), a solução geral da Eq. (47) tem a seguinte forma:

$$\theta(v) = C_1 e^{t_1 v} + C_2 e^{t_2 v} \quad (49)$$

Voltando a Eq. (49) à variável original  $x$  e sabendo que  $e^{\ln x} = x$  obtém-se:

$$\theta(x) = C_1 e^{t_1 \ln x} + C_2 e^{t_2 \ln x} = C_1 x^{t_1} + C_2 x^{t_2} = C_1 x^{t_1} + \frac{C_2}{x^{-t_2}} \quad (50)$$

A temperatura na extremidade da aleta deve ser finita, ou seja, substituindo  $x = 0$  na Eq. (50), obtém-se:

$$\theta(x=0) = C_1 0^{t_1} + \underbrace{\frac{C_2}{0^{-t_2}}}_{\infty} = \text{finito} \Rightarrow C_2 = 0 \quad (51)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (13) e utilizando o resultado da Eq. (51) obtém-se:

$$\theta(x=b) = C_1 b^{t_1} = \theta_b \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{b^{t_1}} \quad (52)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (51-52) na Eq. (50) obtém-se:

$$\theta(x) = \theta_b \left( \frac{x}{b} \right)^{t_1} \quad (53)$$

A taxa real de transferência de calor na aleta pode ser calculada a partir da Eq. (14), ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=b} = k(\delta_b L) \frac{d}{dx} \left[ \theta_b \left( \frac{x}{b} \right)^{t_1} \right]_{x=b} = \frac{k\delta_b L \theta_b}{b^{t_1}} t_1 x^{t_1-1} \Big|_{x=b} = \frac{k(\delta_b L) \theta_b}{b} t_1 \quad (54)$$

A taxa máxima de transferência de calor é obtida pelo denominador da Eq. (1), ou seja:

$$q_{\text{máximo,aleta}} = hA_{\text{superfíciealeta}} \theta_b = h\theta_b \int_0^b dA_{\text{superfíciealeta}}(x) = h\theta_b \int_0^b 2L dx = h(2Lb)\theta_b \quad (55)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) e com os resultados das Eqs. (54-55), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo,aleta}}} = \frac{\frac{k(\delta_b L) \theta_b}{b} t_1}{h(2Lb) \theta_b} = \frac{k\delta_b}{2h} \frac{1}{b^2} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 + 4m^2 b^2)^{1/2} \right] = \frac{[-1 + \sqrt{1 + (2mb)^2}]}{\underbrace{\frac{2h}{k\delta_b}}_{=m^2} 2b^2} \quad (56)$$

Multiplicando e dividindo a Eq. (56) por  $-1 - \sqrt{1 + (2mb)^2}$  obtém-se:

$$\eta = \frac{[-1 + \sqrt{1 + (2mb)^2}]}{2(mb)^2} \times \frac{[-1 - \sqrt{1 + (2mb)^2}]}{[-1 - \sqrt{1 + (2mb)^2}]} \quad (57)$$

Rearranjando a Eq. (57) obtém-se:

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{1 + (2mb)^2} - \sqrt{1 + (2mb)^2} - (\sqrt{1 + (2mb)^2})^2}{2(mb)^2 [-1 - \sqrt{1 + (2mb)^2}]} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (2mb)^2}} \quad (58)$$

### 6.5-ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL PARABÓLICO CONVEXO

Para a aleta longitudinal de perfil parabólico côncavo mostrada na Fig. (10), a equação do perfil é obtida substituindo  $n = 1/3$  na Eq. (11), ou seja:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{\left( \frac{1-2\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \right)} = \frac{\delta_b}{2} \sqrt{\frac{x}{b}} \quad (59)$$

de tal forma que  $df_2(x)/dx = \delta_b/4\sqrt{bx}$ . Substituindo esses resultados na Eq. (10), multiplicando por  $(2\sqrt{b}x^{3/2}/\delta_b)$  e rearranjando obtém-se:

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{x}{2} \frac{d\theta}{dx} - \frac{2h}{k\delta_b} x^{3/2} \sqrt{b}\theta = 0 \quad (60)$$

A Eq. (60) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da equação geral de Bessel, conforme Apêndice. A Eq. (60) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na mesma forma da Eq. (17). Comparando a Eq. (60) com a Eq. (15) do Apêndice, obtém-se os seguintes coeficientes:  $A = 1/4$ ,  $B = 0$ ,  $C = 3/4$ ,  $D = i(4/3)mb^{1/4}$ ,  $p = (4/3)mb^{1/4}$  e  $n = 1/3$ . Esses resultados indicam o CASO 4, cuja solução é dada pela Eq. (19) do Apêndice, ou seja:

$$\theta(x) = x^{1/4} \left[ C_1 I_{1/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right) + C_2 I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right) \right] \quad (61)$$

Para essa aleta, por questão somente de exemplificação, será utilizada a condição de contorno de derivada dada pela Eq. (12). A derivada da Eq. (61) com relação a  $x$  pode ser determinada com o auxílio do MAPLE, fornecendo o seguinte resultado:

$$\frac{d\theta}{dx} = mb^{1/4} \left[ C_1 I_{-2/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right) + C_2 I_{2/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right) \right] \quad (62)$$

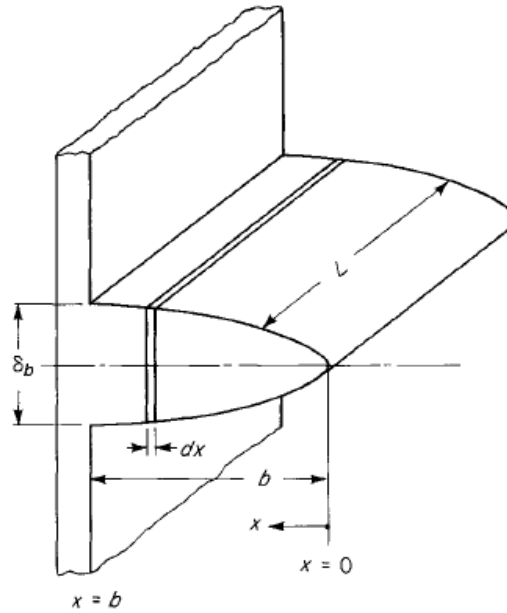


Figura 10 – Aleta longitudinal de perfil parabólico convexo (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (12) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = mb^{1/4} \left[ \underbrace{C_1 I_{-2/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} 0^{3/4} \right)}_{=\infty} + \underbrace{C_2 I_{2/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} 0^{3/4} \right)}_{=0} \right] = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (63)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (13) e substituindo o resultado da Eq. (63) na Eq. (61) obtém-se:

$$\theta(x=b) = b^{1/4} C_2 I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} b^{3/4} \right) = \theta_b \Rightarrow C_2 = \frac{\theta_b}{b^{1/4} I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb \right)} \quad (64)$$

Substituindo as Eqs. (63-64) na Eq. (61) e rearranjando obtém-se:

$$\theta(x) = \theta_b \left( \frac{x}{b} \right)^{1/4} \frac{I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right)}{I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb \right)} \quad (65)$$

A taxa real de transferência de calor na aleta pode ser calculada a partir da Eq. (14), ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} = k(\delta_b L) \frac{d}{dx} \left[ \theta_b \left( \frac{x}{b} \right)^{1/4} \frac{I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right)}{I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb \right)} \right]_{x=b} =$$

$$\frac{k(\delta_b L)\theta_b}{I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb \right)} \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{x}{b} \right)^{1/4} I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right) \right]_{x=b} \quad (66)$$

A derivada com relação a  $x$  do lado direito da Eq. (66) pode ser determinada com o auxílio do MAPLE, fornecendo o seguinte resultado:

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{x}{b} \right)^{1/4} I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{4} \frac{I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right)}{\left( \frac{x}{b} \right)^{3/4} b} + \frac{\left( \frac{x}{b} \right)^{1/4} \left[ I_{2/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right) - \frac{1}{4} \frac{I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right)}{mb^{1/4} x^{3/4}} \right]}{x^{1/4}} mb^{1/4} \quad (67)$$

Substituindo  $x = b$  na Eq. (67) e simplificando obtém-se:

$$\left. \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{x}{b} \right)^{1/4} I_{-1/3} \left( \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right) \right] \right|_{x=b} = m I_{2/3} \left( \frac{4}{3} mb \right) \quad (68)$$

Substituindo a Eq. (68) na Eq. (66) obtém-se:

$$q_b = k(\delta_b L)m\theta_b \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)} \quad (69)$$

A taxa máxima de transferência de calor é obtida pelo denominador da Eq. (1), ou seja:

$$q_{\text{máximo, aleta}} = hA_{\text{superfície aleta}}\theta_b = h\theta_b \int_0^b dA_{\text{superfície aleta}}(x) = h\theta_b \int_0^b 2Ldx = h(2Lb)\theta_b \quad (70)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) com os resultados das Eqs. (69-70), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo, aleta}}} = \frac{k(\delta_b L)m\theta_b \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)}}{h(2Lb)\theta_b} = \frac{m \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)}}{\underbrace{\frac{2h}{k\delta_b}}_{m^2} b} = \frac{1}{mb} \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)} \quad (71)$$

EXEMPLO 2: Aletas longitudinais de diferentes perfis estão expostas a um ambiente com temperatura de 20 °C com um coeficiente de transferência de calor  $h = 40 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . Em todos os casos, a temperatura da base da aleta é 90 °C e as aletas são feitas de aço com  $k = 30 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ . Todas as aletas têm um comprimento de 10 cm com 0,80 cm de espessura na base. Compare as eficiências das aletas, a dissipação de calor por unidade de profundidade e as temperaturas nas extremidades se os perfis são (a) retangular, (b) triangular, (c) parabólico côncavo e (d) parabólico convexo.

Para todas as aletas:

$$\theta_b = T_b - T_\infty = 90 - 20 = 70^\circ\text{C}$$

$$b = 10/100 = 0,100 \text{ m}$$

$$\delta_b = 0,80/100 = 0,008 \text{ m}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$m = \left( \frac{2h}{k\delta_b} \right)^{1/2} = \left( \frac{2.40}{30.0,008} \right)^{1/2} = 18,257 \text{ m}^{-1}$$

$$mb = 18,257.0,100 = 1,8257$$

(a) aleta longitudinal de perfil retangular:

$$\eta = \frac{\tanh(mb)}{mb} = \frac{\tanh(1,8257)}{1,8257} = 0,520$$

$$q_b = k(\delta_b L) m \theta_b \tanh(mb) = 30.(0,008.1).18,257.70.\tanh(1,8257) = 291,1 \text{ W}$$

$$\theta(x=0) = \theta_a = \theta_b \frac{\cosh(m0)}{\cosh(mb)} = 70 \frac{\cosh(18,257.0)}{\cosh(1,8257)} = 22,0^\circ\text{C}$$

$$\text{Assim, } T_a = \theta_a + T_\infty = 22,0 + 20 = 44^\circ\text{C}$$

(b) aleta longitudinal de perfil triangular:

$$2mb = 2.18,257.0,100 = 3,6514$$

$$\eta = \frac{I_1(3,6514)}{1,8257.I_0(3,6514)} = \frac{7,1159}{1,8257.8,3851} = 0,465$$

$$q_b = \frac{2hL\theta_b}{m} \frac{I_1(2mb)}{I_0(2mb)} = \frac{2.40.1.70}{18,257} \frac{I_1(3,6514)}{I_0(3,6514)} = 260,3 \text{ W}$$

$$\theta(x=0) = \theta_a = 70 \frac{I_0(2.18,257\sqrt{0,100.0})}{I_0(3,6514)} = \frac{70.1}{8,3851} = 8,3^\circ\text{C}$$

$$\text{Assim, } T_a = \theta_a + T_\infty = 8,3 + 20 = 28,3^\circ\text{C}$$

(c) aleta longitudinal de perfil parabólico côncavo:

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (2mb)^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (3,6514)^2}} = 0,418$$

Das Eqs. (53) e (47):

$$q_b = \frac{k\delta_b L \theta_b}{2b} [-1 + \sqrt{1 + (2mb)^2}] = \frac{30.0,008.1.70}{2.0,100} [-1 + \sqrt{1 + (3,6514)^2}] = 234,0 \text{ W}$$

$$\theta(x=a) = \theta_a = 70 \left( \frac{0}{0,100} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + (3,6514)^2}} = 0$$

$$\text{Assim, } T_a = \theta_a + T_\infty = 0 + 20 = 20^\circ\text{C}$$

(d) aleta longitudinal de perfil parabólico convexo:

$$\eta = \frac{1}{1,8257} \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3} \cdot 1,8257\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3} \cdot 1,8257\right)} = \frac{1}{1,8257} \cdot \frac{2,7425}{3,0519} = 0,492$$

$$q_b = k(\delta_b L)m\theta_b \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)} = 30.0,008.1.18,257.70 \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3} \cdot 1,8257\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3} \cdot 1,8257\right)} = 275,6 \text{ W}$$

$$\theta(x=a) = \theta_a = 70 \left( \frac{0}{0,100} \right)^{1/4} \frac{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3} \cdot 18,257 \cdot 0,1^{1/4} \cdot 0^{3/4}\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3} \cdot 1,8257\right)} = 0$$

$$\text{Assim, } T_a = \theta_a + T_\infty = 0 + 20 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

Segue abaixo um resumo do desempenho das quatro aletas:

| Perfil da aleta    | $\eta$ | $q_b$ (W) | $T_a$ (°C) |
|--------------------|--------|-----------|------------|
| Retangular         | 0,520  | 291,1     | 44,0       |
| Triangular         | 0,465  | 260,3     | 28,3       |
| Parabólico concavo | 0,418  | 234,0     | 20,0       |
| Parabólico convexo | 0,492  | 275,6     | 20,0       |

Na Fig. (11) podem ser vistas as curvas de eficiência para os quatro tipos de aletas longitudinais mostradas anteriormente. Essas curvas são representações das Eqs. (27), (38), (58) e (71), sendo todas funções do produto  $mb$ . É interessante notar que a aleta retangular é usualmente vantajosa pois tem geometria mais simples e maior eficiência que as outras aletas longitudinais para o mesmo produto  $mb$ .

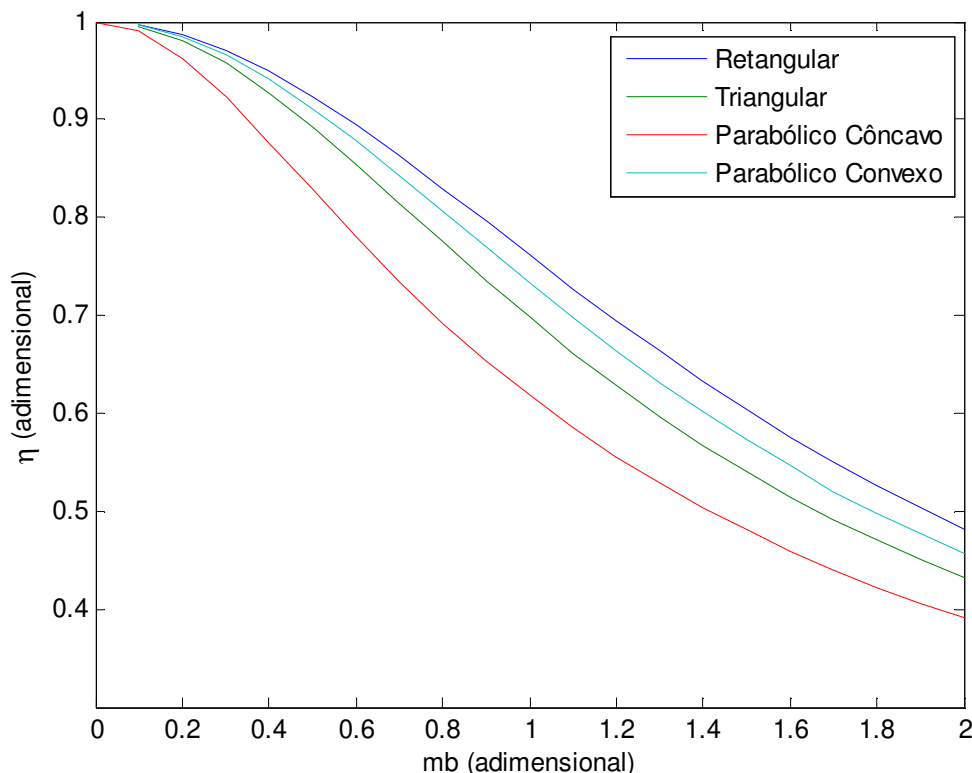


Figura 11 – Gráfico de eficiências para aletas longitudinais.

## 7-ALETAS RADIAIS

### 7.1-EQUAÇÃO DIFERENCIAL GENERALIZADA

Gardner (1945) propôs uma equação diferencial generalizada para a análise de aletas radiais. Para isso considere uma aleta radial de perfil arbitrário conforme mostrado na Fig. (12) e assuma que a aleta está dissipando calor para o meio circundante. Note que o eixo  $r$  está relacionado ao comprimento da aleta e tem a sua origem no centro do duto cilíndrico, tendo sua orientação positiva da base para a extremidade da aleta. O perfil da aleta mostrado na Fig. (12) está confinado por duas curvas que são quase sempre simétricas,  $y = f_2(r)$  e  $y = -f_2(r)$ , de tal maneira que a espessura da aleta é  $\delta(r) = 2f_2(r)$ . A seção transversal da aleta conforme Fig. (12) é  $A(r) = f_1(r) = (2\pi)2f_2(r)$ . Os limites da aleta são limitados pelas curvas de perfil da aleta,  $\pm f_2(r)$ .

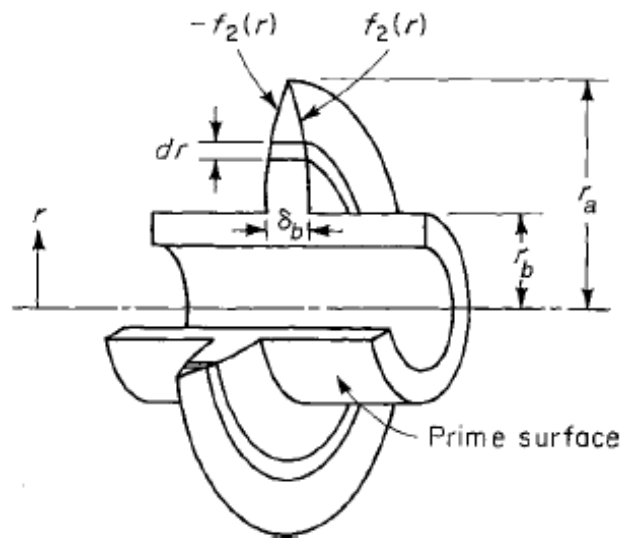


Figura 12 – Aleta radial de perfil arbitrário (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

Características na base da aleta, localizada em  $r = r_b$ , são designadas pela subscrito  $b$ . Por exemplo,  $\theta_b$ ,  $q_b$  e  $T_b$  representam o excesso de temperaturas, taxa de transferência de calor e temperatura da base da aleta, respectivamente. Características na extremidade da aleta, localizada em  $r = r_a$ , são designadas pelo subscrito  $a$  ( $\theta_a$ ,  $q_a$  e  $T_a$ ). Mantendo a idéia de trabalhar com a variável excesso de temperaturas, define-se  $\theta(r)$ , uma função da coordenada de comprimento  $r$ , como sendo a diferença de temperaturas ou excesso entre um ponto na superfície da aleta e o ambiente. Assim:

$$\theta(r) = T(r) - T_{\infty} \quad (72)$$

A equação diferencial para a distribuição de temperaturas na aleta radial é formulada através de um balanço de energia em um volume de controle diferencial de comprimento  $dr$  conforme mostrado na Fig. (12). Esse elemento diferencial está limitado por plano paralelos a base da aleta em  $r$  e  $r + dr$  e pelas curvas de perfil,  $y \pm f_2(r)$ . Se a temperatura da superfície da aleta é  $T(r)$ , de tal maneira que em  $dr$  a temperatura é  $T$  e a condutividade térmica da aleta é  $k$ , a diferença entre as taxas de condução entrando na aleta em  $r$  e saindo da aleta em  $r + dr$  é escrita como:

$$q_{\text{condução}} = q_r - q_{r+dr} = \left[ -kA(r) \frac{dT}{dr} \right]_r - \left[ -kA(r) \frac{dT}{dr} \right]_{r+dr} \quad (73)$$

A taxa de condução saindo da aleta em  $r + dr$  pode ser calculada em termos da taxa de condução entrando na aleta em  $r$  utilizando série de Taylor, ou seja:

$$\left[ -kA(r) \frac{dT}{dr} \right]_{r+dr} = \left[ -kA(r) \frac{dT}{dr} \right]_r + \frac{d}{dr} \left[ -kA(r) \frac{dT}{dr} \right]_r dr \quad (74)$$

Substituindo a Eq. (74) na Eq. (73) e rearranjando obtém-se:

$$q_{\text{condução}} = \left[ -kA(r) \frac{dT}{dr} \right]_r + \left[ kA(r) \frac{dT}{dr} \right]_r + \frac{d}{dr} \left[ kA(r) \frac{dT}{dr} \right]_r dr = \frac{d}{dr} \left[ kf_1(r) \frac{dT}{dr} \right] dr \quad (75)$$

Com a consideração de regime permanente, a diferença entre as taxas de condução entrando e saindo do elemento  $dr$ , conforme resultado da Eq. (75), deve ser equalizada por algum modo de dissipação de calor a partir da superfície lateral exposta da aleta. Se o calor é dissipado por convecção para o meio circundante e  $h$  é o coeficiente de transferência de calor, da lei do resfriamento de Newton obtém-se:

$$dq_{\text{convecção}} = h dA_{\text{superfíciealeta}}(r)(T - T_{\infty}) \quad (76)$$

Uma expressão para a área superficial de transferência de calor por convecção (lados superior e inferior da aleta radial) pode ser escrita como:

$$dA_{\text{superfíciealeta}}(r) = 2\pi(r + dr)^2 - 2\pi r^2 = 2\pi r^2 + 2\pi 2rdr + \underbrace{2\pi dr^2}_{\approx 0} - 2\pi r^2 = 4\pi r dr \quad (77)$$

A área superficial total pode ser obtida pela integração da Eq. (77) em  $r$ , ou seja:

$$A_{\text{superfíciealeta}} = \int_{r_b}^{r_a} 4\pi r dr = 2\pi(r_a^2 - r_b^2) \quad (78)$$

Substituindo a Eq. (77) na Eq. (76), igualando o resultado com a Eq. (75) e utilizando a definição da Eq. (72) obtém-se:

$$\frac{d}{dr} \left[ k f_1(r) \frac{d\theta}{dr} \right] dr = h(4\pi dr) \theta \quad (79)$$

Fazendo a derivada do produto na Eq. (79) e rearranjando obtém-se

$$\frac{f_1(r)}{4\pi} \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{4\pi} \frac{df_1(r)}{dr} \frac{d\theta}{dr} - \frac{h}{k} \theta = 0 \quad (80)$$

Com  $f_1(r) = 4\pi f_2(r)$  a Eq. (80) pode ser reescrita como:

$$f_2(r) \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{f_2(r)}{r} \frac{d\theta}{dr} + \frac{df_2(r)}{dr} \frac{d\theta}{dr} - \frac{h}{k} \theta = 0 \quad (81)$$

A Eq. (81) é a equação diferencial generalizada para aletas radiais. A Eq. (80) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea. Para sua solução geral são necessárias duas condições de contorno, ou seja:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_a} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_a} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta(r=r_a) = \text{finito} \quad (82)$$

$$T(r=r_b) = T_b \Rightarrow \theta(r=r_b) = T_b - T_\infty = \theta_b \quad (83)$$

A taxa real de transferência de calor da aleta pode ser calculada a partir da solução da Eq. (81) juntamente com as Eqs. (82-83) e posterior aplicação da lei de Fourier na base da aleta, ou seja:

$$q_b = -k A_{\text{base,aleta}} \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_b} = -k A_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_b} \quad (84)$$

A eficiência da aleta pode então ser calculada pela Eq. (1) juntamente com o resultado da Eq. (84).

## 7.2-ALETA RADIAL DE PERFIL RETANGULAR

Para a aleta radial de perfil retangular mostrada na Fig. (13), a equação do perfil tem a seguinte forma:

$$f_2(r) = \frac{\delta_b}{2} \quad (85)$$

de tal forma que  $df_2(r)/dr = 0$ . Substituindo esses resultados na Eq. (81), multiplicando por  $(2r^2/\delta_b)$  e rearranjando obtém-se:

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dr^2} + r \frac{d\theta}{dr} - r^2 \frac{2h}{k\delta_b} \theta = 0 \quad (86)$$

A Eq. (86) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da equação geral de Bessel, conforme Apêndice. A Eq. (86) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na mesma forma da Eq. (17). Comparando a Eq. (86) com a Eq. (A15) obtém-se os seguintes coeficientes:  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = im$ ,  $n = 0$  e  $p = m$ . Esses resultados indicam o CASO 3, cuja solução é dada pela Eq. (18) do Apêndice, ou seja:

$$\theta(r) = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr) \quad (87)$$

A derivada da Eq. (87) com relação a  $r$  é escrita da seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{dr} = mC_1 I_1(mr) - mC_2 K_1(mr) \quad (88)$$

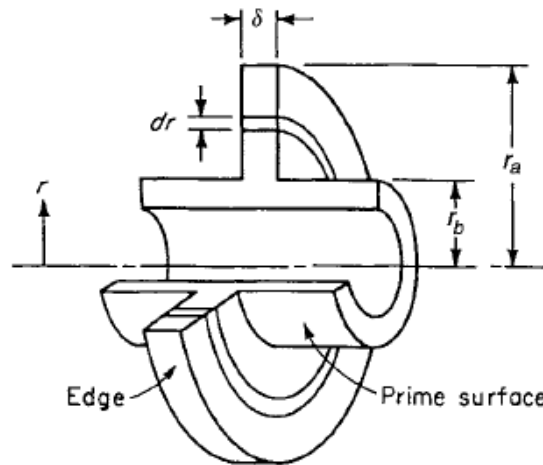


Figura 13 – Aleta radial de perfil retangular (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

A aplicação da condição de contorno dada pela Eq. (82) fornece que:

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_a} = mC_1 I_1(mr_a) - mC_2 K_1(mr_a) = 0 \quad (89)$$

A aplicação da condição de contorno dada pela Eq. (83) fornece que:

$$\theta(r = r_b) = C_1 I_0(mr_b) + C_2 K_0(mr_b) = \theta_b \quad (90)$$

As Eqs. (89-90) formam um sistema de duas equações e duas incógnitas para a obtenção de  $C_1$  e  $C_2$ , que após manipulação algébrica tem a seguinte forma:

$$C_1 = \theta_b \frac{K_1(mr_a)}{I_0(mr_b)K_1(mr_a) + I_1(mr_a)K_0(mr_b)} \quad (91)$$

$$C_2 = \theta_b \frac{I_1(mr_a)}{I_0(mr_b)K_1(mr_a) + I_1(mr_a)K_0(mr_b)} \quad (92)$$

Substituindo as Eqs. (91-92) na Eq. (87) e rearranjando obtém-se:

$$\theta(r) = \theta_b \frac{I_0(mr)K_1(mr_a) + I_1(mr_a)K_0(mr)}{I_0(mr_b)K_1(mr_a) + I_1(mr_a)K_0(mr_b)} \quad (93)$$

Deve ser notado na Eq. (92) que quando  $r = r_b$ ,  $\theta = \theta_b$ , conforme esperado. A taxa real de transferência de calor da aleta pode ser calculada a partir da Eq. (84), ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_b} = k(2\pi r_b \delta_b) m [C_1 I_1(mr) - C_2 K_1(mr)]_{r=r_b} \quad (94)$$

O termo entre colchetes do lado direito da Eq. (94) pode ser determinado utilizando as Eqs. (91-92), ou seja:

$$[C_1 I_1(mr) - C_2 K_1(mr)]_{r=r_b} = \theta_b \frac{I_1(mr_b) K_1(mr_a) - I_1(mr_a) K_1(mr_b)}{I_0(mr_b) K_1(mr_a) + I_1(mr_a) K_0(mr_b)} \quad (95)$$

Substituindo a Eq. (95) na Eq. (94) e rearranjando obtém-se:

$$q_b = -kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_b} = k(2\pi r_b \delta_b) m \theta_b \frac{I_1(mr_a) K_1(mr_b) - I_1(mr_b) K_1(mr_a)}{I_0(mr_b) K_1(mr_a) + I_1(mr_a) K_0(mr_b)} \quad (96)$$

A taxa máxima de transferência de calor obtida pelo denominador da Eq. (1) e o resultado da Eq. (78), ou seja:

$$q_{\text{máximo,aleta}} = hA_{\text{superfície,aleta}} \theta_b = h\theta_b \int_{r_b}^{r_a} dA_{\text{superfície}}(r) = h \int_{r_b}^{r_a} 4\pi r \theta_b dr = h[2\pi(r_a^2 - r_b^2)]\theta_b \quad (97)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) com os resultados das Eqs. (96-97), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo,aleta}}} = \frac{k(2\pi r_b \delta_b) m \theta_b \frac{I_1(mr_a) K_1(mr_b) - I_1(mr_b) K_1(mr_a)}{I_0(mr_b) K_1(mr_a) + I_1(mr_a) K_0(mr_b)}}{h[2\pi(r_a^2 - r_b^2)]\theta_b} =$$

$$\frac{2r_b m \frac{I_1(mr_a)K_1(mr_b) - I_1(mr_b)K_1(mr_a)}{I_0(mr_b)K_1(mr_a) + I_1(mr_a)K_0(mr_b)}}{\underbrace{\frac{2h}{k\delta_b}}_{m^2} (r_a^2 - r_b^2)} = \frac{2r_b}{m(r_a^2 - r_b^2)} \frac{I_1(mr_a)K_1(mr_b) - I_1(mr_b)K_1(mr_a)}{I_0(mr_b)K_1(mr_a) + I_1(mr_a)K_0(mr_b)} \quad (98)$$

A eficiência dada pela Eq. (98) não é adequada para comparação com eficiências de aletas radiais com outros perfis. Para isso, a Eq. (98) pode ser reescrita em termos da relação entre os raios interno e externo da seguinte forma:

$$\rho = \frac{r_b}{r_a} \quad (99)$$

e pelo parâmetro  $\phi$  definido por:

$$\phi = (r_a - r_b)^{3/2} \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} \quad (100)$$

onde  $A_p$  é a área projetada de perfil, que pode ser calculada pela função  $f_2(r)$ , ou seja:

$$A_p = \int_{r_a}^{r_b} 2f_2(r)dr = \int_{r_a}^{r_b} 2\left(\frac{\delta_b}{2}\right)dr = \delta_b(r_a - r_b) \quad (101)$$

Os argumentos  $mr_a$  e  $mr_b$  das funções de Bessel na Eq. (98) podem ser reescritos em termos da área projetada de perfil utilizando o resultado da Eq. (101):

$$mr_a = \left( \frac{2h}{k\delta_b} \right)^{1/2} r_a = \left[ \frac{2h(r_a - r_b)}{kA_p} \right]^{1/2} r_a = \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} (r_a - r_b)^{1/2} r_a \quad (102)$$

$$mr_b = \left( \frac{2h}{k\delta_b} \right)^{1/2} r_b = \left[ \frac{2h(r_a - r_b)}{kA_p} \right]^{1/2} r_b = \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} (r_a - r_b)^{1/2} r_b \quad (103)$$

Multiplicando e dividindo as Eqs. (102-103) por  $(r_a - r_b)$  e substituindo o parâmetro  $\phi$  definido pela Eq. (100) obtém-se:

$$mr_a = \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} (r_a - r_b)^{1/2} r_a \times \left( \frac{r_a - r_b}{r_a - r_b} \right) = (r_a - r_b)^{3/2} \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} \frac{r_a}{r_a - r_b} = \frac{\phi r_a}{r_a - r_b} \quad (104)$$

$$mr_b = \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} (r_a - r_b)^{1/2} r_b \times \left( \frac{r_a - r_b}{r_a - r_b} \right) = (r_a - r_b)^{3/2} \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} \frac{r_b}{r_a - r_b} = \frac{\phi r_b}{r_a - r_b} \quad (105)$$

Define-se duas funções adimensionais relacionadas aos raios na seguinte forma:

$$R_a = \frac{1}{1 - r_b/r_a} = \frac{1}{1 - \rho} \quad (106)$$

e

$$R_b = \rho R_a = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (107)$$

Reescrevendo as Eqs. (104) e (105) e substituindo as Eqs. (106-107) obtém-se:

$$mr_a = \frac{\phi r_a}{r_a - r_b} = \frac{\phi}{\frac{1}{r_a}(r_a - r_b)} = \frac{\phi}{1 - \frac{r_b}{r_a}} = \phi \frac{1}{1 - \rho} = \phi R_a \quad (108)$$

$$mr_b = \frac{\phi r_b}{r_a - r_b} = \frac{\phi}{\frac{1}{r_b}(r_a - r_b)} = \frac{\phi}{\frac{r_a}{r_b} - 1} = \frac{\phi}{\frac{1}{\rho} - 1} = \phi \frac{\rho}{1 - \rho} = \phi R_b \quad (109)$$

O termo  $[2r_b/m(r_a^2 - r_b^2)]$  da Eq. (98) pode ser reescrito utilizando as grandezas  $\rho$  e  $\phi$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{2r_b}{m(r_a^2 - r_b^2)} &= \frac{2r_b}{\left(\frac{2h}{k\delta_b}\right)^{1/2} (r_a^2 - r_b^2)} = \frac{2r_b}{\left[\frac{2h(r_a - r_b)}{kA_p}\right]^{1/2} (r_a^2 - r_b^2)} = \frac{2r_b(r_a - r_b)}{\left[\frac{2h(r_a - r_b)}{kA_p}\right]^{1/2} (r_a^2 - r_b^2)(r_a - r_b)} \\
&= \frac{2r_b(r_a - r_b)}{\left(\frac{2h}{kA_p}\right)^{1/2} (r_a - r_b)^{3/2} (r_a^2 - r_b^2)} = \frac{2r_b(r_a - r_b)}{\phi(r_a - r_b)(r_a + r_b)} = \frac{2r_b}{\phi(r_a + r_b)} = \frac{2}{\phi\left(\frac{1}{\rho} + 1\right)} = \frac{2\rho}{\phi(1 + \rho)} \quad (110)
\end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. (108-110) na Eq. (98) obtém-se:

$$\eta = \frac{2\rho}{\phi(1 + \rho)} \frac{I_1(\phi R_a)K_1(\phi R_b) - I_1(\phi R_b)K_1(\phi R_a)}{I_0(\phi R_b)K_1(\phi R_a) + I_1(\phi R_a)K_0(\phi R_b)} \quad (111)$$

EXEMPLO 3: Uma aleta radial de perfil retangular está exposta a um ambiente a uma temperatura de 35 °C e um coeficiente de transferência de calor  $h = 40 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . A temperatura na base da aleta é 110 °C e a aleta é feita de aço com  $k = 40 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ . O diâmetro externo é 25 cm e o diâmetro interno é 10 cm. A espessura é 0,25 cm. Determine (a) a eficiência da aleta, (b) a temperatura na extremidade da aleta e (c) a taxa de dissipação de calor pela aleta.

$$\theta_b = T_b - T_\infty = 110 - 35 = 75 \text{ °C}$$

$$\delta_b = 0,25/100 = 0,0025 \text{ m}$$

$$r_a = 25/200 = 0,125 \text{ m}$$

$$r_b = 10/200 = 0,050 \text{ m}$$

$$\rho = \frac{r_b}{r_a} = \frac{10}{25} = 0,400$$

$$m = \left(\frac{2h}{k\delta_b}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \cdot 40}{40 \cdot 0,0025}\right)^{1/2} = 28,284 \text{ m}^{-1}$$

$$A_p = \delta_b(r_a - r_b) = 0,0025(0,125 - 0,050) = 1,875 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\phi = (r_a - r_b)^{3/2} \left(\frac{2h}{kA_p}\right)^{1/2} = (0,125 - 0,050)^{3/2} \left(\frac{2 \cdot 40}{40 \cdot 1,875 \times 10^{-4}}\right)^{1/2} = 2,121$$

$$\phi R_a = \frac{\phi}{1-\rho} = \frac{2,121}{1-0,400} = 3,536$$

$$\phi R_b = \frac{\rho\phi}{1-\rho} = \frac{0,400.2,121}{1-0,400} = 1,414$$

$$(a) \quad \eta = \frac{2\rho}{\phi(1+\rho)} \frac{I_1(\phi R_a)K_1(\phi R_b) - I_1(\phi R_b)K_1(\phi R_a)}{I_0(\phi R_b)K_1(\phi R_a) + I_1(\phi R_a)K_0(\phi R_b)} =$$

$$\frac{2.0,400}{2,121(1+0,400)} \frac{I_1(3,536)K_1(1,414) - I_1(1,414)K_1(3,536)}{I_0(1,414)K_1(3,536) + I_1(3,536)K_0(1,414)}$$

Na equação anterior é necessária a avaliação de seis funções de Bessel, ou seja:

$$I_1(3,536) = 6,4110; \quad K_1(1,414) = 0,3143; \quad I_1(1,414) = 0,8990$$

$$K_1(3,536) = 0,0213; \quad I_0(1,414) = 1,5659; \quad K_0(1,414) = 0,2392$$

$$\eta = \frac{2.0,400}{2,121(1+0,400)} \frac{6,4110.0,3143 - 0,8990.0,0213}{1,5659.0,0213 + 6,4110.0,2392} = 0,343$$

$$(b) \quad \theta(r=r_a) = \theta_a = \theta_b \frac{I_0(\phi R_a)K_1(\phi R_a) + I_1(\phi R_a)K_0(\phi R_a)}{I_0(\phi R_b)K_1(\phi R_a) + I_1(\phi R_a)K_0(\phi R_b)} =$$

$$75 \frac{I_0(3,536)K_1(3,536) + I_1(3,536)K_0(3,536)}{I_0(1,414)K_1(3,536) + I_1(3,536)K_0(1,414)}$$

Devem ser avaliadas mais duas funções de Bessel, ou seja:

$$I_0(3,536) = 7,6053; \quad K_0(3,536) = 0,0188$$

$$\theta_a = 75 \frac{7,6053.0,0213 + 6,4110.0,0188}{1,5659.0,0213 + 6,4110.0,2392} = 13,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{Assim, } T_a = \theta_a + T_\infty = 13,5 + 35 = 48,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$(c) \quad q_b = \eta q_{\text{máximo, aleta}} = \eta h [2\pi(r_a^2 - r_b^2)] \theta_b = 0,343.40.[2.\pi.(0,125^2 - 0,050^2)].75 = 84,9 \text{ W}$$

### 7.3-ALETA RADIAL DE PERFIL HIPERBÓLICO

Para a aleta radial de perfil hiperbólico mostrada na Fig. (14), a equação do perfil tem a seguinte forma:

$$f_2(r) = \frac{\delta_b r_b}{2r} \quad (112)$$

de tal forma que  $df_2(r)/dr = -\delta_b r_b / 2r^2$ . Substituindo esses resultados na Eq. (81), multiplicando por  $(2r^3/\delta_b r_b)$  e rearranjando obtém-se:

$$r^2 \frac{d^2 \theta}{dr^2} - \frac{2h}{k\delta_b r_b} r^3 \theta = 0 \quad (113)$$

A Eq. (113) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da equação geral de Bessel, conforme Apêndice. A Eq. (113) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na mesma forma da Eq. (17) e definindo um parâmetro  $M$  escrito da seguinte forma:

$$M^2 = \frac{m^2}{r_b} \quad (114)$$

Assim, a Eq. (113) pode ser reescrita como:

$$r^2 \frac{d^2 \theta}{dr^2} - M^2 r^3 \theta = 0 \quad (115)$$

Comparando a Eq. (115) com a Eq. (A15) obtém-se os seguintes coeficientes:

$A = 1/2$ ,  $B = 0$ ,  $C = 3/2$ ,  $D = i\frac{2}{3}M$ ,  $p = \frac{2}{3}M$  e  $n = 1/3$ . Esses resultados indicam o

CASO 4, cuja solução geral é dada pela Eq. (A19), ou seja:

$$\theta(r) = r^{1/2} \left[ C_1 I_{1/3} \left( \frac{2}{3} M r^{3/2} \right) + C_2 I_{-1/3} \left( \frac{2}{3} M r^{3/2} \right) \right] \quad (116)$$

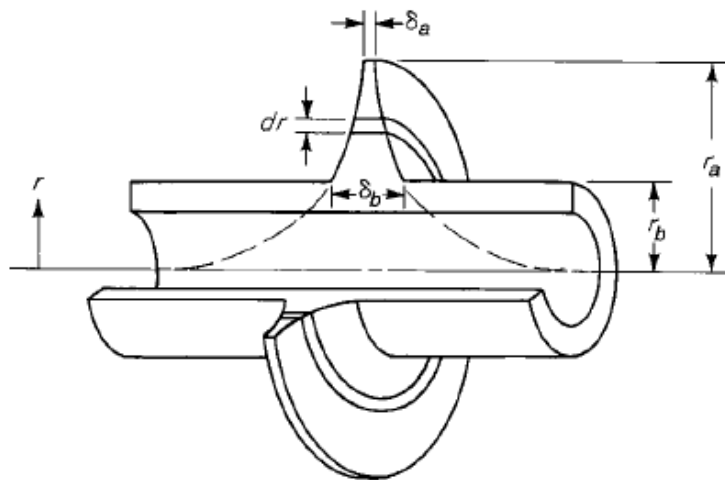


Figura 14 – Eficiência de uma aleta radial de perfil hiperbólico (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

A derivada da Eq. (116) com relação a  $r$  pode ser determinada com o auxílio do MAPLE, fornecendo o seguinte resultado:

$$\frac{d\theta}{dr} = Mr \left[ C_1 I_{-2/3} \left( \frac{2}{3} Mr^{3/2} \right) + C_2 I_{2/3} \left( \frac{2}{3} Mr^{3/2} \right) \right] \quad (117)$$

A aplicação da condição de contorno dada pela Eq. (82) fornece que:

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_a} = Mr_a \left[ C_1 I_{-2/3} \left( \frac{2}{3} Mr_a^{3/2} \right) + C_2 I_{2/3} \left( \frac{2}{3} Mr_a^{3/2} \right) \right] = 0 \quad (118)$$

A aplicação da condição de contorno dada pela Eq. (83) fornece que:

$$\theta(r = r_b) = r_b^{1/2} \left[ C_1 I_{1/3} \left( \frac{2}{3} Mr_b^{3/2} \right) + C_2 I_{-1/3} \left( \frac{2}{3} Mr_b^{3/2} \right) \right] = \theta_b \quad (119)$$

As Eqs. (118-119) formam um sistema de duas equações e duas incógnitas para a obtenção de  $C_1$  e  $C_2$ , que após manipulação algébrica tem a seguinte forma:

$$C_1 = \frac{\theta_b}{r_b^{1/2}} \frac{I_{2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)}{I_{2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}Mr_b^{3/2}\right) - I_{-2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}Mr_b^{3/2}\right)} \quad (120)$$

$$C_2 = -\frac{\theta_b}{r_b^{1/2}} \frac{I_{-2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)}{I_{2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}Mr_b^{3/2}\right) - I_{-2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}Mr_b^{3/2}\right)} \quad (121)$$

Substituindo as Eqs. (120-121) na Eq. (116) e rearranjando obtém-se:

$$\theta(r) = \theta_b \Lambda \left( \frac{r}{r_b} \right)^{1/2} \quad (122)$$

onde:

$$\Lambda = \left[ \frac{I_{2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}Mr^{3/2}\right) - I_{-2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}Mr^{3/2}\right)}{I_{2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}Mr_b^{3/2}\right) - I_{-2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}Mr_b^{3/2}\right)} \right]$$

Deve ser notado na Eq. (122) que quando  $r = r_b$ ,  $\theta = \theta_b$ , conforme esperado. A taxa real de transferência de calor da aleta pode ser calculada a partir da Eq. (84), ou seja:

$$q_b = -kA_{\text{aleta,base}} \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_b} = -k(2\pi r_b \delta_b) \left\{ Mr \left[ C_1 I_{-2/3}\left(\frac{2}{3}Mr^{3/2}\right) + C_2 I_{2/3}\left(\frac{2}{3}Mr^{3/2}\right) \right] \right\}_{r=r_b} \quad (123)$$

Substituindo as Eqs. (120-121) na Eq. (123) e rearranjando obtém-se:

$$q_b = k(2\pi \delta_b r_b^{3/2}) \theta_b M \psi \quad (124)$$

onde:

$$\psi = \left[ \frac{I_{2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{-2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_b^{3/2}\right) - I_{-2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_b^{3/2}\right)}{I_{-2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}Mr_b^{3/2}\right) - I_{2/3}\left(\frac{2}{3}Mr_a^{3/2}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}Mr_b^{3/2}\right)} \right]$$

A taxa máxima de transferência de calor obtida pelo denominador da Eq. (1) e o resultado da Eq. (78), ou seja:

$$q_{\text{máximo,alda}} = hA_{\text{superfície,alda}}\theta_b = h\theta_b \int_{r_b}^{r_a} dA_{\text{superfície}}(r) = h \int_{r_b}^{r_a} 4\pi r \theta_b dr = h[2\pi(r_a^2 - r_b^2)]\theta_b \quad (125)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) e os resultados das Eqs. (124-125), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo,aleta}}} = \frac{k(2\pi\delta_b r_b^{3/2})\theta_b M\psi}{h[2\pi(r_a^2 - r_b^2)]\theta_b} = \frac{2M\psi r_b^{3/2}}{\underbrace{\frac{2h}{k\delta_b}}_{m^2}(r_a^2 - r_b^2)} = \frac{2m\psi}{m^2(r_a^2 - r_b^2)} \frac{r_b^{3/2}}{r_b^{1/2}} = \frac{2r_b\psi}{m(r_a^2 - r_b^2)} \quad (126)$$

A eficiência dada pela Eq. (126) não é adequada para comparação com eficiências de aletas radiais com outros perfis. Entretanto, a Eq. (126) pode ser reescrita em termos da relação entre raios  $\rho = r_b/r_a$ . Calcula-se inicialmente uma expressão para a área de perfil da aleta em função de  $f_2(r)$ , ou seja:

$$A_p = \int_{r_a}^{r_b} 2f_2(r)dr = \int_{r_a}^{r_b} 2\left(\frac{\delta_b r_b}{2r}\right)dr = \delta_b r_b \ln \frac{r_a}{r_b} = \delta_b r_b \ln \frac{1}{\rho} \quad (127)$$

Da Eq. (127) pode-se explicitar a espessura da aleta na base, ou seja:

$$\delta_b = \frac{A_p}{r_b \ln(1/\rho)} \quad (128)$$

Substituindo a Eq. (128) na Eq. (17) obtém-se:

$$m = \left( \frac{2h}{k\delta_b} \right)^{1/2} = \left[ \frac{2hr_b \ln(1/\rho)}{kA_p} \right]^{1/2} \quad (129)$$

e

$$M = \frac{m}{r_b^{1/2}} = \frac{1}{r_b^{1/2}} \left[ \frac{2hr_b \ln(1/\rho)}{kA_p} \right]^{1/2} = \left[ \frac{2h \ln(1/\rho)}{kA_p} \right]^{1/2} \quad (130)$$

Da Eq. (126), excluindo  $\psi$  e substituindo a Eq. (129), o termo restante do lado direito da expressão da eficiência pode ser reescrito como:

$$\frac{2r_b}{m(r_a^2 - r_b^2)} = \frac{2r_b^{1/2}}{\left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} \left[ \ln\left( \frac{1}{\rho} \right) \right]^{1/2} (r_a - r_b)(r_a + r_b)} = \frac{2r_b^{1/2}(r_a - r_b)^{1/2}}{(r_a - r_b)^{3/2} \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} \left[ \ln\left( \frac{1}{\rho} \right) \right]^{1/2} (r_a + r_b)} \quad (131)$$

Substituindo a Eq. (100) na Eq. (131) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{2r_b}{m(r_a^2 - r_b^2)} = \frac{2r_b^{1/2}(r_a - r_b)^{1/2}}{\phi [\ln(1/\rho)]^{1/2} (r_a + r_b)} = \frac{2r_b^{1/2} r_a^{1/2} (1 - r_b/r_a)^{1/2}}{\phi [\ln(1/\rho)]^{1/2} r_a (1 + r_b/r_a)} = \frac{1}{\phi} \left[ \frac{4\rho(1-\rho)}{(1+\rho)^2 \ln(1/\rho)} \right]^{1/2} \quad (132)$$

Define-se duas funções adimensionais relacionadas aos raios:

$$R_b = \frac{2}{3} M r_b^{3/2} \quad (133)$$

e

$$R_a = \frac{2}{3} M r_a^{3/2} \quad (134)$$

podendo-se expressar  $R_b$  e  $R_a$  em termos de  $\phi$  e  $\rho$  da seguinte forma:

$$R_b = \frac{2}{3} M r_b^{3/2} = \frac{2}{3} \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} \left( \ln \frac{1}{\rho} \right)^{1/2} r_b^{3/2} = \frac{2}{3} \phi \left( \ln \frac{1}{\rho} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right)^{3/2} \quad (135)$$

$$R_a = \frac{2}{3} M r_a^{3/2} = \frac{2}{3} \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} \left( \ln \frac{1}{\rho} \right)^{1/2} r_a^{3/2} = \frac{2}{3} \phi \left( \ln \frac{1}{\rho} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{3/2} \quad (136)$$

Substituindo as Eqs (132, 135-136) na Eq. (126) obtém-se:

$$\eta = \frac{1}{\phi} \zeta \left[ \frac{4\rho(1-\rho)}{(1+\rho)^2 \ln(1/\rho)} \right]^{1/2} \quad (137)$$

onde

$$\zeta = \left[ \frac{I_{2/3}(R_a)I_{-2/3}(R_b) - I_{-2/3}(R_a)I_{2/3}(R_b)}{I_{-2/3}(R_a)I_{-1/3}(R_b) - I_{2/3}(R_a)I_{1/3}(R_b)} \right]$$

Na Fig. (15) podem ser vistas as curvas de eficiência para os dois tipos de aletas radiais mostradas anteriormente. Essas curvas são representações das Eqs. (111) e (137), sendo todas funções de  $\phi$  e plotadas para  $\rho = 0,8$  e  $\rho = 0,4$ .

## 8-ALETAS PINIFORMES

### 8.1-EQUAÇÃO DIFERENCIAL GENERALIZADA

Gardner (1945) propôs uma equação diferencial generalizada para a análise de aletas piniformes. Para isso considere uma aleta piniforme de perfil arbitrário conforme mostrado na Fig. (16) e assuma que a aleta está dissipando calor para o meio circundante. Note que o eixo  $x$  está relacionado ao comprimento da aleta e tem a sua origem na extremidade da aleta, tendo sua orientação positiva da extremidade para a base da aleta. O perfil da aleta mostrado na Fig. (16) está confinado por duas curvas que são quase sempre simétricas,  $y = f_2(x)$  e  $y = -f_2(x)$ . A seção transversal da aleta

conforme a Fig. (16) é  $A(x) = f_1(x) = \pi[f_2(x)]^2$  e o perímetro da seção transversal é  $P(x) = f_3(x) = 2\pi f_2(x)$ . Os limites da aleta são limitados pelas curvas de perfil da aleta,  $\pm f_2(x)$ .

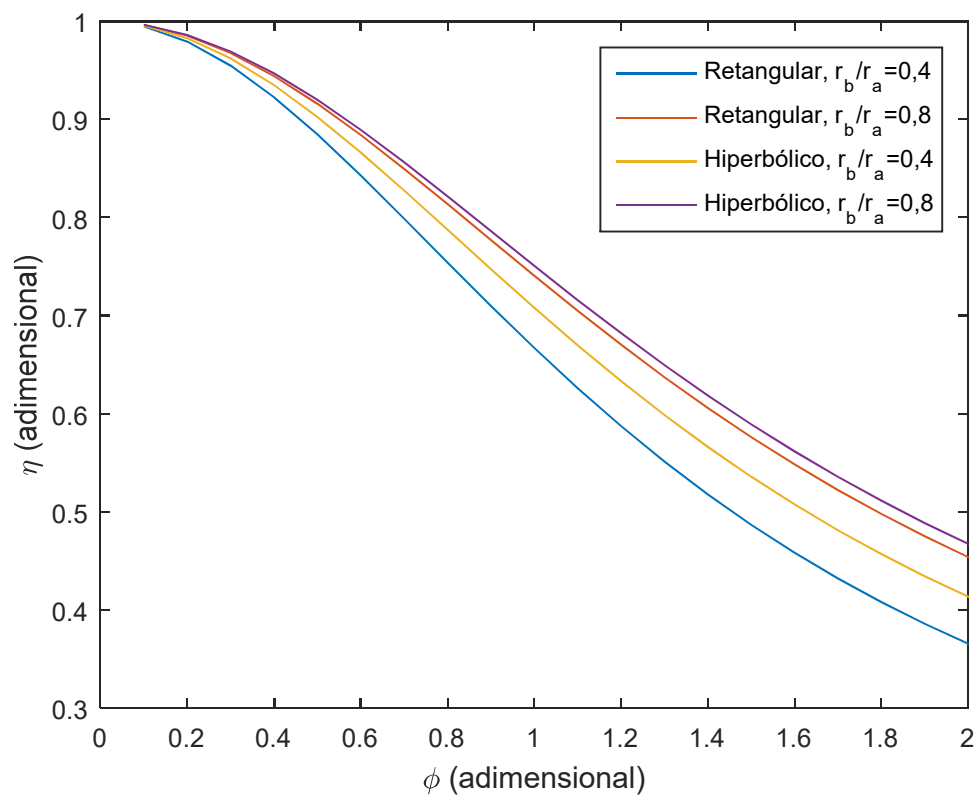


Figura 15 – Gráfico de eficiências para aletas radiais.

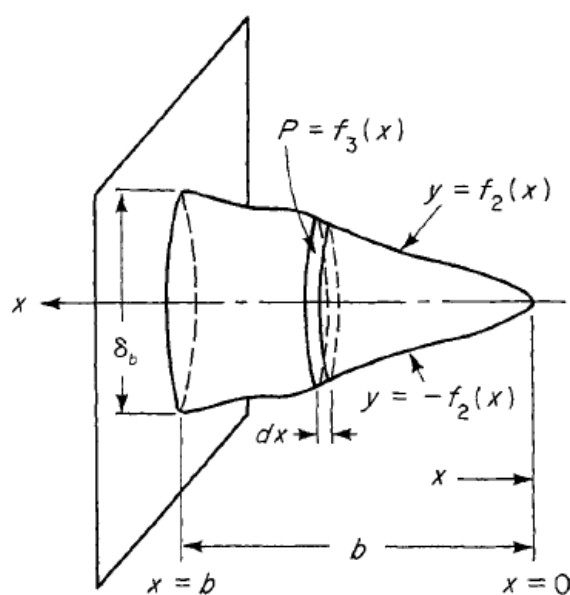


Figura 16 – Aleta piniforme de perfil arbitrário (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

Características na base da aleta, localizada em  $x=b$ , são designadas pela subscrito  $b$ . Por exemplo,  $\theta_b$ ,  $q_b$  e  $T_b$  representam o excesso de temperaturas, taxa de transferência de calor e temperatura da base da aleta, respectivamente. Características na extremidade da aleta, localizada em  $x=0$ , são designadas pelo subscrito  $a$  ( $\theta_a$ ,  $q_a$  e  $T_a$ ). Mantendo a idéia de trabalhar com a variável excesso de temperaturas, define-se  $T(x)$ , uma função da coordenada de comprimento  $x$ , como sendo a diferença de temperaturas ou excesso entre um ponto na superfície da aleta e o ambiente. Assim:

$$\theta(x) = T(x) - T_{\infty} \quad (138)$$

A equação diferencial para a distribuição de temperaturas na aleta piniforme é formulada através de um balanço de energia em um volume de controle diferencial de comprimento  $dx$  conforme mostrado na Fig. (16). Esse elemento diferencial está limitado por plano paralelos a base da aleta em  $x$  e  $x+dx$  e pelas curvas de perfil,  $y \pm f_2(x)$ . Se a temperatura da superfície da aleta é  $T(x)$ , de tal maneira que em  $dx$  a temperatura é  $T$  e a condutividade térmica da aleta é  $k$ , a diferença entre as taxas de condução entrando na aleta em  $x+dx$  e saindo da aleta em  $x$  é escrita como:

$$q_{\text{condução}} = q_{x+dx} - q_x = \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} - \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_x \quad (139)$$

A taxa de condução saindo da aleta em  $x$  pode ser calculada em termos da taxa de condução entrando na aleta em  $x+dx$  utilizando série de Taylor, ou seja:

$$\left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_x = \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} - \frac{d}{dx} \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} dx \quad (140)$$

Substituindo a Eq. (140) na Eq. (139) e rearranjando obtém-se:

$$q_{\text{condução}} = \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} - \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} + \frac{d}{dx} \left[ kA(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} dx = k \frac{d}{dx} \left[ f_1(x) \frac{dT}{dx} \right] dx \quad (141)$$

Na hipótese de regime permanente, a diferença entre as taxas de condução entrando e saindo do elemento  $dx$ , conforme resultado da Eq. (141), deve ser equalizada por algum modo de dissipação de calor a partir da superfície lateral exposta da aleta. Se o calor é dissipado por convecção para o meio circundante e  $h$  é o coeficiente de transferência de calor, da lei do resfriamento de Newton obtém-se:

$$dq_{\text{convecção}} = h dA_{\text{superfíciealeta}}(x)(T - T_{\infty}) \quad (142)$$

Uma expressão para a área superficial de transferência de calor por convecção pode ser escrita como:

$$dA_{\text{superfíciealeta}}(x) = P(x)dx = f_3(x)dx \quad (143)$$

Substituindo a Eq. (143) na Eq. (142), igualando o resultado com a Eq. (141) e utilizando a definição da Eq. (138) obtém-se:

$$k \frac{d}{dx} \left[ f_1(x) \frac{d\theta}{dx} \right] dx = h f_3(x) \theta dx \quad (144)$$

Fazendo a derivada do produto na Eq. (144) e rearranjando obtém-se

$$f_1(x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{df_1(x)}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{h f_3(x)}{k} \theta = 0 \quad (145)$$

Com  $f_1(x) = \pi [f_2(x)]^2$  e  $f_3(x) = 2\pi f_2(x)$ , válidas para pinos circulares, a Eq. (145) pode ser reescrita como:

$$[f_2(x)]^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d}{dx} [f_2(x)]^2 \frac{d\theta}{dx} - \frac{2h f_2(x)}{k} \theta = 0 \quad (146)$$

A Eq. (146) é a equação diferencial generalizada para aletas piniformes. Entretanto, a Eq. (146) é adequada para pinos de áreas circulares conforme as definições

utilizadas para  $f_1(x)$  e  $f_3(x)$ . Para áreas de seção transversal mais gerais, recomenda-se a utilização da Eq. (145) utilizando a definição adequada das funções  $f_1(x)$  e  $f_3(x)$ . Conforme Gardner (1945), a função de perfil  $f_2(x)$  para aletas piniformes usualmente tem a seguinte forma:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{(1-2n)/(2-n)} \quad (147)$$

onde  $\delta_b$  é a espessura da aleta na base (que pode ser substituída pelo diâmetro da aleta na base) e  $n$  é um número real que define o perfil da aleta piniforme. A Eq. (146) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes ou variáveis, linear e homogênea. Para sua solução geral são necessárias duas condições de contorno, ou seja:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta(x=a) = \text{finito} \quad (148)$$

$$T(x=b) = T_b \Rightarrow \theta(x=b) = T_b - T_\infty = \theta_b \quad (149)$$

A taxa real de transferência de calor da aleta pode ser calculada a partir da solução da Eq. (146) juntamente com as Eqs. (148-149) e posterior aplicação da lei de Fourier na base da aleta, ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=b} = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} \quad (150)$$

A eficiência da aleta pode então ser calculada pela Eq. (1) juntamente com o resultado da Eq. (150).

## 8.2-ALETA PINIFORME DE PERFIL CILÍNDRICO

Para a aleta piniforme cilíndrica mostrada na Fig. (17), a equação do perfil é obtida substituindo  $n = 1/2$  na Eq. (147) e fazendo  $\delta_b = d$ , ou seja:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{\left( \frac{1-2 \cdot \frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} \right)} = \frac{\delta_b}{2} = \frac{d}{2} \quad (151)$$

de tal forma que  $df_2(x)/dx = 0$ ,  $[f_2(x)]^2 = d^2/4$  e  $d[f_2(x)]^2/dx = 0$ . Substituindo esses resultados na Eq. (146), multiplicando todos os termos por  $(4/d^2)$  e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{4h}{kd}\theta = 0 \quad (152)$$

A Eq. (152) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da técnica da equação característica. A Eq. (152) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na forma:

$$m = \left( \frac{4h}{kd} \right)^{1/2} \quad (153)$$

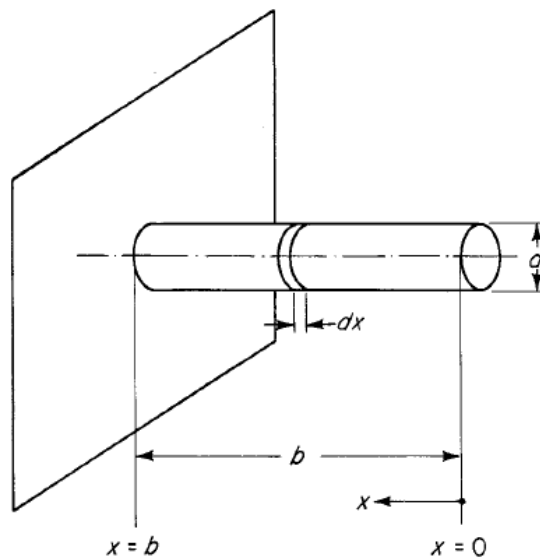


Figura 17 – Aleta piniforme de perfil cilíndrico (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

A equação característica é escrita como  $t^2 - m^2 = 0$  de forma que  $t = \pm m$ . Para duas raízes reais e distintas, a solução da Eq. (153) tem a seguinte forma:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (154)$$

A derivada da Eq. (154) com relação a  $x$  tem a seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx} \quad (155)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (148) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = mC_1 e^{m0} - mC_2 e^{-m0} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \quad (156)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (149) e utilizando o resultado da Eq. (156) obtém-se:

$$\theta(x=b) = C_1 e^{mb} + C_1 e^{-mb} = \theta_b \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (157)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (156-157) na Eq. (154) obtém-se:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (158)$$

Sabendo que  $e^{mx} + e^{-mx} = 2 \cosh(mx)$  e  $e^{mb} + e^{-mb} = 2 \cosh(mb)$  pode-se reescrever a Eq (158) na seguinte forma:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{\cosh(mx)}{\cosh(mb)} \quad (159)$$

A taxa real de transferência de calor na aleta pode ser calculada a partir da Eq. (150), ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} = k \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) m C_1 (e^{mb} - e^{-mb}) = k \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) m \theta_b \frac{e^{mb} - e^{-mb}}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (160)$$

Sabendo que  $e^{mb} + e^{-mb} = 2 \cosh(mb)$  e  $e^{mb} - e^{-mb} = 2 \sinh(mb)$  pode-se reescrever a Eq. (160) na seguinte forma:

$$q_b = k \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) m \theta_b \tanh(mb) \quad (161)$$

A taxa máxima de transferência de calor é obtida pelo denominador da Eq. (1), ou seja:

$$q_{\text{máximo,aleta}} = hA_{\text{superfície,aleta}} \theta_b = h \theta_b \int_0^b dA_{\text{superfície}}(x) = h \theta_b \int_0^b (\pi d) dx = h(\pi d b) \theta_b \quad (162)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) com os resultados das Eqs. (161-162), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo,aleta}}} = \frac{k \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) m \theta_b \tanh(mb)}{h(\pi d b) \theta_b} = \frac{m \tanh(mb)}{\frac{4h}{\underbrace{kd}_{=m^2}} b} = \frac{\tanh(mb)}{mb} \quad (163)$$

**EXEMPLO 4:** Uma barra cilíndrica é utilizada como uma aleta na forma de pino. Seu diâmetro é 0,875 cm e seu comprimento é 8 cm. A barra é fabricada de aço com  $k = 32 \text{ W/(m.K)}$  e exposta a um meio com temperatura de  $30 \text{ °C}$  com coeficiente de transferência de calor  $h = 50 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$ . A temperatura da base da aleta piniforme é  $85 \text{ °C}$ . Determine: (a) a eficiência da aleta, (b) a temperatura da extremidade e (c) a taxa de transferência de calor da aleta para o meio.

$$\theta_b = T_b - T_\infty = 85 - 30 = 55^\circ\text{C}$$

$$d = 0,875/100 = 8,75 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$b = 8/100 = 0,08 \text{ m}$$

$$m = \left( \frac{4h}{kd} \right)^{1/2} = \left( \frac{4.50}{32.8,75 \times 10^{-3}} \right)^{1/2} = 26,726 \text{ m}^{-1}$$

$$\eta = \frac{\tanh(mb)}{mb} = \frac{\tanh(26,726.0,08)}{(26,726.0,08)} = 0,455$$

$$\theta_a = \theta_b \frac{\cosh(m0)}{\cosh(mb)} = 55 \frac{\cosh(26,726.0)}{\cosh(26,726.0,08)} = 12,8^\circ\text{C}$$

$$T_a = \theta_a + T_\infty = 12,8 + 30 = 42,8^\circ\text{C}$$

$$q_b = k \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) m \theta_b \tanh(mb) = 32 \cdot \frac{\pi (8,75 \times 10^{-3})^2}{4} \cdot 26,726 \cdot 55 \cdot \tanh(26,726.0,08) = 2,75 \text{ W}$$

ou,

$$q_{\text{máximo,aleta}} = h(\pi db) \theta_b = 50 \cdot (\pi \cdot 8,75 \times 10^{-3} \cdot 0,08) \cdot 55 = 6,05 \text{ W}$$

$$q_b = \eta q_{\text{máximo,aleta}} = 0,455 \cdot 6,05 = 2,75 \text{ W}$$

### 8.3-ALETA PINIFORME DE PERFIL RETANGULAR

Para a aleta piniforme retangular mostrada na Fig. (18), a solução mais adequada é utilizar a Eq. (145) definindo as funções  $f_1(x)$  e  $f_3(x)$  na seguinte forma:

$$f_1(x) = \delta_1 \delta_2 \quad \text{e} \quad \frac{df_1(x)}{dx} = 0 \quad (164)$$

$$f_3(x) = 2(\delta_1 + \delta_2) \quad (165)$$

Substituindo as Eqs. (164-165) na Eq. (145), multiplicando por  $(1/\delta_1 \delta_2)$  e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{2h(\delta_1 + \delta_2)}{k \delta_1 \delta_2} \theta = 0 \quad (166)$$

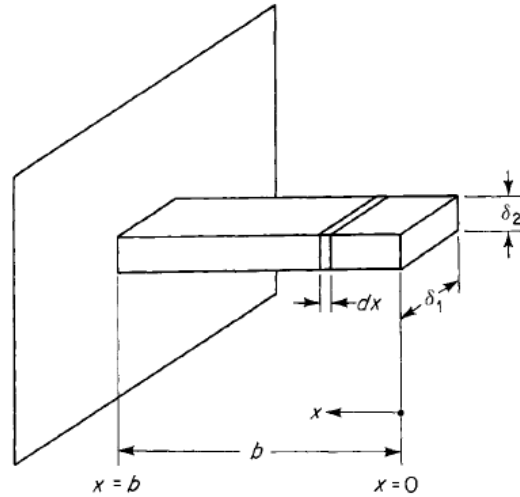


Figura 18 – Aleta piniforme de perfil retangular (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

A Eq. (166) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da técnica da equação característica. A Eq. (166) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na forma:

$$m = \left[ \frac{2h(\delta_1 + \delta_2)}{k\delta_1\delta_2} \right]^{1/2} \quad (167)$$

A equação característica é escrita como  $t^2 - m^2 = 0$  de forma que  $t = \pm m$ . Para duas raízes reais e distintas, a solução da Eq. (166) tem a seguinte forma:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (168)$$

A derivada da Eq. (168) com relação a  $x$  tem a seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx} \quad (169)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (148) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = mC_1 e^{m0} - mC_2 e^{-m0} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \quad (170)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (149) e utilizando o resultado da Eq. (170) obtém-se:

$$\theta(x=b) = C_1 e^{mb} + C_1 e^{-mb} = \theta_b \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (171)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (170-171) na Eq. (168) obtém-se:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (172)$$

Sabendo que  $e^{mx} + e^{-mx} = 2 \cosh(mx)$  e  $e^{mb} + e^{-mb} = 2 \cosh(mb)$  pode-se reescrever a Eq (172) na seguinte forma:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{\cosh(mx)}{\cosh(mb)} \quad (173)$$

A taxa real de transferência de calor da aleta pode ser calculada a partir da Eq. (150), ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} = k(\delta_1 \delta_2) m C_1 (e^{mb} - e^{-mb}) = k(\delta_1 \delta_2) m \theta_b \frac{e^{mb} - e^{-mb}}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (174)$$

Sabendo que  $e^{mb} + e^{-mb} = 2 \cosh(mb)$  e  $e^{mb} - e^{-mb} = 2 \sinh(mb)$  pode-se reescrever a Eq. (174) na seguinte forma:

$$q_b = k(\delta_1 \delta_2) m \theta_b \tanh(mb) \quad (175)$$

A taxa máxima de transferência de calor é obtida pelo denominador da Eq. (1), ou seja:

$$q_{\text{máximo, aleta}} = h A_{\text{superfície aleta}} \theta_b = h \theta_b \int_0^b dA_{\text{superfície aleta}}(x) =$$

$$h \theta_b \int_0^b 2(\delta_1 + \delta_2) dx = h[2(\delta_1 + \delta_2)b] \theta_b \quad (176)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) com os resultados das Eqs. (175-176), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo, aleta}}} = \frac{k(\delta_1 \delta_2) m \theta_b \tanh(mb)}{h[2(\delta_1 + \delta_2)b] \theta_b} = \frac{m \tanh(mb)}{\underbrace{\frac{2h(\delta_1 + \delta_2)}{k\delta_1 \delta_2} b}_{=m^2}} = \frac{\tanh(mb)}{(mb)} \quad (177)$$

#### 8.4-ALETA PINIFORME DE PERFIL ELÍPTICO

Para a aleta piniforme elíptica mostrada na Fig. (19), a solução mais adequada é utilizar a Eq. (145) definindo as funções  $f_1(x)$  e  $f_3(x)$  na seguinte forma:

$$f_1(x) = \pi \delta_1 \delta_2 \quad \text{e} \quad \frac{df_1(x)}{dx} = 0 \quad (178)$$

$$f_3(x) = \pi(\delta_1 + \delta_2) \left( 1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{64} + \frac{p^6}{256} + \dots \right) \quad (179)$$

onde:

$$p = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \quad (180)$$

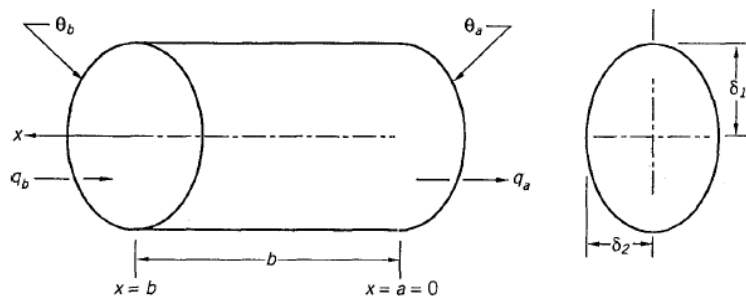


Figura 19 – Aleta piniforme de perfil elíptico (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

Substituindo as Eqs. (178-179) na Eq. (145), multiplicando por  $(1/\pi\delta_1\delta_2)$  e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{h(\delta_1 + \delta_2)}{k\delta_1\delta_2} \left( 1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{64} + \frac{p^6}{256} + \dots \right) \theta = 0 \quad (181)$$

A Eq. (181) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da técnica da equação característica. A Eq. (181) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na forma:

$$m = \left[ \frac{h(\delta_1 + \delta_2)}{k\delta_1\delta_2} \left( 1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{64} + \frac{p^6}{256} + \dots \right) \right]^{1/2} \quad (182)$$

A equação característica é escrita como  $t^2 - m^2 = 0$  de forma que  $t = \pm m$ . Para duas raízes reais e distintas, a solução da Eq. (181) tem a seguinte forma:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (183)$$

A derivada da Eq. (183) com relação a  $x$  tem a seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx} \quad (184)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (148) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = mC_1 e^{m0} - mC_2 e^{-m0} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \quad (185)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (149) e utilizando o resultado da Eq. (185) obtém-se:

$$\theta(x=b) = C_1 e^{mb} + C_1 e^{-mb} = \theta_b \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (186)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (185-186) na Eq. (183) obtém-se:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (187)$$

Sabendo que  $e^{mx} + e^{-mx} = 2 \cosh(mx)$  e  $e^{mb} + e^{-mb} = 2 \cosh(mb)$  pode-se reescrever a Eq (187) na seguinte forma:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{\cosh(mx)}{\cosh(mb)} \quad (188)$$

A taxa real de transferência de calor da aleta pode ser calculada a partir da Eq. (150), ou seja:

$$q_b = k A_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} = k \pi \delta_1 \delta_2 m C_1 (e^{mb} - e^{-mb}) = k \pi \delta_1 \delta_2 m \frac{\theta_b}{e^{mb} + e^{-mb}} (e^{mb} - e^{-mb}) \quad (189)$$

Substituindo a definição de  $\cosh x$ , sabendo que  $\sinh x = (1/2)(e^x - e^{-x})$ , substituindo esse resultado na Eq. (188) e rearranjando obtém-se:

$$q_b = k(\pi \delta_1 \delta_2) m \theta_b \tanh(mb) \quad (190)$$

A taxa máxima de transferência de calor é obtida pelo denominador da Eq. (1), ou seja:

$$q_{\text{máximo,aleta}} = h A_{\text{superfíciealeta}} \theta_b = h \theta_b \int_0^b dA_{\text{superfíciealeta}}(x) = h \theta_b \int_0^b \pi(\delta_1 + \delta_2) \left( 1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{64} + \frac{p^6}{256} + \dots \right) dx = h \left[ b \pi(\delta_1 + \delta_2) \left( 1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{64} + \frac{p^6}{256} + \dots \right) \right] \theta_b \quad (191)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) com os resultados das Eqs. (190-191), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo,aleta}}} = \frac{k(\pi\delta_1\delta_2)m\theta_b \tanh(mb)}{h \left[ \pi(\delta_1 + \delta_2) \left( 1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{64} + \frac{p^6}{256} + \dots \right) \right] b \theta_b}$$

$$\frac{\frac{m \tanh(mb)}{\frac{h(\delta_1 + \delta_2)}{k\delta_1\delta_2} \left( 1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{64} + \frac{p^6}{256} + \dots \right) b}}{=m^2} = \frac{\tanh(mb)}{mb} \quad (192)$$

### 8.5-ALETA PINIFORME DE PERFIL CÔNICO

Para a aleta piniforme cônica mostrada na Fig. (20), a equação do perfil é obtida substituindo  $n = -1$  na Eq. (147), ou seja:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{\frac{[1-2,(-1)]}{[2-(-1)]}} = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right) \quad (193)$$

de tal forma que  $\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{\delta_b}{2b}$ ,  $[f_2(x)]^2 = \left( \frac{\delta_b x}{2b} \right)^2$  e  $\frac{d[f_2(x)]^2}{dx} = \frac{x}{2} \left( \frac{\delta_b}{b} \right)^2$ . Substituindo esses resultados na Eq. (146), multiplicando por  $(4b^2/\delta_b^2)$  e rearranjando obtém-se:

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2x \frac{d\theta}{dx} - 2 \frac{2h}{k\delta_b} bx\theta = 0 \quad (194)$$

A Eq. (194) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da equação geral de Bessel, conforme o Apêndice. A Eq. (194) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na forma  $m^2 = (2h/k\delta_b)$  e definindo um parâmetro  $M$  escrito da seguinte forma:

$$M^2 = 2m^2b \quad (195)$$

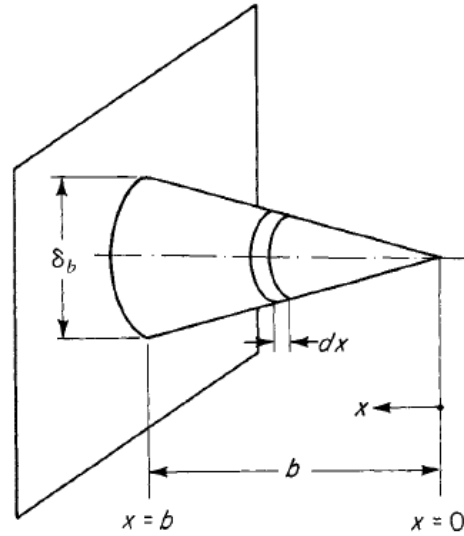


Figura 20 – Aleta piniforme de perfil cônico (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

Assim, a Eq. (194) pode ser reescrita como:

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2x \frac{d\theta}{dx} - M^2 x \theta = 0 \quad (196)$$

Comparando a Eq. (196) com a Eq. (A15) obtém-se os seguintes coeficientes:  $A = -1/2$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1/2$ ,  $D = i2M$ ,  $p = 2M$  e  $n = 1$ . Esses resultados indicam o CASO 3, cuja solução geral é dada pela Eq. (A18), ou seja:

$$\theta(x) = x^{-1/2} [C_1 I_1(2M\sqrt{x}) + C_2 K_1(2M\sqrt{x})] \quad (197)$$

Na Eq. (197), para que existe um excesso de temperaturas finito em  $x=0$ ,  $C_2$  deve ser nulo pois o termo  $K_1(2M\sqrt{x})/\sqrt{x}$  tendo ao infinito. Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (149) e substituindo  $C_2 = 0$  na Eq. (197) obtém-se:

$$\theta(x=b) = b^{-1/2} C_1 I_1(2M\sqrt{b}) = \theta_b \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{b^{-1/2} I_1(2M\sqrt{b})} \quad (198)$$

Substituindo a Eq. (198) na Eq. (197) e rearranjando obtém-se:

$$\theta(x) = \theta_b \left( \frac{b}{x} \right)^{1/2} \frac{I_1(2M\sqrt{x})}{I_1(2M\sqrt{b})} \quad (199)$$

A taxa real de transferência de calor na aleta pode ser calculada a partir da Eq. (150), ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=b} = k \left( \frac{\pi \delta_b^2}{4} \right) \frac{d}{dx} \left[ \theta_b \left( \frac{b}{x} \right)^{1/2} \frac{I_1(2M\sqrt{x})}{I_1(2M\sqrt{b})} \right]_{x=b} =$$

$$k \left( \frac{\pi \delta_b^2}{4} \right) \frac{\theta_b}{I_1(2M\sqrt{b})} \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{b}{x} \right)^{1/2} I_1(2M\sqrt{x}) \right]_{x=b} \quad (200)$$

A derivada com relação a  $x$  do lado direito da Eq. (200) pode ser determinada com o auxílio do MAPLE, fornecendo o seguinte resultado:

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{b}{x} \right)^{1/2} I_1(2M\sqrt{x}) \right] = \frac{b[-I_1(2M\sqrt{x}) + M\sqrt{x}I_0(2M\sqrt{x})]}{x^2\sqrt{b/x}} \quad (201)$$

Substituindo  $x = b$  na Eq. (201) e simplificando obtém-se:

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{b}{x} \right)^{1/2} I_1(2M\sqrt{x}) \right]_{x=b} = \frac{M}{\sqrt{b}} \left[ I_0(2M\sqrt{b}) - \frac{I_1(2M\sqrt{b})}{M\sqrt{b}} \right] \quad (202)$$

Substituindo a Eq. (202) na Eq. (200), utilizando a relação de recorrência

$$I_2(x) = I_0(x) - \left( \frac{2}{x} \right) I_1(x) \text{ com } x = 2M\sqrt{b} \text{ e rearranjando obtém-se:}$$

$$q_b = k \left( \frac{\pi \delta_b^2}{4} \right) \frac{\theta_b}{I_1(2M\sqrt{b})} \frac{M}{\sqrt{b}} I_2(2M\sqrt{b}) = k \left( \frac{\pi \delta_b^2}{4} \right) \frac{M}{\sqrt{b}} \theta_b \frac{I_2(2M\sqrt{b})}{I_1(2M\sqrt{b})} \quad (203)$$

A taxa máxima de transferência de calor é obtida pelo denominador da Eq. (1), ou seja:

$$q_{\text{máximo,aleta}} = hA_{\text{superfície,aleta}}\theta_b = h\theta_b \int_0^b f_3(x)dx = h\theta_b \int_0^b 2\pi f_2(x)dx =$$

$$h\theta_b \int_0^b 2\pi \frac{\delta_b}{2} \left(\frac{x}{b}\right) dx = h \left(\frac{\pi}{2} \delta_b b\right) \theta_b \quad (204)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) com os resultados das Eqs. (203-204) e pela definição de  $M$  da Eq. (195), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo,aleta}}} = \frac{k \left(\frac{\pi \delta_b^2}{4}\right) \frac{M}{\sqrt{b}} \theta_b \frac{I_2(2M\sqrt{b})}{I_1(2M\sqrt{b})}}{h \left(\frac{\pi}{2} \delta_b b\right) \theta_b} = \frac{m \sqrt{2} I_2(2\sqrt{2}mb)}{\underbrace{\frac{2h}{k \delta_b}}_{=m^2} b I_1(2\sqrt{2}mb)} = \frac{\sqrt{2} I_2(2\sqrt{2}mb)}{(mb) I_1(2\sqrt{2}mb)} \quad (205)$$

## 8.6-ALETA PINIFORME DE PERFIL PARABÓLICO CÔNCAVO

Para a aleta piniforme de perfil parabólico côncavo mostrada na Fig. (21), a equação do perfil é obtida substituindo  $n = \infty$  na Eq. (147), ou seja:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{(1-2,\infty)}{(2-\infty)}} = \frac{\delta_b}{2} \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{\infty}{\infty}} \quad (206)$$

Nota-se uma indeterminação do tipo  $\infty/\infty$  que pode ser contornada utilizando a regra de L'Hospital, ou seja,  $(1-2n)/(2-n) = 2$ , fornecendo que:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left(\frac{x}{b}\right)^2 \quad (207)$$

de tal forma que  $\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{\delta_b x}{b^2}$ ,  $[f_2(x)]^2 = \left(\frac{\delta_b}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{b}\right)^4$  e  $\frac{d[f_2(x)]^2}{dx} = \left(\frac{\delta_b}{2}\right)^2 \frac{4x^3}{b^4}$ .

Substituindo esses resultados na Eq. (145), multiplicando por  $(b^2/\delta_b)$  e rearranjando obtém-se:

$$x^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + 4x \frac{d\theta}{dx} - 2 \frac{2h}{k\delta_b} b^2 \theta = 0 \quad (208)$$

A Eq. (208) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na forma  $m^2 = (2h/k\delta_b)$  e definindo um parâmetro  $M$  escrito da seguinte forma:

$$M^2 = 2m^2 b^2 \quad (209)$$

Assim, a Eq. (208) pode ser reescrita como:

$$x^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + 4x \frac{d\theta}{dx} - M^2 \theta = 0 \quad (210)$$

A Eq. (210) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, conhecida por equação de Euler. A solução geral da equação de Euler é obtida fazendo a transformação  $v = \ln x$  de tal forma que as derivadas da Eq. (210) possam ser reescritas como:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{d\theta}{dv} \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dv} \quad (211)$$

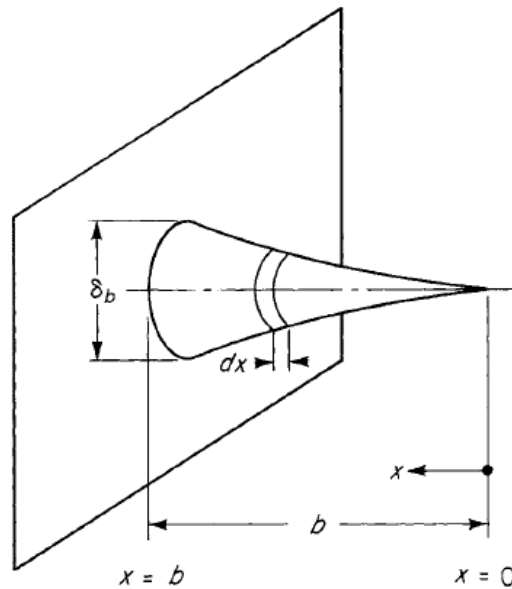


Figura 21 – Aleta piniforme de perfil parabólico côncavo (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d\theta}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dv} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\theta}{dv} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x} \frac{d(d\theta/dv)}{dx} \quad (212)$$

O segundo termo do lado direito da Eq. (212) pode ser avaliado de maneira similar à Eq. (211), ou seja:

$$\frac{d(d\theta/dv)}{dx} = \frac{d(d\theta/dv)}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{d^2\theta}{dv^2} \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x} \frac{d^2\theta}{dv^2} \quad (213)$$

Substituindo a Eq. (213) na Eq. (212) obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2\theta}{dv^2} \quad (214)$$

Substituindo as Eqs. (210) e (214) na Eq. (210) obtém-se:

$$x^2 \left( -\frac{1}{x^2} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2\theta}{dv^2} \right) + 4x \left( \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dv} \right) - M^2 \theta = 0 \quad (215)$$

Rearranjando a Eq. (215) obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dv^2} + 3 \frac{d\theta}{dv} - M^2 \theta = 0 \quad (216)$$

Com a transformação  $v = \ln x$ , a Eq. (210) foi transformada em uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução é obtida pela equação característica. A equação característica é escrita como  $t^2 + 3t - M^2 = 0$ , cuja solução é obtida pela fórmula de Bhaskara:

$$t = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} (9 + 4M^2)^{1/2} \quad (217)$$

Para duas raízes reais e distintas ( $t_1$  e  $t_2$ ), a solução geral da Eq. (216) tem a seguinte forma:

$$\theta(v) = C_1 e^{t_1 v} + C_2 e^{t_2 v} \quad (218)$$

Voltando a Eq. (218) à variável original  $x$  e sabendo que  $e^{\ln x} = x$  obtém-se:

$$\theta(x) = C_1 e^{t_1 \ln x} + C_2 e^{t_2 \ln x} = C_1 x^{t_1} + C_2 x^{t_2} = C_1 x^{t_1} + \frac{C_2}{x^{-t_2}} \quad (219)$$

A temperatura na extremidade da aleta deve ser finita e da Eq. (219) tem-se então:

$$\theta(x=0) = C_1 \underbrace{0^{t_1}}_{\infty} + \frac{C_2}{0^{-t_2}} = \text{finito} \Rightarrow C_2 = 0 \quad (220)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (149) e utilizando o resultado da Eq. (220) obtém-se:

$$\theta(x=b) = C_1 b^{t_1} = \theta_b \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{b^{t_1}} \quad (221)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (220-221) na Eq. (219) obtém-se:

$$\theta(x) = \theta_b \left( \frac{x}{b} \right)^{t_1} \quad (222)$$

A taxa real de transferência de calor da aleta pode ser calculada a partir da Eq. (150), ou seja:

$$q_b = k A_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} = k \left( \frac{\pi \delta_b^2}{4} \right) \frac{d}{dx} \left[ \theta_b \left( \frac{x}{b} \right)^{t_1} \right]_{x=b} = \frac{\pi k \delta_b^2 \theta_b}{8b} [-3 + (9 + 4M^2)^{1/2}] \quad (223)$$

A taxa máxima de transferência de calor é obtida pelo denominador da Eq. (1), ou seja:

$$q_{\text{máximo,alda}} = hA_{\text{superfíciealeta}} \theta_b = h \theta_b \int_0^b f_3(x) d(x) = h \theta_b \int_0^b 2\pi f_2(x) d(x) =$$

$$h \theta_b \int_0^b 2\pi \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^2 d(x) = h \left( \frac{\pi}{3} \delta_b b \right) \theta_b \quad (224)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) com os resultados das Eqs. (223-224), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo,aleta}}} = \frac{\frac{\pi k \delta_b^2 \theta_b}{8b} [-3 + (9 + 4M^2)^{1/2}]}{h \left( \frac{\pi}{3} \delta_b b \right) \theta_b} = \frac{3k \delta_b}{8hb^2} [-3 + (9 + 4M^2)^{1/2}] =$$

$$\frac{3}{4 \frac{2h}{k \delta_b} b^2} [-3 + \sqrt{9 + 8(mb)^2}] = \frac{3}{4(mb)^2} [-3 + \sqrt{9 + 8(mb)^2}] \quad (225)$$

$\underbrace{k \delta_b}_{=m^2}$

Multiplicando e dividindo a Eq. (225) por  $[-3 - \sqrt{9 + 8(mb)^2}]$  obtém-se:

$$\eta = \frac{3[-3 + \sqrt{9 + 8(mb)^2}]}{4(mb)^2} \times \frac{[-3 - \sqrt{9 + 8(mb)^2}]}{[-3 - \sqrt{9 + 8(mb)^2}]} \quad (226)$$

Rearranjando a Eq. (226) obtém-se:

$$\eta = \frac{9 + 3\sqrt{9 + 8(mb)^2} - 3\sqrt{9 + 8(mb)^2} - (\sqrt{9 + 8(mb)^2})^2}{\frac{4}{3}(mb)^2} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{9}(mb)^2}} \quad (227)$$

## 8.7-ALETA PINIFORME DE PERFIL PARABÓLICO CONVEXO

Para a aleta piniforme de perfil parabólico côncavo mostrada na Fig. (22), a equação do perfil é obtida substituindo  $n = 0$  na Eq. (147), ou seja:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{\frac{1-2.0}{2-0}} = \frac{\delta_b}{2} \left( \frac{x}{b} \right)^{1/2} \quad (228)$$

de tal forma que  $\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{\delta_b}{4} \left( \frac{1}{bx} \right)^{1/2}$ ,  $[f_2(x)]^2 = \left( \frac{\delta_b}{2} \right)^2 \left( \frac{x}{b} \right)$  e  $\frac{d[f_2(x)]^2}{dx} = \frac{1}{b} \left( \frac{\delta_b}{2} \right)^2$ .

Substituindo esses resultados na Eq. (146), multiplicando por  $(4bx/\delta_b^2)$  e rearranjando obtém-se:

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + x \frac{d\theta}{dx} - 2 \frac{2h}{k\delta_b} b^{1/2} x^{3/2} \theta = 0 \quad (229)$$

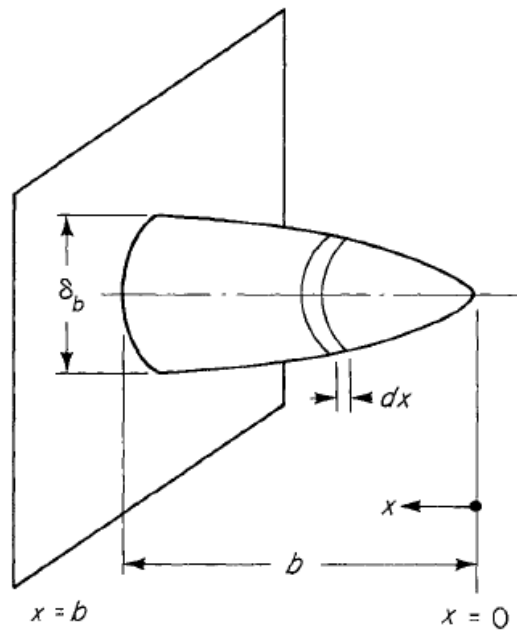


Figura 22 – Aleta piniforme de perfil parabólico convexo (Fonte: Kraus *et al.*, 2001).

A Eq. (229) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da equação geral de Bessel, conforme o Apêndice. A Eq. (229) pode ser simplificada definindo o parâmetro de desempenho da aleta na forma  $m^2 = (2h/k\delta_b)$  e definindo um parâmetro  $M$  escrito da seguinte forma:

$$M^2 = 2m^2b^{1/2} \quad (230)$$

Assim, a Eq. (229) pode ser reescrita como:

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + x \frac{d\theta}{dx} - M^2 x^{3/2} \theta = 0 \quad (231)$$

Comparando a Eq. (231) com a Eq. (A15) obtém-se os seguintes coeficientes:

$A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 3/4$ ,  $D = i\frac{4}{3}M$ ,  $p = \frac{4}{3}M$  e  $n = 0$ . e Esses resultados indicam o CASO 3, cuja solução geral é dada pela Eq. (A18), ou seja:

$$\theta(x) = C_1 I_0 \left( \frac{4}{3} M x^{3/4} \right) + C_2 K_0 \left( \frac{4}{3} M x^{3/4} \right) \quad (232)$$

A temperatura na extremidade da aleta deve ser finita, ou seja, substituindo  $x = 0$  na Eq. (232), obtém-se:

$$\theta(x=0) = C_1 \underbrace{I_0 \left( \frac{4}{3} M 0^{3/4} \right)}_{=1} + C_2 \underbrace{K_0 \left( \frac{4}{3} M 0^{3/4} \right)}_{=\infty} = \text{finito} \Rightarrow C_2 = 0 \quad (233)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (149) e substituindo o resultado da Eq. (233) na Eq. (232) obtém-se:

$$\theta(x=b) = C_1 I_0 \left( \frac{4}{3} M b^{3/4} \right) = \theta_b \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{I_0 \left( \frac{4}{3} M b^{3/4} \right)} \quad (234)$$

Substituindo as Eqs. (233-234) na Eq. (232) e rearranjando obtém-se:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{I_0\left(\frac{4}{3}Mx^{3/4}\right)}{I_0\left(\frac{4}{3}Mb^{3/4}\right)} \quad (235)$$

A taxa real de transferência de calor na aleta pode ser calculada a partir da Eq. (150), ou seja:

$$q_b = kA_{\text{base,aleta}} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=b} = k \left( \frac{\pi \delta_b^2}{4} \right) \frac{d}{dx} \left[ \theta_b \frac{I_0\left(\frac{4}{3}Mx^{3/4}\right)}{I_0\left(\frac{4}{3}Mb^{3/4}\right)} \right]_{x=b} =$$

$$k \left( \frac{\pi \delta_b^2}{4} \right) \frac{\theta_b}{I_0\left(\frac{4}{3}Mb^{3/4}\right)} \frac{d}{dx} \left[ I_0\left(\frac{4}{3}Mx^{3/4}\right) \right]_{x=b} \quad (236)$$

A derivada com relação a  $x$  do lado direito da Eq. (236) pode ser determinada com o auxílio do MAPLE, fornecendo o seguinte resultado:

$$\frac{d}{dx} \left[ I_0\left(\frac{4}{3}Mx^{3/4}\right) \right] = M \frac{I_1\left(\frac{4}{3}Mx^{3/4}\right)}{x^{1/4}} \quad (237)$$

Substituindo  $x = b$  na Eq. (237) e simplificando obtém-se:

$$\left. \frac{d}{dx} \left[ I_0\left(\frac{4}{3}Mx^{3/4}\right) \right] \right|_{x=b} = M \frac{I_1\left(\frac{4}{3}Mb^{3/4}\right)}{b^{1/4}} \quad (238)$$

Substituindo a Eq. (238) na Eq. (236) obtém-se:

$$q_b = k \left( \frac{\pi \delta_b^2}{4} \right) \frac{M}{b^{1/4}} \theta_b \frac{I_1\left(\frac{4}{3}Mb^{3/4}\right)}{I_0\left(\frac{4}{3}Mb^{3/4}\right)} \quad (239)$$

A taxa máxima de transferência de calor é obtida pelo denominador da Eq. (1), ou seja:

$$q_{\text{máximo,aleta}} = hA_{\text{superfície,aleta}}\theta_b = h\theta_b \int_0^b f_3(x)d(x) = h\theta_b \int_0^b 2\pi f_2(x)d(x) =$$

$$h\theta_b \int_0^b 2\pi \frac{\delta_b}{2} \left(\frac{x}{b}\right)^{1/2} d(x) = h\left(\frac{2}{3}\pi\delta_b b\right)\theta_b \quad (240)$$

A eficiência da aleta é então calculada pela Eq. (1) com os resultados das Eqs. (239-240) e pela definição de  $M$  da Eq. (230), ou seja:

$$\eta = \frac{q_b}{q_{\text{máximo,aleta}}} = \frac{k\left(\frac{\pi\delta_b^2}{4}\right)\frac{M}{b^{1/4}}\theta_b \frac{I_1\left(\frac{4}{3}Mb^{3/4}\right)}{I_0\left(\frac{4}{3}Mb^{3/4}\right)}}{h\left(\frac{2}{3}\pi\delta_b b\right)\theta_b} = \frac{3}{4} \frac{(2m^2b^{1/2})^{1/2}}{\underbrace{\frac{2h}{k\delta_b}bb^{1/4}}_{=m^2}} \frac{I_1\left[\frac{4}{3}(2m^2b^{1/2})^{1/2}b^{3/4}\right]}{I_0\left[\frac{4}{3}(2m^2b^{1/2})^{1/2}b^{3/4}\right]} =$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{I_1\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}mb\right)}{(mb)I_0\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}mb\right)} \quad (241)$$

Na Fig. (23) podem ser vistas as curvas de eficiência para os seis tipos de aletas piniformes mostradas anteriormente. Essas curvas são representações das Eqs. (163), (177), (192), (205), (227) e (241), sendo todas funções do produto  $mb$ .

**EXEMPLO 5:** Aletas piniformes de perfil cilíndrico, cônico, parabólico côncavo e parabólico convexo estão expostas a um meio com temperatura de 25 °C com coeficiente de transferência de calor  $h = 40 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K})$ . Em todos os casos, a temperatura da base das aletas é 100 °C e o material das aletas possui condutividade térmica  $k = 100 \text{ W}/(\text{m.K})$ . O diâmetro da base das aletas é 0,92 cm e o comprimento das aletas é 10 cm. Compare as eficiências e as taxas de dissipação de calor de cada aleta.

Para todas as aletas:

$$\theta_b = T_b - T_\infty = 100 - 25 = 75^\circ\text{C}$$

$$b = 10/100 = 0,100 \text{ m}$$

$$\delta_b = 0,92/100 = 0,0092 \text{ m}$$

(a) para aleta piniforme cilíndrica com  $\delta_b = d$  :

$$m = \left( \frac{4h}{kd} \right)^{1/2} = \left( \frac{4.40}{100.0,0092} \right)^{1/2} = 13,188 \text{ m}^{-1}$$

$$mb = 13,188.0,100 = 1,319$$

$$\eta = \frac{\tanh(mb)}{mb} = \frac{\tanh(1,319)}{1,319} = 0,657$$

$$q_b = k \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) m \theta_b \tanh(mb) = 100 \cdot \left( \frac{\pi \cdot 0,0092^2}{4} \right) \cdot 13,188 \cdot 75 \cdot \tanh(1,319) = 5,70 \text{ W}$$

(b) para aleta piniforme de perfil cônico:

$$m = \left( \frac{2h}{k\delta_b} \right)^{1/2} = \left( \frac{2.40}{100.0,0092} \right)^{1/2} = 9,325 \text{ m}^{-1}$$

$$mb = 9,325.0,100 = 0,9325$$

$$\eta = \frac{\sqrt{2}I_2(2\sqrt{2}mb)}{(mb)I_1(2\sqrt{2}mb)} = \frac{\sqrt{2}I_2(2\sqrt{2}.0,9325)}{(0,9325)I_1(2\sqrt{2}.0,9325)} = \frac{\sqrt{2}.1,4977}{0,9325.2,8517} = 0,797$$

$$M = (2m^2b)^{1/2} = (2.9,325^2.0,100)^{1/2} = 4,170$$

$$q_b = k \left( \frac{\pi \delta_b^2}{4} \right) \frac{M}{\sqrt{b}} \theta_b \frac{I_2(2M\sqrt{b})}{I_1(2M\sqrt{b})} = 100 \cdot \left( \frac{\pi \cdot 0,0092^2}{4} \right) \frac{4,170}{\sqrt{0,100}} \cdot 75 \cdot \frac{I_2(2.4,170.\sqrt{0,100})}{I_1(2.4,170.\sqrt{0,100})} =$$

$$100 \cdot \left( \frac{\pi \cdot 0,0092^2}{4} \right) \frac{4,170}{\sqrt{0,100}} \cdot 75 \cdot \frac{1,4960}{2,8492} = 3,45 \text{ W}$$

(c) para aleta piniforme de perfil parabólico côncavo:

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{9}(mb)^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{9}(0,9325)^2}} = 0,858$$

$$M = [2(mb)^2]^{1/2} = [2(0,9325)^2]^{1/2} = 1,319$$

$$q_b = \frac{\pi k \delta_b^2 \theta_b}{8b} [-3 + (9 + 4M^2)^{1/2}] = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 0,0092^2 \cdot 75}{8.0,100} [-3 + (9 + 4.1,319^2)^{1/2}] = 2,480 \text{ W}$$

(d) para aleta piniforme de perfil parabólico convexo:

$$\eta = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{I_1\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}mb\right)}{(mb)I_0\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}mb\right)} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{I_1\left(\frac{4}{3}\sqrt{2.0,9325}\right)}{(0,9325)I_0\left(\frac{4}{3}\sqrt{2.0,9325}\right)} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{1,2652}{0,9325 \cdot 1,9353} = 0,744$$

$$M = [2m^2b^{1/2}]^{1/2} = [2.9,325^2 \cdot 0,100^{1/2}]^{1/2} = 7,416$$

$$q_b = k \left( \frac{\pi \delta_b^2}{4} \right) \frac{M}{b^{1/4}} \theta_b \frac{I_1\left(\frac{4}{3}Mb^{3/4}\right)}{I_0\left(\frac{4}{3}Mb^{3/4}\right)} = 100 \cdot \left( \frac{\pi \cdot 0,0092^2}{4} \right) \cdot \frac{7,416}{0,100^{1/4}} \cdot 75 \cdot \frac{I_1\left(\frac{4}{3} \cdot 7,416 \cdot 0,100^{3/4}\right)}{I_0\left(\frac{4}{3} \cdot 7,416 \cdot 0,100^{3/4}\right)} =$$

$$= 100 \cdot \left( \frac{\pi \cdot 0,0092^2}{4} \right) \cdot \frac{7,416}{0,100^{1/4}} \cdot 75 \cdot \frac{1,2652}{1,9353} = 4,30 \text{ W}$$

Segue abaixo um resumo do desempenho das quatro aletas:

| Perfil da aleta    | $\eta$ | $q_b$ (W) |
|--------------------|--------|-----------|
| Cilíndrico         | 0,657  | 5,70      |
| Cônico             | 0,796  | 3,45      |
| Parabólico côncavo | 0,858  | 2,48      |
| Parabólico convexo | 0,744  | 4,30      |

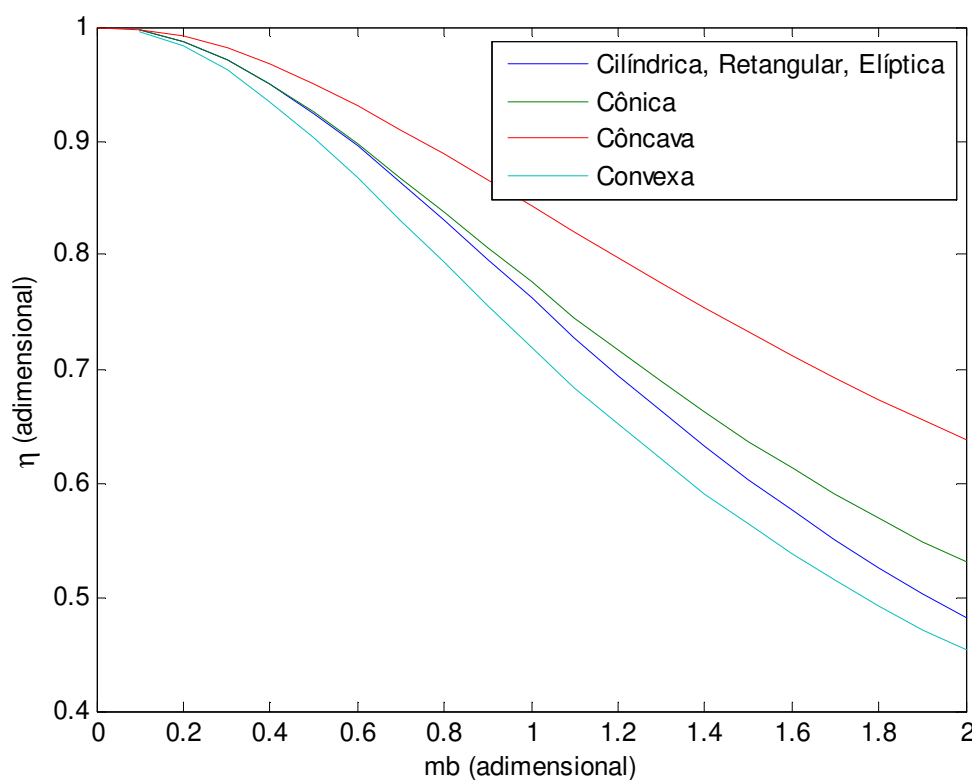
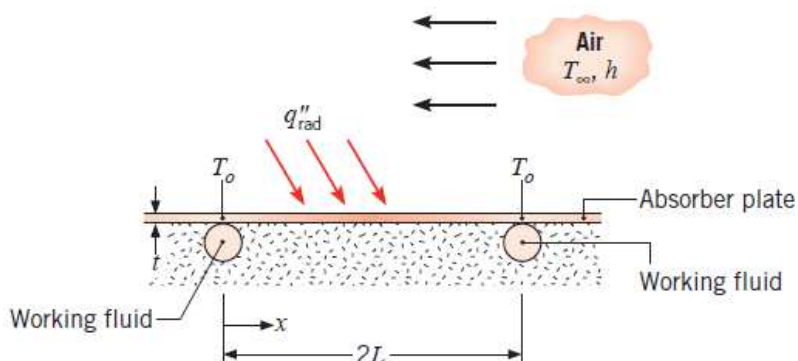


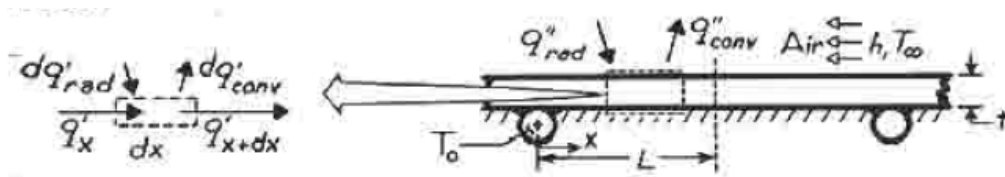
Figura 23 – Gráfico de eficiências para aletas piniformes.

EXEMPLO 6: Tubos de cobre estão fixados a uma placa de um coletor solar, com espessura  $t$ , e o fluido de trabalho mantém a temperatura da placa acima dos tubos em  $T_0$ . Há um fluxo térmico radiante líquido uniforme  $q''_{rad}$  na superfície superior da placa, enquanto a superfície inferior encontra-se isolada termicamente. A superfície superior também está exposta a um fluido a  $T_\infty$ , que fornece um coeficiente convectivo uniforme  $h$ .

- deduza a equação diferencial que governa a distribuição de temperaturas  $T(x)$  em regime permanente na placa e
- obtenha uma solução para a equação diferencial usando condições de contorno apropriadas.



SOLUÇÃO: as considerações para esse problema são (1) regime permanente, (2) condução unidimensional, (3) superfície inferior da placa isolada, (4) fluxo de radiação e coeficiente de transferência de calor uniformes, (5) temperatura da placa em  $x = 0$  corresponde a temperatura do fluido de trabalho  $T_0$ , (6) sem geração interna de energia e (7) devido à simetria, somente metade da placa pode ser analisada. É utilizado um volume de controle diferencial sobre a placa, conforme a figura abaixo, onde é feito um balanço de energia, ou seja:



$$\dot{E}_e - \dot{E}_s = 0 \Rightarrow \dot{E}_e = \dot{E}_s \Rightarrow q_x + dq_{rad} = q_{x+dx} + dq_{conv} \quad (242)$$

As taxas de energia  $dq_{rad}$ ,  $q_{x+dx}$  e  $dq_{conv}$  podem ser escritas como:

$$dq_{rad} = q_{rad}'' (dx \times 1) \quad q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \quad dq_{conv} = h(dx \times 1)(T - T_\infty) \quad (243)$$

Substituindo a Eq. (243) na Eq. (242) e rearranjando obtém-se:

$$q_{rad}'' = \frac{dq_x}{dx} + h(T - T_\infty) \quad (244)$$

A taxa de calor  $q_x$  da Eq. (244) e sua derivada em relação a  $x$  podem ser calculadas pela lei de Fourier, ou seja:

$$q_x = -k(t \times 1) \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{dq_x}{dx} = -kt \frac{d^2T}{dx^2} \quad (245)$$

Substituindo a Eq. (245) na Eq. (244) e rearranjando obtém-se:

$$kt \frac{d^2T}{dx^2} - h(T - T_\infty) = -q_{rad}'' \quad (246)$$

Dividindo a Eq. (246) por  $kt$  e introduzindo a variável  $\theta(x) = T(x) - T_\infty$  com o objetivo de eliminar uma das não homogeneidades obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{h}{kt} \theta = -\frac{q_{rad}''}{kt} \quad (247)$$

Definindo as variáveis  $m^2 = (h/kt)$  e  $S = -(q_{rad}''/kt)$  na Eq. (247) obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2 \theta = S \quad (248)$$

As condições de contorno para a solução da Eq. (248) são:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (249)$$

$$T(x=0) = T_o \Rightarrow \theta(x=0) = T_o - T_b = \theta_o \quad (250)$$

A Eq. (248) é uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes e não-homogênea, cuja solução geral é obtida pelas soluções homogênea e particular, ou seja:

$$\theta(x) = \theta_H(x) + \theta_P(x) \quad (251)$$

A solução homogênea é obtida pela solução da equação característica que tem a seguinte forma:

$$t^2 - m^2 = 0 \Rightarrow t = \pm m \quad (252)$$

Como as duas soluções da equação característica são reais e distintas, a solução homogênea é escrita da seguinte forma:

$$\theta_H(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (253)$$

Já a solução particular pode ser determinada pelo método dos coeficientes indeterminados, ou seja:

$$\theta_P(x) = C \Rightarrow -m^2 C = S \Rightarrow C = -S/m^2 \Rightarrow \theta_P(x) = -S/m^2 \quad (254)$$

Assim, a solução geral da Eq. (248) é escrita como:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} - S/m^2 \quad (255)$$

A derivada da Eq. (255) com relação a  $x$  é escrita como:

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx} \quad (256)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (249) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 e^{-2mL} \quad (257)$$

Aplicando a condição de contorno da Eq. (250) e utilizando o resultado da Eq. (257) obtém-se:

$$\theta(x=0) = C_2 e^{-2mL} e^{m0} + C_2 e^{-m0} - S/m^2 = \theta_o \Rightarrow C_2 = \frac{\theta_o + S/m^2}{e^{-2mL} + 1} \quad (258)$$

Substituindo a Eq. (258) na Eq. (257) obtém-se:

$$C_1 = C_2 e^{-2mL} \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_o + S/m^2}{e^{-2mL} + 1} e^{-2mL} \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_o + S/m^2}{e^{2mL} + 1} \quad (259)$$

Substituindo as Eqs. (258-259) na Eq. (255) obtém-se:

$$\theta(x) = \frac{\theta_o + S/m^2}{e^{2mL} + 1} e^{mx} + \frac{\theta_o + S/m^2}{e^{-2mL} + 1} e^{-mx} - S/m^2 \quad (260)$$

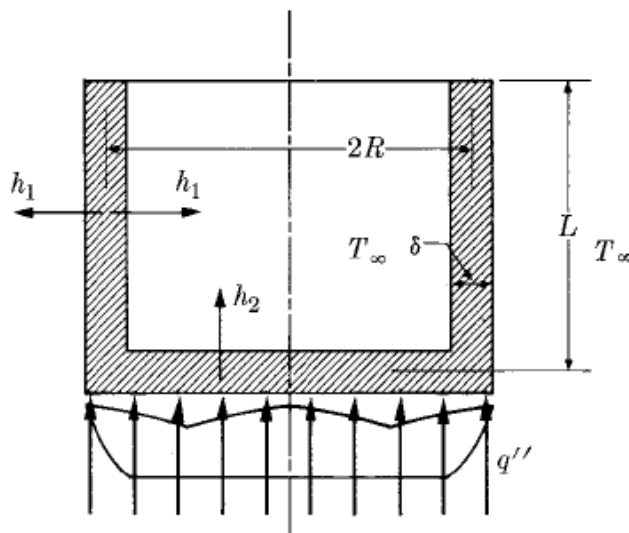
Rearranjando a Eq. (260) obtém-se:

$$\theta(x) = \left( \theta_o + S/m^2 \right) \left( \frac{e^{mx}}{e^{2mL} + 1} + \frac{e^{-mx}}{e^{-2mL} + 1} \right) - S/m^2 \quad (261)$$

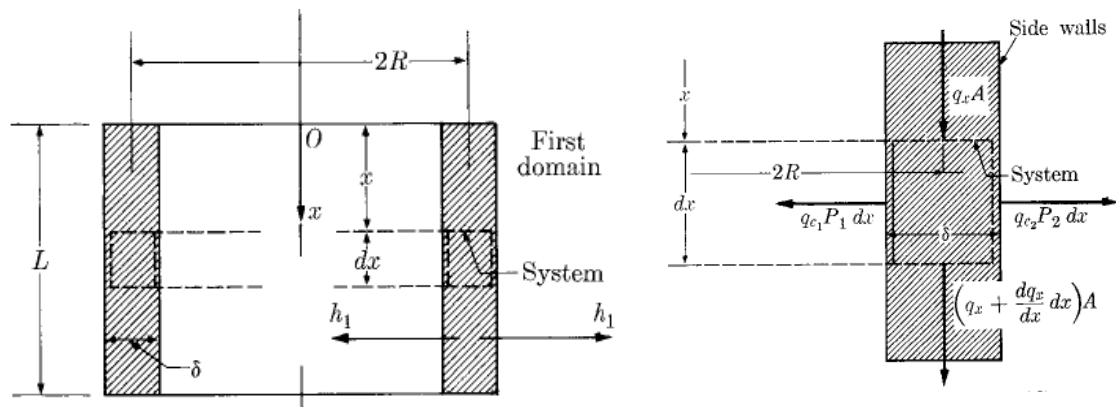
Voltando as variáveis originais com exceção de  $m$  e rearranjando obtém-se:

$$\frac{T(x) - T_\infty - q_{rad}''/h}{T_o - T_\infty - q_{rad}''/h} = \left( \frac{e^{mx}}{e^{2mL} + 1} + \frac{e^{-mx}}{e^{-2mL} + 1} \right) \quad (262)$$

EXEMPLO 7: Uma frigideira vazia é esquecida sobre uma chapa quente. Pode ser assumido que a base da frigideira está sujeita a um fluxo de calor uniforme  $q''$ . A temperatura ambiente é  $T_\infty$  e os coeficientes de transferência de calor são  $h_1$  e  $h_2$ . A condutividade térmica, espessura, raio e altura da frigideira são  $k, \delta, R$  e  $L$ , respectivamente. Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente na frigideira.



SOLUÇÃO: as considerações para esse problema são (1) regime permanente, (2) condução unidimensional, (3) coeficientes de transferência de calor uniformes, (4) sem geração interna de energia e (5) sem efeito de radiação térmica. Desprezando a variação de temperaturas ao longo da espessura, pode-se assumir que a distribuição de temperaturas na frigideira é unidimensional, sendo radial na base e axial nas paredes laterais. Isso sugere que o problema pode ser analisado em termos de dois domínios por conveniência matemática. O primeiro domínio engloba as paredes laterais da frigideira conforme a figura abaixo:



Um balanço de energia em um volume de controle diferencial na parede lateral fornece que

$$\dot{E}_e = \dot{E}_s \Rightarrow q_x = q_{x+dx} + dq_{conv1} + dq_{conv2} \Rightarrow q_x = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx + dq_{conv1} + dq_{conv2} \quad (263)$$

A lei de Fourier e a lei do resfriamento de Newton são escritas como:

$$q_x = -kA_r \frac{dT_1}{dx} \quad (264)$$

$$dq_{conv1} = h_1 dA_{s1} (T_1 - T_\infty) \quad (265)$$

$$dq_{conv2} = h_1 dA_{s2} (T_1 - T_\infty) \quad (266)$$

A área da seção transversal é a área de uma coroa circular limitada por duas circunferências de raios externo e interno  $R$  e  $R - \delta$ , respectivamente, ou seja:

$$A_r = \pi R^2 - \pi (R - \delta)^2 = \pi R^2 - \pi R^2 + 2\pi R \delta - \underbrace{\pi \delta^2}_{\rightarrow 0} = 2\pi R \delta \quad (267)$$

As áreas superficiais para a convecção podem ser calculadas como:

$$dA_{s1} = 2\pi (R - \delta) dx = 2\pi R dx - \underbrace{2\pi \delta dx}_{\rightarrow 0} = 2\pi R dx \quad (268)$$

$$dA_{s2} = 2\pi R dx \quad (\delta \ll R, dA_{s1} \approx dA_{s2}) \quad (269)$$

Substituindo as Eqs. (264-269) na Eq. (263) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{2h_1}{k\delta} (T_1 - T_\infty) = 0 \quad (270)$$

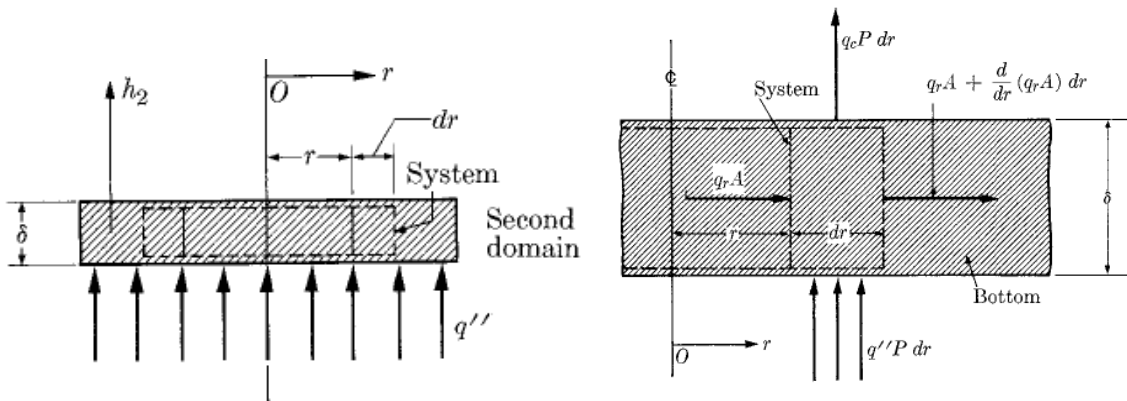
Definindo  $\theta_1(x) = T_1(x) - T_\infty$  e  $m_1^2 = \frac{2h_1}{k\delta}$  e substituindo na Eq. (270) obtém-se:

$$\frac{d^2\theta_1}{dx^2} - m_1^2\theta_1 = 0 \quad (271)$$

A solução da Eq. (271) é obtida pela equação característica, cujas raízes são  $\pm m_1$ , e a solução geral é escrita como:

$$\theta_1(x) = C_1 \sinh(m_1 x) + C_2 \cosh(m_1 x) \quad (272)$$

O segundo domínio engloba a base da frigideira conforme a figura abaixo:



Um balanço de energia em um volume de controle diferencial na base fornece que:

$$\dot{E}_e = \dot{E}_s \Rightarrow q_r + q'' dA_s = q_{r+dr} + dq_{conv} \Rightarrow q_r + q'' dA_s = q_r + \frac{dq_r}{dr} dr + dq_{conv} \quad (273)$$

A lei de Fourier e a lei do resfriamento de Newton são escritas como:

$$q_r = -kA_r \frac{dT_2}{dr} \quad (274)$$

$$dq_{conv} = h_2 dA_s (T_2 - T_\infty) \quad (275)$$

A área da seção transversal e a área superficial de convecção podem ser calculadas como:

$$A_{tr} = 2\pi r \delta \quad (276)$$

$$dA_s = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi r^2 + 2\pi r dr + \underbrace{\pi dr^2}_{\rightarrow 0} - \pi r^2 = 2\pi r dr \quad (277)$$

Substituindo as Eqs. (274-277) na Eq. (273) e rearranjando obtém-se:

$$r \frac{d^2 T_2}{dr^2} + \frac{dT_2}{dr} - r \frac{h_2}{k\delta} (T_2 - T_\infty) = -r \frac{q''}{k\delta} \quad (278)$$

Definindo  $\theta_2(x) = T_2(x) - T_\infty$ ,  $m_2^2 = \frac{h_2}{k\delta}$  e  $n = \frac{q''}{k\delta}$ , substituindo na Eq. (279), multiplicando por  $r$  e rearranjando obtém-se:

$$r^2 \frac{d^2 \theta_2}{dr^2} + r \frac{d\theta_2}{dr} - r^2 m_2^2 \left( \theta_2 - \frac{n}{m_2^2} \right) = 0 \quad (279)$$

De maneira a simplificar o trabalho algébrico, pode-se definir uma variável auxiliar  $\theta_2' = \theta_2 - n/m_2^2$  de tal forma que  $d\theta_2'/dr = d\theta_2/dr$  e  $d^2\theta_2'/dr^2 = d^2\theta_2/dr^2$ . Substituindo esses resultados na Eq. (279) e rearranjando obtém-se:

$$r^2 \frac{d^2 \theta_2'}{dr^2} + r \frac{d\theta_2'}{dr} - r^2 m_2^2 \theta_2' = 0 \quad (280)$$

A Eq. (280) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da equação geral de Bessel, conforme o Apêndice. Comparando a Eq. (280) com a Eq. (15) do Apêndice, obtém-se os seguintes coeficientes:  $A=0$ ,  $B=0$ ,  $C=1$ ,  $D=im_2$ ,

$p = m_2$  e  $n = 0$ . Esses resultados indicam o CASO 3, cuja solução geral é dada pela Eq. (18) do Apêndice. Em termos da variável original  $\theta_2$ , obtém-se:

$$\theta_2(r) = C_3 I_0(m_2 r) + C_4 K_0(m_2 r) + \frac{n}{m_2^2} \quad (281)$$

Desprezando a transferência de calor pela superfície superior das laterais, pode-se escrever as condições de contorno na seguinte forma:

$$\left. \frac{d\theta_1}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (282)$$

$$\theta_1(L) = \theta_2(R) \quad (283)$$

$$-k \left. \frac{d\theta_2}{dr} \right|_{r=R} = k \left. \frac{d\theta_1}{dx} \right|_{x=L} \quad (284)$$

$$\left. \frac{d\theta_2}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_2(r=0) = \text{finito} \quad (285)$$

A derivada das Eqs. (272) e (281) tem a seguinte forma:

$$\frac{d\theta_1}{dx} = m_1 C_1 \cosh(m_1 x) + m_2 C_2 \sinh(m_1 x) \quad (286)$$

$$\frac{d\theta_2}{dr} = m_2 C_3 I_1(m_2 r) - m_2 C_4 K_1(m_2 r) \quad (287)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (282) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta_1}{dx} \right|_{x=0} = m_1 C_1 \cosh(m_1 0) + m_2 C_2 \sinh(m_1 0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (288)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (285) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta_2}{dr} \right|_{r=0} = m_2 C_3 \underbrace{I_1(m_2 0)}_{=0} - m_2 C_4 \underbrace{K_1(m_2 0)}_{=\infty} = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \quad (289)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (283) e utilizando os resultados obtidos nas Eqs. (288-289) obtém-se:

$$C_2 \cosh(m_1 L) = C_3 I_0(m_2 R) + \frac{n}{m_2^2} \quad (290)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (284) e utilizando os resultados obtidos nas Eqs. (288-289) obtém-se:

$$C_2 m_2 \sinh(m_1 L) + C_3 m_2 I_1(m_2 R) = 0 \quad (291)$$

As Eqs. (290-291) formam um sistema de duas equações e duas incógnitas para a determinação de  $C_2$  e  $C_3$ , que após manipulação algébrica tem a seguinte forma:

$$C_2 = \frac{n I_1(m_2 R)}{m_2 [m_2 I_1(m_2 R) \cosh(m_1 L) + m_1 I_0(m_2 R) \sinh(m_1 L)]} \quad (292)$$

$$C_3 = -\frac{m_1 n \sinh(m_1 L)}{m_2^2 [m_2 I_1(m_2 R) \cosh(m_1 L) + m_1 I_0(m_2 R) \sinh(m_1 L)]} \quad (293)$$

Substituindo as Eqs. (288) e (292) na Eq. (272) obtém-se:

$$\theta_1(x) = \frac{n I_1(m_2 R) \cosh(m_1 x)}{m_2 [m_2 I_1(m_2 R) \cosh(m_1 L) + m_1 I_0(m_2 R) \sinh(m_1 L)]} \quad (294)$$

Pode-se rearranjar a Eq. (294) colocando o termo  $m_2 \cosh(m_1 L)$  em evidência no denominador, passando o termo  $n/m_2^2 = q''/h_2$  para a esquerda e passando o termo  $I_1(m_2 R)$  do numerador para o denominador, ou seja:

$$\frac{\theta_1(x)}{q''/h_2} = \frac{\cosh(m_1 x)/\cosh(m_1 L)}{1 + (m_1/m_2)[I_0(m_2 R)/I_1(m_2 R)]\tanh(m_1 L)} \quad (295)$$

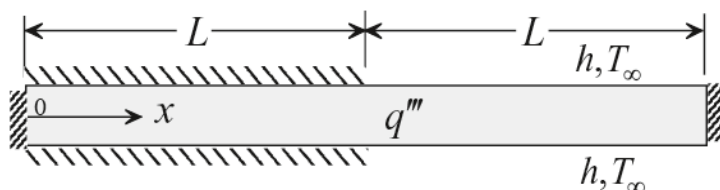
Substituindo as Eqs. (289) e (293) na Eq. (281) obtém-se:

$$\theta_2(r) = -\frac{nm_1 \sinh(m_1 L)I_0(m_2 r)}{m_2^2[m_2 I_1(m_2 R)\cosh(m_1 L) + m_1 I_0(m_2 R)\sinh(m_1 L)]} + \frac{n}{m_2^2} \quad (296)$$

Pode-se rearranjar a Eq. (296) colocando o termo  $n/m_2^2 = q''/h_2$  em evidência e passando-o para a esquerda, passando o termo  $m_1 \sinh(m_1 L)$  do numerador para o denominador e colocando o termo  $I_0(m_2 R)$  em evidência no denominador, ou seja:

$$\frac{\theta_2(r)}{q''/h_2} = 1 - \frac{I_0(m_2 r)/I_0(m_2 R)}{1 + (m_2/m_1)[I_1(m_2 R)/I_0(m_2 R)]\coth(m_1 L)} \quad (297)$$

**EXEMPLO 8:** Uma aleta de seção transversal constante  $A$  e comprimento  $2L$  possui uma taxa volumétrica de geração de energia uniforme  $\dot{q}$ . Metade da aleta está isolada e a outra metade troca calor por convecção. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente ao longo da aleta.



**SOLUÇÃO:** as considerações para esse problema são (1) regime permanente, (2) condução unidimensional, (3) coeficiente de transferência de calor uniforme, (4) com geração interna de energia uniforme (5) condutividade térmica constante e (6) radiação

térmica desprezível. Como metade da aleta está isolada enquanto a outra metade troca calor por convecção, duas equações diferenciais são necessárias. Para a metade isolada,  $0 \leq x \leq L$ , a equação diferencial é obtida por um balanço de energia diferencial:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = 0 \Rightarrow q_x - q_{x+dx} + \dot{q}dV = 0 \Rightarrow q_x - q_x - \frac{dq_x}{dx}dx + \dot{q}(Adx) = 0 \Rightarrow \frac{dq_x}{dx} = \dot{q}A \quad (298)$$

Utilizando a lei de Fourier na Eq. (298) obtém-se:

$$\frac{d}{dx} \left( -kA \frac{dT_1}{dx} \right) = \dot{q}A \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( -k \frac{dT_1}{dx} \right) = \dot{q} \Rightarrow \frac{d^2T_1}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (299)$$

Para a segunda metade da aleta,  $L \leq x \leq 2L$ , a equação diferencial também é obtida por um balanço de energia diferencial:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = 0 \Rightarrow q_x - q_{x+dx} - dq_{conv} + \dot{q}dV = 0 \Rightarrow q_x - q_x - \frac{dq_x}{dx}dx - dq_{conv} + \dot{q}dV = 0 \quad (300)$$

Utilizando a lei de Fourier e a lei do resfriamento de Newton na Eq. (300) e dividindo o resultado por  $Adx$  obtém-se:

$$\frac{d^2T_2}{dx^2} - \frac{h}{kA} \frac{dA_s}{dx} (T_2 - T_\infty) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (301)$$

A área da seção transversal da aleta pode ser escrita em termos do perímetro da seção da aleta como sendo  $dA_s = Pdx$ . Substituindo esse resultado na Eq. (301) e definindo  $m^2 = hP/kA$  obtém-se:

$$\frac{d^2T_2}{dx^2} - m^2(T_2 - T_\infty) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \Rightarrow \frac{d^2T_2}{dx^2} - m^2T_2 = -\frac{\dot{q}}{k} - m^2T_\infty \quad (302)$$

Para as Eqs. (299) e (302) são necessárias quatro condições de contorno, ou seja:

$$\left. \frac{dT_1}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (303)$$

$$T_1(x=L) = T_2(x=L) \quad (304)$$

$$\left. \frac{dT_1}{dx} \right|_{x=L} = \left. \frac{dT_2}{dx} \right|_{x=L} \quad (305)$$

$$\left. \frac{dT_2}{dx} \right|_{x=2L} = 0 \quad (306)$$

A solução da Eq. (299) é obtida por dupla integração, ou seja:

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{dx} = -\frac{\dot{q}x}{k} + C_1 \Rightarrow T_1(x) = -\frac{\dot{q}x^2}{2k} + C_1 x + C_2 \quad (307)$$

A solução homogênea da Eq. (302) é obtida pela técnica da equação característica, ou seja:

$$\frac{d^2 T_{H2}}{dx^2} - m^2 T_{H2} = 0 \Rightarrow t^2 - m^2 = 0 \Rightarrow t = \pm m \Rightarrow T_{H2}(x) = C_3 \sinh(mx) + C_4 \cosh(mx) \quad (308)$$

Já a solução particular da Eq. (302) é obtida como:

$$T_{P2}(x) = C \Rightarrow -m^2 C = -\frac{\dot{q}}{k} - m^2 T_\infty \Rightarrow C = \frac{\dot{q}}{km^2} + T_\infty \Rightarrow T_{P2}(x) = \frac{\dot{q}}{km^2} + T_\infty \quad (309)$$

A solução geral da Eq. (302) é a composição das Eqs. (308-309), ou seja:

$$T_2(x) = C_3 \sinh(mx) + C_4 \cosh(mx) + \frac{\dot{q}}{km^2} + T_\infty \quad (310)$$

A derivada da Eq. (310) com relação a  $x$  é escrita como:

$$\frac{dT_2}{dx} = mC_3 \cosh(mx) + mC_4 \sinh(mx) \quad (311)$$

Aplicando a condição de contorno da Eq. (303) juntamente com o resultado da Eq. (307) obtém-se:

$$\left. \frac{dT_1}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{\dot{q}0}{k} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (312)$$

Aplicando condição de contorno da Eq. (304) juntamente com os resultados das Eqs. (307) e (310) e utilizando o resultado da Eq. (312) obtém-se:

$$-\frac{\dot{q}L^2}{2k} + C_2 = C_3 \sinh(mL) + C_4 \cosh(mL) + \frac{\dot{q}}{km^2} + T_\infty \Rightarrow$$

$$C_2 = T_\infty + \frac{\dot{q}L^2}{2k} + \frac{\dot{q}}{km^2} + C_3 \sinh(mL) + C_4 \cosh(mL) \quad (313)$$

Aplicando a condição de contorno da Eq. (305) juntamente com os resultados das Eqs. (307) e (311) e utilizando o resultado da Eq. (312) obtém-se:

$$-\frac{\dot{q}L}{k} = mC_3 \cosh(mL) + mC_4 \sinh(mL) \quad (314)$$

Aplicando a condição de contorno da Eq. (306) juntamente com o resultado da Eq. (312) obtém-se:

$$mC_3 \cosh(2mL) + mC_4 \sinh(2mL) = 0 \Rightarrow C_3 = -C_4 \tanh(2mL) \quad (315)$$

Substituindo a Eq. (315) na Eq. (314) e rearranjando obtém-se:

$$C_4 = \frac{\dot{q}L}{km} \frac{1}{\tanh(2mL) \cosh(mL) - \sinh(mL)} \quad (316)$$

Substituindo a Eq. (316) na Eq. (315) e rearranjando obtém-se:

$$C_3 = \frac{\dot{q}L}{km} \frac{\tanh(2mL)}{\sinh(mL) - \tanh(2mL) \cosh(mL)} \quad (317)$$

Substituindo as Eqs. (316-317) na Eq. (313) e rearranjando obtém-se:

$$C_2 = T_\infty + \frac{\dot{q}L^2}{2k} + \frac{\dot{q}}{km^2} - \frac{\dot{q}L}{km} \frac{\tanh(2mL) \sinh(mL) - \cosh(mL)}{\tanh(2mL) \cosh(mL) - \sinh(mL)} \quad (318)$$

Substituindo as Eqs. (305) e (318) na Eq. (307) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{T_1(x) - T_\infty}{\frac{\dot{q}L^2}{k}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(mL)^2} - \frac{1}{(mL)} \frac{\tanh(2mL) \sinh(mL) - \cosh(mL)}{\tanh(2mL) \cosh(mL) - \sinh(mL)} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \quad (319)$$

Substituindo as Eqs. (316-317) na Eq. (310) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{T_2(x) - T_\infty}{\frac{\dot{q}L^2}{k}} = \frac{1}{(mL)^2} + \frac{1}{(mL)} \frac{\cosh(mx) - \tanh(2mL) \sinh(mx)}{\tanh(2mL) \cosh(mL) - \sinh(mL)} \quad (320)$$

**EXEMPLO 9:** Uma barra delgada com área de seção transversal  $A$  e comprimento  $2L$  é aquecida eletricamente por uma corrente elétrica  $I$ . A resistência elétrica da barra por unidade de comprimento é  $R_e'$ . A superfície da barra é resfriada por convecção por um fluido com temperatura  $T_\infty$  e coeficiente de transferência de calor  $h$ . As extremidades da barra também estão à temperatura  $T_\infty$ .

- obtenha a equação diferencial para a distribuição de temperaturas ao longo da barra e estabeleça as condições de contorno para o problema,
- resolva a equação diferencial do item anterior,
- determine a posição na barra onde ocorre a menor temperatura e
- calcule o valor dessa temperatura.

SOLUÇÃO: as considerações para esse problema são (1) regime permanente, (2) condução unidimensional, (3) coeficiente de transferência de calor uniforme, (4) geração interna de energia uniforme e (5) sem efeito de radiação térmica. É utilizado um volume de controle diferencial sobre a barra, onde é feito um balanço de energia, ou seja:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = 0 \Rightarrow q_x + \dot{q}dV = q_{x+dx} + dq_{conv} \Rightarrow q_x + \dot{q}dV = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx + dq_{conv} \quad (321)$$

Substituindo a Lei de Fourier, a lei do resfriamento de Newton e sabendo que a geração uniforme de energia é devido à conversão de energia elétrica em energia térmica, ( $\dot{q} = R_e' I^2 / A$ ), a Eq. (321) pode ser reescrita como:

$$\frac{R_e' I^2}{A} A dx = \frac{d}{dx} \left( -kA \frac{dT}{dx} \right) dx + h dA_s (T - T_\infty) \quad (322)$$

Dividindo a Eq. (322) por  $kA dx$ , sabendo que  $dA_s/dx = P$  e fazendo  $m^2 = hP/kA$  obtém-se:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - m^2 (T - T_\infty) = -\frac{R_e' I^2}{kA} \quad (323)$$

As condições de contorno da Eq. (323) são escritas como:

$$T(x=0) = T_\infty \quad (324)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (325)$$

Definindo a variável excesso de temperaturas  $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ , pode-se reescrever as Eqs. (323-325) na seguinte forma:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = -\frac{R_e' I^2}{kA} \quad (326)$$

$$\theta(x=0)=0 \quad (327)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (328)$$

A Eq. (326) é uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes e não-homogênea, cuja solução é obtida pelas soluções homogênea e particular, ou seja:

$$\theta(x) = \theta_H(x) + \theta_P(x) \quad (329)$$

A solução homogênea é obtida pelas soluções da equação característica que tem a seguinte forma:

$$t^2 - m^2 = 0 \Rightarrow t = \pm m \quad (330)$$

Como as duas soluções são reais e distintas, a solução homogênea é escrita da seguinte forma:

$$\theta_H(x) = C_1 \sinh(mx) + C_2 \cosh(mx) \quad (331)$$

Já a solução particular pode ser determinada pelo método dos coeficientes indeterminados, ou seja:

$$\theta_P(x) = C \Rightarrow -m^2 C = -\frac{R_e' I^2}{kA} \Rightarrow C = \frac{R_e' I^2}{m^2 kA} \Rightarrow \theta_P(x) = \frac{R_e' I^2}{hP} \quad (332)$$

Assim, a solução da Eq. (326) é escrita como:

$$\theta(x) = C_1 \sinh(mx) + C_2 \cosh(mx) + \frac{R_e' I^2}{hP} \quad (333)$$

A derivada da Eq. (333) com relação a  $x$  é escrita como:

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1 \cosh(mx) + mC_2 \sinh(mx) \quad (334)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (328) obtém-se:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = mC_1 \cosh(mL) + mC_2 \sinh(mL) = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 \tanh(mL) \quad (335)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (327) e utilizando o resultado da Eq. (335) obtém-se:

$$\theta(x=0) = -C_2 \tanh(mL) \sinh(m0) + C_2 \cosh(m0) + \frac{R_e' I^2}{hP} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{R_e' I^2}{hP} \quad (336)$$

Substituindo a Eq. (336) na Eq. (335) obtém-se:

$$C_1 = \frac{R_e' I^2}{hP} \tanh(mL) \quad (337)$$

Substituindo as Eqs. (336-337) na Eq. (333) obtém-se:

$$\theta(x) = \frac{R_e' I^2}{hP} \tanh(mL) \sinh(mx) - \frac{R_e' I^2}{hP} \cosh(mx) + \frac{R_e' I^2}{hP} \quad (338)$$

Rearranjando a Eq. (338) obtém-se:

$$\theta(x) = \frac{R_e' I^2}{hP} [\tanh(mL) \sinh(mx) - \cosh(mx) + 1] \quad (339)$$

Voltando as variáveis originais e rearranjando a Eq. (339) obtém-se:

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{\frac{R_e' I^2}{hP}} = \tanh(mL) \sinh(mx) - \cosh(mx) + 1 \quad (340)$$

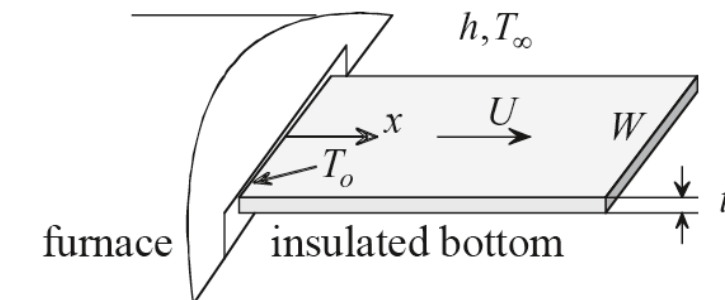
O ponto de menor temperatura pode ser obtido igualando a derivada da Eq. (340) em relação a  $x$  igual a 0, ou seja:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{R_e' I^2}{hP} [m \tanh(mL) \cosh(mx) - m \sinh(mx)] = 0 \Rightarrow x = L \quad (341)$$

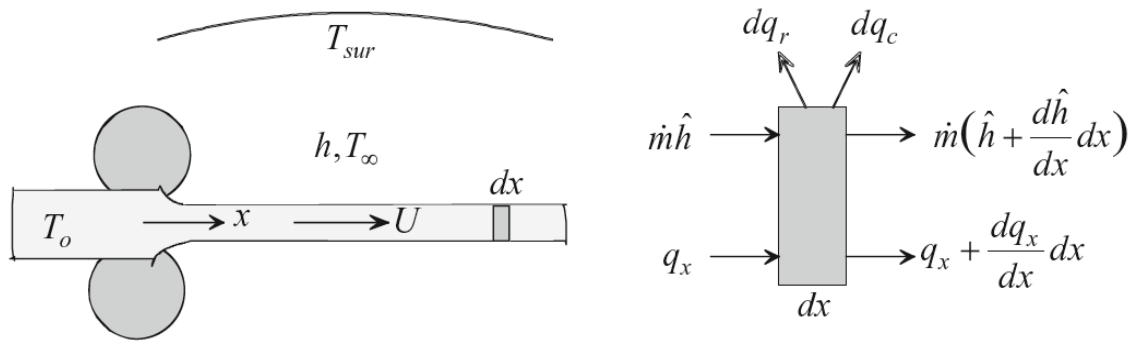
Pode ser verificado através do sinal da derivada segunda da Eq. (341) aplicada em  $x = L$ , que esse ponto minimiza a temperatura. O valor da menor temperatura é então determinado substituindo o resultado da Eq. (341) na Eq. (340), ou seja:

$$\frac{T_{\min}(x=L) - T_{\infty}}{\frac{R_e' I^2}{hP}} = \theta_{\min} = \tanh(mL) \sinh(mL) - \cosh(mL) + 1 \quad (342)$$

**EXEMPLO 10:** Uma fina folha de plástico de espessura  $t$  e largura  $W$  é aquecida em um forno até uma temperatura  $T_o$ . A folha se move sobre uma correia transportadora com velocidade  $U$ . Após a saída do forno ela é resfriada por convecção com o ambiente a temperatura  $T_{\infty}$ . O coeficiente de transferência de calor é  $h$ . Assuma regime permanente com radiação desprezível e sem transferência de calor entre a folha e a correia transportadora. Determine a distribuição de temperaturas na folha de plástico.



**SOLUÇÃO:** Existem aplicações onde uma material troca calor com as vizinhanças enquanto se move através de um forno ou de um canal. Exemplos incluem a extrusão de plásticos, extração de arames e folhas e o escoamento de líquidos. Tais problemas podem ser modelados como aletas móveis com as devidas hipóteses do modelo. Na figura abaixo pode ser visto um processo de extração de um corpo com uma velocidade  $U$  através de rolos. Esse corpo troca calor por radiação com a vizinhança, convecção com o meio e então sua temperatura varia com a distância.



As considerações para a formulação de um modelo matemático são: (1) regime permanente, (2) sem geração de energia, (3)  $k$  constante, (4) velocidade constante, (5) pressão constante, (6) corpo cinza e (7) pequena superfície localizada em uma grande vizinhança. Um balanço de energia em um volume de controle diferencial fornece:

$$\dot{E}_e = \dot{E}_s \Rightarrow q_x + \dot{m}h_x = q_{x+dx} + \dot{m}h_{x+dx} + dq_{conv} + dq_{rad} \quad (343)$$

Reescrevendo  $q_{x+dx}$  e  $h_{x+dx}$  utilizando séries de Taylor obtém-se:

$$q_x + \dot{m}h_x = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx + \dot{m}\left(h_x + \frac{dh_x}{dx}dx\right) + dq_{conv} + dq_{rad} \quad (344)$$

As taxas de calor por condução, convecção e radiação são escritas como:

$$q_x = -kA_r \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{dq_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-kA_r \frac{dT}{dx}\right) = -kA_r \frac{d^2T}{dx^2} \quad (345)$$

$$dq_{conv} = h dA_s (T - T_\infty) \quad (346)$$

$$dq_{rad} = \varepsilon \sigma dA_s (T^4 - T_{viz}^4) \quad (347)$$

Substituindo as Eqs. (345-347) na Eq. (344) e rearranjando obtém-se:

$$-kA_{tr} \frac{d^2 T}{dx^2} dx + \dot{m} \frac{dh_x}{dx} dx + h dA_s (T - T_\infty) + \varepsilon \sigma dA_s (T^4 - T_{viz}^4) = 0 \quad (348)$$

Fazendo  $\dot{m} = \rho U A_{tr}$ ,  $dh_x = c_p dT$ , admitindo  $c_p$  constante e dividindo a Eq. (348) por  $dx$  obtém-se:

$$-kA_{tr} \frac{d^2 T}{dx^2} + \rho U A_{tr} c_p \frac{dT}{dx} + h \frac{dA_s}{dx} (T - T_\infty) + \varepsilon \sigma \frac{dA_s}{dx} (T^4 - T_{viz}^4) = 0 \quad (349)$$

Dividindo a Eq. (349) por  $(-kA_{tr})$  obtém-se:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{\rho U c_p}{k} \frac{dT}{dx} - \frac{h}{kA_{tr}} \frac{dA_s}{dx} (T - T_\infty) - \frac{\varepsilon \sigma}{kA_{tr}} \frac{dA_s}{dx} (T^4 - T_{viz}^4) = 0 \quad (350)$$

A Eq. (350) é a forma geral do balanço de energia diferencial para um aleta móvel com velocidade constante  $U$ . Para o problema em análise, a área superficial e a área da seção transversal podem ser escritas como:

$$A_s(x) = Wx + 2tx = (W + 2t)x \Rightarrow \frac{dA_s}{dx} = W + 2t \quad (351)$$

$$A_{tr} = Wt \quad (352)$$

Deprezoando a troca de calor por radiação térmica, substituindo as Eqs. (351-352) na Eq. (350) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\rho U c_p}{k} \frac{dT}{dx} - \frac{h(W+2t)}{kWt} T + \frac{h(W+2t)}{kWt} T_\infty = 0 \quad (353)$$

$$\text{Definindo os parâmetros } b = -\frac{\rho U c_p}{2k}, \quad c = -\frac{h(W+2t)}{kWt} T_\infty \quad \text{e} \quad m^2 = -\frac{h(W+2t)}{kWt},$$

pode-se reescrever a Eq. (353) como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + 2b \frac{dT}{dx} + m^2 T = c \quad (354)$$

As condições de contorno desse problema são:

$$T(x=0) = T_o \quad (355)$$

$$T(x \rightarrow \infty) = \text{finito} \quad (356)$$

A Eq. (354) é linear, de segunda ordem, com coeficientes constantes e não-homogênea, cuja solução é da seguinte forma:

$$T(x) = T_H(x) + T_P(x) \quad (357)$$

A solução homogênea é obtida através da equação característica:

$$t^2 + 2bt + m^2 = 0 \Rightarrow t = -b \pm \sqrt{b^2 - m^2} \quad (358)$$

A solução homogênea é então escrita como:

$$T_H(x) = C_1 e^{\left(-b + \sqrt{b^2 - m^2}\right)x} + C_2 e^{\left(-b - \sqrt{b^2 - m^2}\right)x} \quad (359)$$

A solução particular nesse caso deve ser uma constante  $C$ , de tal forma que:

$$m^2 C = c \Rightarrow C = \frac{c}{m^2} \Rightarrow T_p(x) = C = \frac{c}{m^2} \quad (360)$$

A solução geral da Eq. (354) é a composição das Eqs. (359-360), ou seja:

$$T(x) = C_1 e^{\left(-b+\sqrt{b^2-m^2}\right)x} + C_2 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-m^2}\right)x} + \frac{c}{m^2} \quad (361)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (356) obtém-se:

$$T(x \rightarrow \infty) = C_1 \underbrace{e^{\left(-b+\sqrt{b^2-m^2}\right)\infty}}_{\rightarrow \infty} + C_2 \underbrace{e^{\left(-b-\sqrt{b^2-m^2}\right)\infty}}_{\rightarrow 0} + \frac{c}{m^2} = \text{finito} \Rightarrow C_1 = 0 \quad (362)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (355) e utilizando o resultado da Eq. (362) obtém-se:

$$T(x=0) = C_2 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-m^2}\right)0} + \frac{c}{m^2} = T_o \Rightarrow C_2 = T_o - \frac{c}{m^2} \quad (363)$$

Substituindo as Eqs. (362-363) na Eq. (361) e retornando as variáveis originais obtém-se:

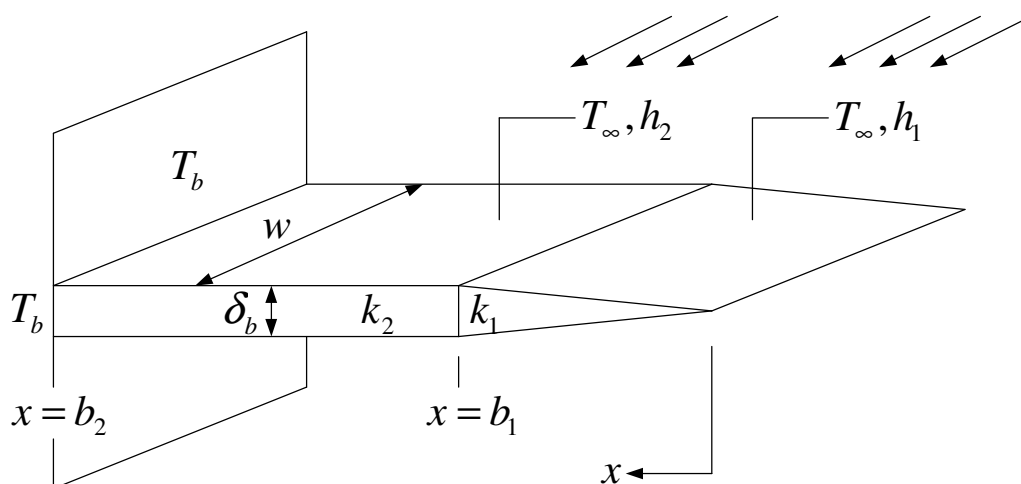
$$T(x) = \left(T_o - \frac{c}{m^2}\right) e^{\left(-b-\sqrt{b^2-m^2}\right)x} + \frac{c}{m^2} = \left[T_o - \frac{\frac{h(W+2t)}{kWt} T_\infty}{\frac{h(W+2t)}{kWt}}\right] e^{\left[-\left(\frac{\rho U c_p}{2k}\right) - \sqrt{\left(\frac{\rho U c_p}{2k}\right)^2 - \left(\frac{h(W+2t)}{kWt}\right)}\right]x} + \frac{\frac{h(W+2t)}{kWt} T_\infty}{\frac{h(W+2t)}{kWt}} \quad (364)$$

Rearranjando a Eq. (364) obtém-se:

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_o - T_\infty} = \exp\left[\frac{\rho U c_p}{2k} - \sqrt{\left(\frac{\rho U c_p}{2k}\right)^2 + \frac{h(W+2t)}{kWt}}\right]x \quad (365)$$

A seguir serão analisadas três configurações mais elaboradas de aletas. Será dada ênfase na formulação de cada problema juntamente com as condições de contorno. A análise matemática será feita com o auxílio do MAPLE juntamente com um exemplo numérico.

**EXEMPLO 11:** Uma aleta em cascata usualmente é composta de uma aleta longitudinal de perfil retangular acoplada a uma aleta longitudinal de perfil triangular conforme a figura abaixo. O comprimento total da aleta é  $b$ , sendo  $b_1$  o comprimento da aleta de perfil triangular e  $b_2 - b_1$  o comprimento da aleta de perfil retangular. A aleta em cascata está exposta a um ambiente com temperatura  $T_\infty$  e devido às áreas superficiais distintas, os coeficientes de transferência de calor para a aleta de perfil triangular e perfil retangular são, respectivamente,  $h_1$  e  $h_2$ . A espessura de ambos os perfis na base são iguais e denotadas por  $\delta_b$ . As condutividades térmicas dos perfis triangular e retangular são, respectivamente,  $k_1$  e  $k_2$ . A profundidade do conjunto é igual a  $w$  e a temperatura na base da aleta de perfil retangular é  $T_b$ . Desenvolva um modelo matemático unidimensional em regime permanente para o conjunto considerando  $k_1 = k_2$  e  $h_1 = h_2$ . Resolva esse modelo utilizando o MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE1.mw. Os dados para a solução são:  $k = 100 \text{ W/(m.K)}$ ,  $w = 0,005 \text{ m}$ ,  $T_b = 100 \text{ °C}$ ,  $T_\infty = 30 \text{ °C}$ ,  $f = 0,5$ ,  $N_2 = 1,0$ ,  $L = b_2 - b_1 = 0,05 \text{ m}$ .



SOLUÇÃO: as considerações para esse problema são (1) regime permanente, (2) condução unidimensional, (3) coeficiente de transferência de calor uniforme, (4) sem geração interna de energia e (5) sem efeito de radiação térmica. A equação diferencial para a aleta longitudinal de perfil retangular é dada pela Eq. (16), que em termos da variável  $T_2$  é reescrita como:

$$\frac{d^2 T_2}{dx^2} - \frac{2h}{k\delta_b}(T_2 - T_\infty) = 0 \quad b_1 \leq x \leq b_2 \quad (366)$$

A equação diferencial para a aleta longitudinal de perfil triangular é dada pela Eq. (29), que em termos da variável  $T_1$  é reescrita como:

$$x \frac{d^2 T_1}{dx^2} + \frac{dT_1}{dx} - \frac{2h}{k\delta_b} b_1 (T_1 - T_\infty) = 0 \quad 0 \leq x \leq b_1 \quad (367)$$

As condições de contorno para esse problema são:

$$T_1(x=0) = \text{finito} \quad (368)$$

$$T_1(x=b_1) = T_2(x=b_1) \quad (369)$$

$$\left. \frac{dT_1}{dx} \right|_{x=b_1} = \left. \frac{dT_2}{dx} \right|_{x=b_1} \quad (370)$$

$$T_2(x=b_2) = T_b \quad (371)$$

As Eqs. (366-371) podem ser reescritas utilizando os seguintes adimensionais:

$$\theta_1 = \frac{T_1 - T_\infty}{T_b - T_\infty}, \quad \theta_2 = \frac{T_2 - T_\infty}{T_b - T_\infty}, \quad X = \frac{x}{b_2}, \quad f = \frac{b_1}{b_2}, \quad N_2^2 = \frac{2hb_2^2}{k\delta_b}, \quad N_1^2 = fN_2^2 \quad (372)$$

As Eqs. (366-371) são então reescritas como:

$$\frac{d^2\theta_2}{dX^2} - N_2^2\theta_2 = 0 \quad f \leq X \leq 1 \quad (373)$$

$$X \frac{d^2\theta_1}{dX^2} + \frac{d\theta_1}{dX} - N_1^2\theta_1 = 0 \quad 0 \leq X \leq f \quad (374)$$

$$\theta_1(X=0) = \text{finito} \quad (375)$$

$$\theta_1(X=f) = \theta_2(X=f) \quad (376)$$

$$\left. \frac{d\theta_1}{dX} \right|_{X=f} = \left. \frac{d\theta_2}{dX} \right|_{X=f} \quad (377)$$

$$\theta_2(X=1) = 1 \quad (378)$$

A taxa de transferência de calor no conjunto pode ser calculada utilizando a lei de Fourier na base da aleta de perfil retangular, ou seja:

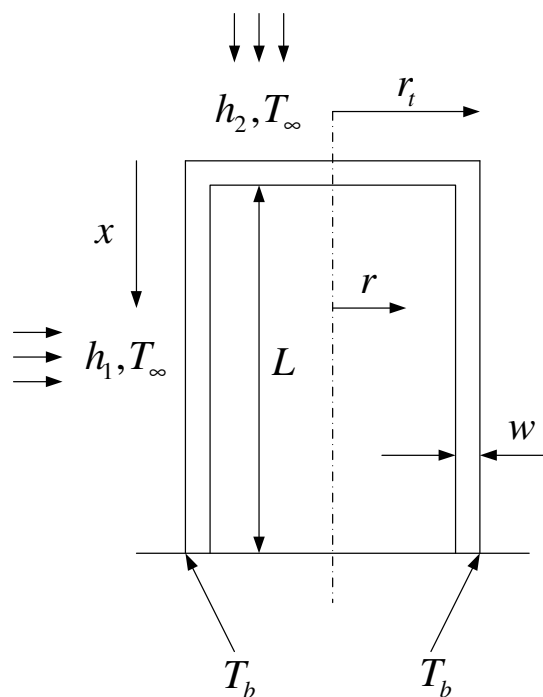
$$q = k(\delta_b w) \left. \frac{dT_2}{dx} \right|_{x=b_2} = \frac{k(\delta_b w)(T_b - T_\infty)}{b_2} \left. \frac{d\theta_2}{dX} \right|_{X=1} \quad (379)$$

**EXEMPLO 12:** Para reduzir a temperatura de um transistor na forma de disco, é comum acoplar a superfície do transistor um tubo cilíndrico oco de alta condutividade térmica. Assim, energia é transferida por condução ao longo da parede cilíndrica e dissipada por convecção para um fluido adjacente. Pode-se também fechar a superfície superior do cilindro oco de maneira que energia também é transferida por condução ao longo da capa superior e dissipada por convecção para um fluido adjacente. Essa situação pode ser vista na figura abaixo.

A temperatura do transistor em regime permanente é  $T_b$ , a espessura do cilindro oco é  $w$ , a altura do cilindro oco é  $L$ , o raio do cilindro oco é  $r_i$ , o coeficiente de transferência de calor na vertical é  $h_1$ , o coeficiente de transferência de calor na horizontal é  $h_2$  e a temperatura do ambiente é  $T_\infty$ . Esse problema pode ser modelado

utilizando dois domínios considerando condução unidimensional em regime permanente.

Calor é conduzido verticalmente através das paredes do cilindro que troca calor por convecção com o meio externo. No topo, esse calor é conduzido radialmente através da capa superior até o centro do cilindro que troca calor por convecção com o meio externo. Considera-se que somente as superfícies externas do cilindro oco trocam calor por convecção com o ambiente. Desenvolva um modelo matemático unidimensional em regime permanente para o conjunto. Resolva esse modelo utilizando o MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE2.mw. Os dados para a solução são:  $k = 25 \text{ W/(m.K)}$ ,  $h = 300 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$ ,  $w = 0,0003 \text{ m}$ ,  $L = 0,009 \text{ m}$ ,  $r_t = 0,004 \text{ m}$ ,  $T_\infty = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_b = 100 \text{ }^\circ\text{C}$



**SOLUÇÃO:** as considerações para esse problema são (1) regime permanente, (2) condução unidimensional axial e radial, (3) coeficiente de transferência de calor uniforme, (4) sem geração interna de energia, (5) sem efeito de radiação térmica e (6) a condutividade térmica dos dois domínios é a mesma. A equação diferencial para condução axial na parede cilíndrica (DOMÍNIO 1) pode ser deduzida através de um balanço de energia em um volume de controle diferencial extraído da parede. Considerando que  $w \ll r_t$ , a equação diferencial resultante é similar a Eq. (270) do

EXEMPLO 7, com exceção de um fator 2 resultante da convecção tanto interna quanto externa. Tem-se então que:

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{h_1}{kw} (T_1 - T_\infty) = 0 \quad (380)$$

Definindo os parâmetros  $m_1^2 = \frac{h_1}{kw}$  e  $\theta_1(x) = T_1(x) - T_\infty$  pode-se reescrever a Eq.

(380) na seguinte forma:

$$\frac{d^2 \theta_1}{dx^2} - m_1^2 \theta_1 = 0 \quad (381)$$

A equação diferencial para condução radial na capa superior (DOMÍNIO 2) pode ser deduzida através de um balanço de energia em um volume de controle diferencial extraído da capa. Considerando que  $w \ll r_i$ , a equação diferencial resultante é similar a Eq. (278) do EXEMPLO 7, com exceção da não existência do termo contendo  $q''$  daquele exemplo. Tem-se então que:

$$r \frac{d^2 T_2}{dr^2} + \frac{dT_2}{dr} - \frac{h_2}{kw} r (T_2 - T_\infty) = 0 \quad (382)$$

Definindo os parâmetros  $m_2^2 = \frac{h_2}{kw}$  e  $\theta_2(x) = T_2(x) - T_\infty$  pode-se reescrever a Eq.

(382) na seguinte forma:

$$r \frac{d^2 \theta_2}{dr^2} + \frac{d\theta_2}{dr} - m_2^2 r \theta_2 = 0 \quad (383)$$

As condições de contorno para esse problema são escritas na variável  $\theta$  na seguinte forma:

$$\theta_1(x = L) = \theta_b \quad (384)$$

$$\theta_1(x=0) = \theta_2(r=r_i) \quad (385)$$

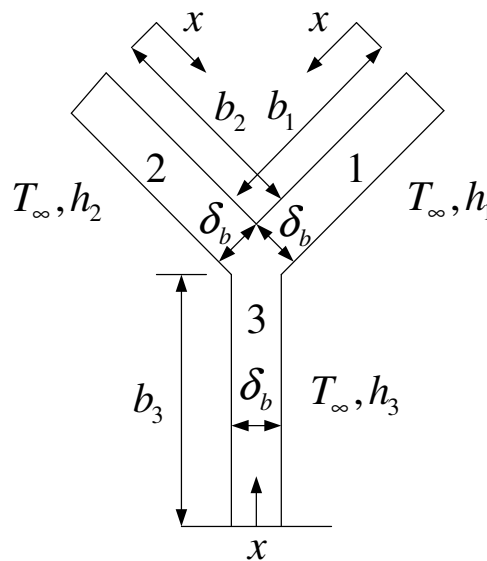
$$\left. \frac{d\theta_1}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\theta_2}{dr} \right|_{r=r_i} \quad (386)$$

$$\theta_2(r=0) = \text{finito} \quad (387)$$

A taxa de transferência de calor no conjunto pode ser calculada, por exemplo, utilizando a lei de Fourier na base do DOMÍNIO 1, ou seja:

$$q = k(2\pi r_i w) \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} \quad (388)$$

EXEMPLO 13: Considere uma aleta que tem o formato de um Y, sendo composta de três aletas longitudinais de perfil retangular com profundidade  $L$ , conforme a figura abaixo. A espessura de cada uma das três aletas é  $\delta_b$  e o comprimento de cada aleta é denotado por  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$ . Embora as três aletas estejam em um mesmo ambiente a  $T_\infty$ , cada uma tem o seu coeficiente convectivo em função das diferenças entre as geometrias. Esses coeficientes são identificados por  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$ . As três aletas são feitas do mesmo material que tem uma condutividade térmica  $k$ .



Desenvolva um modelo matemático unidimensional em regime permanente para o conjunto. Resolva esse modelo utilizando o MAPLE juntamente com um exemplo numérico. A rotina de cálculos pode ser vista no arquivo MAPLE3.mw. Os dados para a solução são:  $b_1 = b_2 = b_3 = 0,04$  m,  $\delta_b = 0,0025$  m,  $k = 200$  W/(m.K),  $h = 100$  W/(m<sup>2</sup>.K),  $q_1 = 40$  W,  $q_2 = 80$  W,  $q_3 = 20$  W,  $L = 0,2$  m.

SOLUÇÃO: as considerações para esse problema são (1) regime permanente, (2) condução unidimensional, (3) coeficiente de transferência de calor uniforme, (4) sem geração interna de energia e (5) sem efeito de radiação térmica. A equação diferencial para as três aletas longitudinais de perfil retangular é dada pela Eq. (16), que em termos das variáveis  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  são reescritas como:

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{2h_1}{k\delta_b}(T_1 - T_\infty) = 0 \quad (389)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dx^2} - \frac{2h_2}{k\delta_b}(T_2 - T_\infty) = 0 \quad (390)$$

$$\frac{d^2 T_3}{dx^2} - \frac{2h_3}{k\delta_b}(T_3 - T_\infty) = 0 \quad (391)$$

Definindo os parâmetros  $m_1^2 = \frac{2h_1}{kw}$ ,  $m_2^2 = \frac{2h_2}{kw}$ ,  $m_3^2 = \frac{2h_3}{kw}$ ,  $\theta_1(x) = T_1(x) - T_\infty$ ,  $\theta_2(x) = T_2(x) - T_\infty$  e  $\theta_3(x) = T_3(x) - T_\infty$  pode-se reescrever as Eqs. (389-391) na seguinte forma:

$$\frac{d^2 \theta_1}{dx^2} - m_1^2 \theta_1 = 0 \quad (392)$$

$$\frac{d^2 \theta_2}{dx^2} - m_2^2 \theta_2 = 0 \quad (393)$$

$$\frac{d^2\theta_3}{dx^2} - m_3^2\theta_3 = 0 \quad (394)$$

Três condições de contorno são impostas estabelecendo as taxas de calor nas bases das aletas. Outras três condições de contorno são escritas pela imposição da igualdade de temperatura na junção das três aletas, definida como  $\theta_i = T_i - T_\infty$ . Essas seis equações são escritas como:

$$q_1 = -k(\delta_b L) \left. \frac{d\theta_1}{dx} \right|_{x=0} \quad (395)$$

$$q_2 = -k(\delta_b L) \left. \frac{d\theta_2}{dx} \right|_{x=0} \quad (396)$$

$$q_3 = -k(\delta_b L) \left. \frac{d\theta_3}{dx} \right|_{x=0} \quad (397)$$

$$\theta_1(x = b_1) = \theta_i \quad (398)$$

$$\theta_2(x = b_2) = \theta_i \quad (399)$$

$$\theta_3(x = b_3) = \theta_i \quad (400)$$

O cálculo da temperatura da junção das três aletas pode ser feito através de um balanço de fluxos de calor na interface, ou seja:

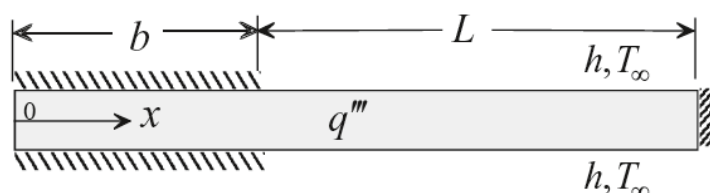
$$\left. \frac{d\theta_1}{dx} \right|_{x=b_1} + \left. \frac{d\theta_2}{dx} \right|_{x=b_2} + \left. \frac{d\theta_3}{dx} \right|_{x=b_3} = 0 \quad (401)$$

## 9-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

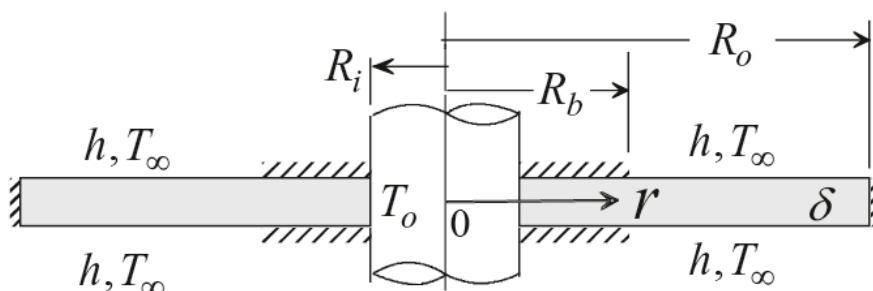
1. AVRAMI, M. e LITTLE, J. B., *Diffusion of Heat Through a Rectangular Bar and the Cooling and Insulating Effect of Fins: I. The Steady State*, Journal of Applied Physics, Vol. 15, n. 5, pp.304, 1942.
2. BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S.; INCROPERA, F. P. e DEWITT, W. P., *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*, Editora LTC, 7ª edição, 2014, Rio de Janeiro.
3. BUECHE, W. e SCHAU, F., *Arch. Waermewirtsch., Dampfkesselwes*, Vol. 17, pp. 67, 1936.
4. CARRIER, W. H., e ANDERSON, S. W., *The Resistance to Heat Flow Through Finned Tubing*, Heat. Piping Air Cond., Vol. 16, n.5, pp. 304, 1944.
5. DESPRETZ, C. M., *Annales de Chimie et de Physique*, Vol. 19, pp. 97, 1922.
6. FOCKE, R., *Die Nadel als Kuhlelemente*, Forsch. Geb. Ingenieurwes, Vol. 13, pp. 34, 1942.
7. FOURIER, J. B. J., *The Analytic Theory of Heat* (1822), translated by A. Freeman, Cambridge University Press, Cambridge, 1878.
8. GARDNER, K. A., *Efficiency of Extended Surface*, Trans. ASME, Vol. 67, pp. 621, 1945.
9. HARPER, D. R. e BROWN W. B., *Mathematical equation for heat conduction in the fins for air cooled engine*, NACA Report 158, National Advisory Committee on Aeronautics, Washington, DC, 1922.
10. HAUSEN, H., *Warmeübertragung durch Rippenrohe*, Z. Ver. Dtsch. Ing. Beiheft, Vol. 55, 1940.
11. JAKOB, M., *Heat Transfer*, Wiley, 1949, New York.
12. MURRAY, W. M., *Heat Transfer Through an Annular Disk or Fin of Uniform Thickness*, Transaction ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, A78. 1938.
13. SCHMIDT, E., *Die Wärmeübertragung durch Rippen*, Z. Ver. Dtsch. Inc., Vol. 70, pp. 885-947, 1926.

## 10-EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Uma aleta com área de seção transversal constante  $A_c$  e comprimento  $L$  está mantida a  $T_o$  na sua base e isolada na sua extremidade. A aleta está isolada até um comprimento  $b$  a partir de sua base enquanto troca calor por convecção no comprimento restante. A temperatura ambiente é  $T_\infty$  e o coeficiente de transferência de calor é  $h$ . Determine a distribuição de temperaturas ao longo do comprimento da aleta e a taxa de transferência de calor em regime permanente.

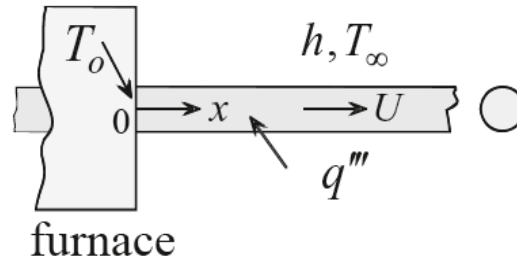


2) Um disco de raio  $R_o$  e espessura  $\delta$  está montado sobre uma tubulação de vapor de raio  $R_i$ . A superfície do disco está isolada de  $r = R_i$  até  $r = R_b$ . A superfície restante do disco troca calor por convecção com o ambiente. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . A temperatura da tubulação onde o disco está montado é  $T_o$  e a superfície em  $r = R_o$  está isolada. Formule as equações governantes e as condições de contorno e obtenha a distribuição de temperaturas ao longo do comprimento do disco.

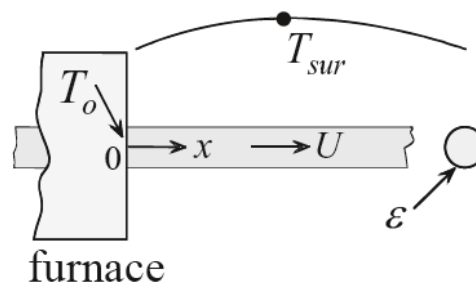


3) Um cabo delgado de raio  $r_o$ , condutividade térmica  $k$ , densidade  $\rho$  e calor específico  $c_p$  move-se através de um forno com velocidade  $U$  e deixa o forno com temperatura  $T_o$ . Existe geração de energia térmica uniforme no interior do cabo a uma taxa  $\dot{q}$  como resultado da conversão de energia elétrica em energia térmica. Fora do forno o cabo é resfriado por convecção. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a

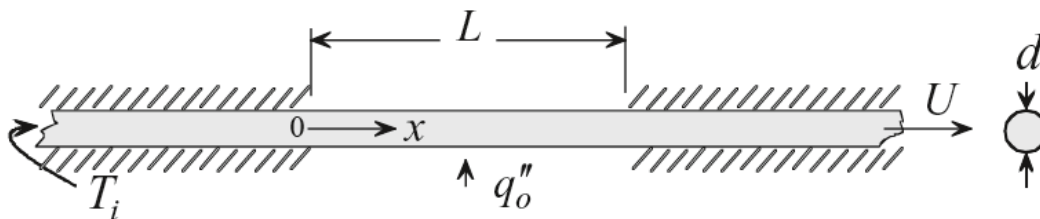
temperatura do ambiente é  $T_\infty$ . Modele o cabo como uma aleta e assumo que ele é infinitamente longo. Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente no cabo.



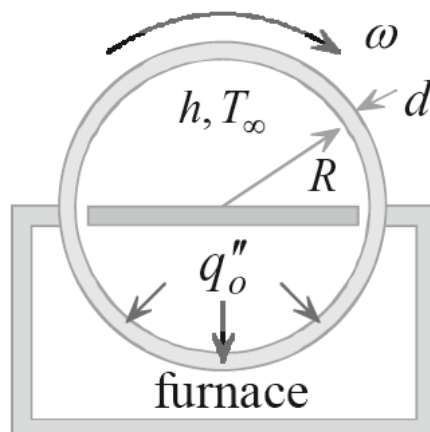
4) Um cabo delgado de raio  $r_o$ , condutividade térmica  $k$ , densidade  $\rho$ , calor específico  $c_p$  e emissividade  $\mathcal{E}$  move-se através de um forno com velocidade  $U$  e deixa a forno com temperatura  $T_o$ . Fora do forno o cabo é resfriado por radiação por uma vizinhança com temperatura  $T_{viz}$ . Em certos casos a condução axial pode ser desprezada. Introduza essa simplificação e considere o cabo como sendo infinitamente longo. Modele o cabo como uma aleta e determine a distribuição de temperaturas em regime permanente no cabo.



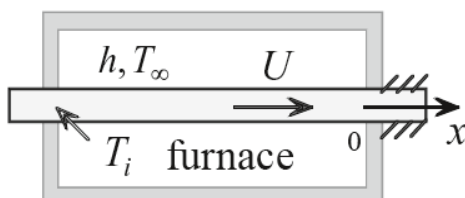
5) Um fio delgado de diâmetro  $d$ , calor específico  $c_p$ , condutividade térmica  $k$  e densidade  $\rho$  move-se com velocidade  $U$  através de um forno de comprimento  $L$ . Energia na forma de calor é transferida ao fio no forno através de um fluxo de calor uniforme  $q_o''$ . Distanto da entrada do forno o fio está com temperatura  $T_i$ . Assuma que não há troca de calor com o fio antes de sua entrada no forno e depois de sua saída do forno. Determine a temperatura do fio em regime permanente na saída do forno.



6) Um fio delgado de diâmetro  $d$  tem o formato de um laço circular de raio  $R$ . O laço gira com velocidade angular constante  $\omega$ . Metade do laço circular passa através de um forno onde é aquecido por um fluxo de calor superficial uniforme  $q_o''$ . A metade restante do fio é resfriada por convecção. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura do ambiente é  $T_\infty$ . O fio tem condutividade térmica  $k$ , densidade  $\rho$  e calor específico  $c_p$ . Modelos o fio como uma aleta e determine a distribuição de temperaturas em regime permanente no fio.



7) Um cabo delgado de raio  $r_o$  move-se com velocidade  $U$  através de um forno de comprimento  $L$ . O fio entra no forno com temperatura  $T_i$  e é aquecido por convecção. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura do ambiente do forno é  $T_\infty$ . Modelos o cabo como uma aleta e determine a temperatura em regime permanente do cabo deixando a forno.



## CAPÍTULO 5

# CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Condução bidimensional em regime permanente é governada por uma equação diferencial parcial de segunda ordem. A solução para esse tipo de problema deve satisfazer a equação diferencial e quatro condições de contorno. O método da separação de variáveis será utilizado para construir essa solução. Serão mostradas inicialmente as ferramentas necessárias para a aplicação desse método. Na sequência serão apresentados diversos exemplos resolvidos para ilustrar a aplicação desse método na solução de problemas de condução de calor bidimensionais.

### 1-A EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR

Inicialmente examinaremos a equação diferencial governante para condução de calor bidimensional. Considerando condução de calor em regime permanente com propriedades constantes e escolhendo duas coordenadas de maneira arbitrária, as Eqs. (41), (65) e (87) do Cap. (1) são simplificadas e reescritas como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha} \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\alpha} \left( V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\alpha} \left( V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (3)$$

As Eqs. (1-3) levam em consideração movimento bidimensional e geração interna de energia. Para o caso especial de meio estacionário sem geração interna de energia, as Eqs. (1-3) são reescritas como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0 \quad (6)$$

As Eqs. (1-3) com  $\dot{q} = 0$  e as Eqs. (4-6) são casos especiais de uma equação diferencial mais geral escrita na seguinte forma:

$$f_2(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f_1(x) \frac{\partial T}{\partial x} + f_0(x)T + g_2(y) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + g_1(y) \frac{\partial T}{\partial y} + g_0(y)T = 0 \quad (7)$$

A Eq. (7) é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, homogênea e com coeficientes variáveis, que pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis para um conjunto especificado de condições de contorno.

## 2-MÉTODO DE SOLUÇÃO E LIMITAÇÕES

Uma aproximação para resolver equações diferenciais parciais é o método da separação de variáveis. A idéia básica dessa aproximação é substituir a equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias. O número de equações diferenciais ordinárias é igual ao número de variáveis independentes da equação diferencial parcial. Assim, para condução bidimensional em regime permanente, a equação de difusão é substituída por duas equações diferenciais ordinárias. Existem duas limitações importantes desse método:

1) Ele é aplicável em equações lineares. Uma equação é dita linear se a variável dependente e suas derivadas aparecem elevadas a primeira potência e se não houver o produto entre a variável dependente e suas derivadas. Assim, as Eqs. (1-7) são lineares;

2) A geometria da região deve ser representada por um sistema de coordenadas ortogonal. Exemplos são: quadrados, retângulos, cilindros e esferas maciços ou ocos, seções de cilindros e esferas. Isso exclui problemas envolvendo triângulos, trapézios e outros domínios de formato irregular.

### 3-EQUAÇÃO DIFERENCIAL HOMOGÊNEA E CONDIÇÕES DE CONTORNO HOMOGÊNEAS

Como a homogeneidade de equações lineares desempenha um papel crucial no método da separação de variáveis, é importante entender o seu significado. Uma equação linear é dita homogênea se ela não se alterar quando a variável dependente for multiplicada por uma constante. A mesma definição serve para as condições de contorno. Utilizando essa definição para checar a Eq. (1), multiplica-se a variável dependente  $T$  por uma constante  $c$ , faz-se a operação de derivada e divide-se a expressão resultante por  $c$ , obtendo-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha} \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\dot{q}}{ck} = 0 \quad (8)$$

Nota-se que a Eq. (8) não é idêntica a Eq. (1). Assim, a Eq. (1) é dita não-homogênea. Entretanto, substituindo  $T$  por  $cT$  na Eq. (4) não altera a equação. Diz-se então que a Eq. (4) é homogênea. Para aplicar esse teste em condições de contorno, considere a condição de contorno convectiva:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty) \quad (9)$$

Substituindo  $T$  por  $cT$  na Eq. (9) obtém-se:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h \left( T - \frac{T_\infty}{c} \right) \quad (10)$$

Como a Eq. (10) é diferente da Eq. (9), a Eq. (9) é não-homogênea. Para o caso especial de  $T_\infty = 0$ , a Eq. (9) torna-se homogênea. O método da separação de variáveis pode ser estendido para resolver problemas onde a equação diferencial e/ou as condições de contorno são não-homogêneas. Para isso deve-se realizar algum tipo de transformação matemática na variável dependente para garantir que a equação diferencial parcial e pelo menos três das quatro condições de contorno sejam homogêneas. Por exemplo, se for definida a variável  $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ , a Eq. (9) é reescrita como:

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial x} = h \theta \quad (11)$$

Dessa forma, substituindo  $\theta$  por  $c\theta$  na Eq. (11) não altera a equação. Diz-se então que a Eq. (11) é homogênea na variável  $\theta$ .

#### 4-PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DE STURM-LIOUVILLE: ORTOGONALIDADE

Conforme descrito no item 2, a idéia básica do método da separação de variáveis é substituir a equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Tal conjunto pertence a uma classe de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem chamada de *problemas de valor de contorno de Sturm-Liouville*. A forma geral da equação de Sturm-Liouville é:

$$\frac{d^2 \phi_n}{dx^2} + a_1(x) \frac{d\phi_n}{dx} + [a_2(x) + \lambda_n^2 a_3(x)] \phi_n = 0 \quad (12)$$

A Eq. (12) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\phi_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_n^2 w(x)] \phi_n = 0 \quad (13)$$

onde

$$p(x) = e^{\int a_1 dx} \quad (14)$$

$$q(x) = a_2 p(x) \quad (15)$$

$$w(x) = a_3 p(x) \quad (16)$$

As seguintes observações podem ser feitas com relação as Eqs. (12-13):

- 1) A função  $w(x)$  é chamada de função peso,
- 2) As Eqs. (12-13) representam um conjunto de  $n$  equações correspondentes a  $n$  valores de  $\lambda_n$ . As soluções correspondentes são representadas por  $\phi_n$ ,
- 3) As soluções  $\phi_n$  são conhecidas como funções características.

Uma propriedade importante do problema de Sturm-Liouville, que é utilizada na aplicação do método da separação de variáveis, é chamada de *ortogonalidade*. Duas funções,  $\phi_n(x)$  e  $\phi_m(x)$ , são ortogonais dentro de um intervalo  $(a,b)$  com relação à função peso  $w(x)$ , se:

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) w(x) dx = 0 \quad n \neq m \quad (17)$$

As funções características do problema de Sturm-Liouville são ortogonais se as funções  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $w(x)$  são reais, e se as condições de contorno em  $x = a$  e em  $x = b$  são homogêneas e escritas na seguinte forma:

$$\phi_n = 0 \quad (18)$$

$$\frac{d\phi_n}{dx} = 0 \quad (19)$$

$$\phi_n + \beta \frac{d\phi_n}{dx} = 0 \quad (20)$$

onde  $\beta$  é uma constante. Entretanto, o caso especial de  $p(x) = 0$  em  $x = a$  ou em  $x = b$ , essas condições podem ser estendidas para incluir:

$$\phi_n(a) = \phi_n(b) \quad (21)$$

$$\frac{d\phi_n(a)}{dx} = \frac{d\phi_n(b)}{dx} \quad (22)$$

Em problemas de transferência de calor, as condições de contorno dadas pelas Eqs. (18-20) correspondem a temperatura zero, fronteira isolada e superfície com convecção, respectivamente. Já as Eqs. (21-22) representam a continuidade de temperatura e fluxo de calor, respectivamente. Serão apresentados a seguir diversos exemplos de problemas de condução de calor bidimensionais na qual o procedimento de solução será detalhado de maneira sistemática. No final desse capítulo, como uma extensão do procedimento apresentado, será analisado um problema de condução de calor tridimensional em regime permanente.

#### EXEMPLO 1 – CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL EM UMA PLACA RETANGULAR

Considere condução bidimensional em regime permanente na placa estacionária mostrada abaixo. Três lados estão mantidos a uma temperatura igual a zero. Ao longo do quarto lado a temperatura varia espacialmente com  $x$ . Determine a distribuição de temperaturas  $T(x, y)$  na placa.

**(1) Observações.** (i) esse é um problema de condução bidimensional em regime permanente, (ii) São necessárias quatro condições de contorno e (iii) três condições de contorno já são homogêneas.

**(2) Origem e coordenadas.** Antes de escrever as condições de contorno, uma origem para os eixos coordenados é necessária. Embora várias escolhas sejam possíveis, algumas são mais adequadas que outras. Em geral, é conveniente selecionar a origem na intersecção das duas condições de contorno mais simples e orientar os eixos coordenados tal que eles estejam paralelos às fronteiras da região sob consideração. Essa escolha

resulta na forma mais simples de solução e evita manipulações algébricas desnecessárias. Assim, a origem e os eixos coordenados foram selecionados conforme pode ser visto na Fig. (1).

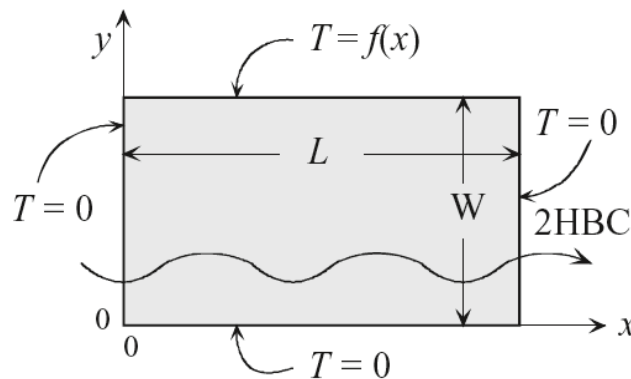


Figura 1 – Esquema do EXEMPLO 1.

### (3) Formulação.

**(i) Considerações.** (1) condução bidimensional, (2) regime permanente, (3) sem geração de energia, (4) condutividade térmica constante e (5) placa estacionária.

**(ii) Equação governante.** A equação de condução para esse problema é dada pela Eq. (4), ou seja:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ (H.)}$$

**(iii) Variável independente com duas condições de contorno homogêneas.** A variável, ou direção, que possui duas condições de contorno homogêneas é identificada examinando as quatro condições de contorno. Nesse exemplo, as fronteiras em  $x = 0$  e  $x = L$  possuem condições homogêneas. Assim, a variável  $x$  tem duas condições de contorno homogêneas. Como esse detalhe tem grande importância no procedimento de solução, ele foi destacado na Fig. (1) por uma seta ondulada identificada por 2 HBC (duas condições de contorno homogêneas).

**(iv) Condições de contorno.** As quatro condições de contorno requeridas estão listadas na seguinte ordem: começando pelas duas fronteiras na variável que possui duas condições de contorno homogêneas e finalizando com a condição não-homogênea.

Assim, nessa ordem, as três primeiras condições são homogêneas e a quarta é não-homogênea. Tem-se então que:

$$(1) T(0, y) = 0 \text{ (H.)}$$

$$(2) T(L, y) = 0 \text{ (H.)}$$

$$(3) T(x, 0) = 0 \text{ (H.)}$$

$$(4) T(x, W) = f(x) \text{ (Ñ.H.)}$$

#### (4) Solução.

**(i) Assumindo solução produto.** Estamos procurando uma solução  $T(x, y)$  que satisfaça a Eq. (4) e as quatro condições de contorno. Pode-se assumir que a solução pode ser construída na forma de um produto de duas funções: uma que depende somente de  $x$ ,  $X(x)$ , e outra que depende somente de  $y$ ,  $Y(y)$ . Assim:

$$T(x, y) = X(x)Y(y) \quad (23)$$

O problema se resume em encontrar essas duas funções. Como a solução deve satisfazer a equação diferencial do problema em análise, pode-se substituir a Eq. (23) na Eq. (4), ou seja:

$$\frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial y^2} = 0 \quad (24)$$

ou

$$Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \quad (25)$$

Separando as variáveis e rearranjando obtém-se:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \quad (26)$$

O lado esquerdo da Eq. (26) é função somente de  $x$ ,  $F(x)$ , enquanto o lado direito da Eq. (26) é função somente de  $y$ ,  $G(y)$ . Assim:

$$F(x) = G(y) \quad (27)$$

Como  $x$  e  $y$  são variáveis independentes, o que implica que uma pode ser alterada independente da outra, as duas funções devem ser iguais a uma constante para que a igualdade seja preservada. Assim, a Eq. (27) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \pm \lambda_n^2 \quad (28)$$

onde  $\lambda_n^2$  é conhecida como constante de separação. Algumas observações podem ser feitas com relação a Eq. (28).

- (1) A constante de separação está elevada ao quadrado. Isso é somente por conveniência. Como será visto mais adiante, a solução será expressa em termos da raiz quadrada da constante escolhida na Eq. (28). Assim, começando com uma constante elevada ao quadrado evita-se ficar escrevendo o sinal da raiz quadrada em todo o procedimento de solução.
- (2) A constante tem um sinal negativo e outro positivo. Isso foi feito pois ambas as possibilidades satisfazem a condição  $F(x) = G(y)$ . Embora somente um sinal forneça a solução correta, nesse momento ainda não sabemos qual é. Essa escolha deve ser feita antes de dar prosseguimento a solução.
- (3) A constante tem um subscrito  $n$  que é introduzido para enfatizar que diversas constantes podem satisfazer a condição  $F(x) = G(y)$ . As constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , são conhecidas como autovalores ou valores característicos. A possibilidade de uma dessas constantes ser zero também deve ser considerada.
- (4) Eq. (28) representa o conjunto de duas equações:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} \pm \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (29)$$

e

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} \pm \lambda_n^2 Y_n = 0 \quad (30)$$

Ao escrever as Eqs. (29-30) o sinal de  $\lambda_n^2$  deve ser analisado com cautela. Como  $\lambda_n$  representa diversas constantes, cada uma dessas equações representa um conjunto de equações diferenciais ordinárias correspondente a todos os valores de  $\lambda_n$ . Esse é o motivo pela qual o subscrito  $n$  é introduzido em  $X_n$  e  $Y_n$ . As funções  $X_n$  e  $Y_n$  são chamadas de autofunções ou funções características.

**(ii) Selecionando o sinal dos termos  $\lambda_n^2$ .** Para prosseguir deve-se primeiramente escolher um dos dois sinais nas Eqs. (29-30). Para isso deve-se retornar à variável, ou direção, que possui duas condições de contorno homogêneas. A regra é escolher o *sinal positivo* para a equação diferencial ordinária representando essa variável. A outra equação diferencial recebe o sinal negativo. Nesse exemplo, conforme destacado na Fig. (1), a variável  $x$  possui duas condições de contorno homogêneas. Assim, as Eqs. (29-30) são reescritas como:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (31)$$

e

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \lambda_n^2 Y_n = 0 \quad (32)$$

Caso a escolha dos sinais seja invertida, será obtida a solução trivial do problema.

**(iii) Solução das equações diferenciais ordinárias.** O procedimento da separação de variáveis permitiu que ao invés de solucionar a equação diferencial parcial dada pela Eq.

(4), deve-se solucionar o conjunto de equações diferenciais ordinárias dadas pelas Eqs. (31-32). As Eqs. (31-32) podem ser resolvidas pela técnica da equação característica conforme mostrado no Apêndice. Os resultados obtidos são:

$$X_n(x) = A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x) \quad (33)$$

$$Y_n(y) = C_n \sinh(\lambda_n y) + D_n \cosh(\lambda_n y) \quad (34)$$

De acordo com a Eq. (23), cada produto  $X_n Y_n$  é solução da Eq. (4). Assim:

$$T_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) \quad (35)$$

Como a Eq. (4) é linear, segue que a soma de todas as soluções também é uma solução. Assim, a solução completa pode ser escrita como:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \quad (36)$$

**(iv) Aplicação das condições de contorno.** Para completar a solução, as constantes  $A_n, B_n, C_n, D_n$  e os valores característicos  $\lambda_n$  devem ser determinados. As condições de contorno serão aplicadas na ordem indicada no passo 3 descrito anteriormente. Assim, a condição de contorno 1 fornece que:

$$T_n(0, y) = X_n(0) \underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X_n(0) = 0 \Rightarrow A_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0} + B_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} = 0 \Rightarrow B_n = 0 \quad (37)$$

Aplicando a condição de contorno 2 e utilizando o resultado da Eq. (37) obtém-se:

$$T_n(L, y) = X_n(L) \underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X_n(L) = 0 \Rightarrow \underbrace{A_n}_{\neq 0} \sin(\lambda_n L) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda_n L) = 0$$

$$\lambda_n L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \dots \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

A Eq. (38) é chamada de equação característica. Todas as soluções obtidas pelo método da separação de variáveis devem incluir uma equação característica para a determinação dos valores de  $\lambda_n$ . Aplicando a condição de contorno 3 obtém-se:

$$T_n(x,0) = \underbrace{X_n(x)}_{\neq 0} Y_n(0) = 0 \Rightarrow Y_n(0) = 0 \Rightarrow C_n \underbrace{\sinh(\lambda_n 0)}_{=0} + D_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} = 0 \Rightarrow D_n = 0 \quad (39)$$

Com os resultados das Eqs. (37) e (39) pode-se reescrever as Eqs. (33-34) na seguinte forma:

$$X_n(x) = A_n \sin(\lambda_n x) \quad (40)$$

$$Y_n(x) = C_n \sinh(\lambda_n y) \quad (41)$$

Assim, a Eq. (35) é reescrita como:

$$T_n(x, y) = A_n \sin(\lambda_n x) C_n \sinh(\lambda_n y) \quad (42)$$

Substituindo as Eq. (42) na Eq. (36) obtém-se:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n y) \quad (43)$$

onde  $a_n = A_n C_n$ . A última incógnita restante é a combinação de constantes  $a_n$ . Para a determinação de  $a_n$  aplica-se a condição de contorno 4 na Eq. (43), ou seja:

$$T(x, W) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n W) \quad (44)$$

A Eq. (44) não pode ser resolvida diretamente para a obtenção de  $a_n$  por causa da variável  $x$  e pelo sinal de somatório. Para prosseguir deve-se utilizar o conceito de ortogonalidade conforme a Eq. (17).

**(v) Ortogonalidade.** A Eq. (17) é utilizada para determinar  $a_n$ . Nota-se que a função  $\sin(\lambda_n x)$  na Eq. (44) é a solução da Eq. (31). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (44) somente se a Eq. (31) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $x=0$  e  $x=L$  foram homogêneas da forma descrita pelas Eqs. (18-20). Comparando a Eq. (31) com a Eq. (12) obtém-se:

$$a_1(x) = a_2(x) = 0 \quad \text{e} \quad a_3(x) = 1 \quad (45)$$

Utilizando os resultados da Eq. (45), obtém-se das Eqs. (14-16) que  $p(x) = e^{\int a_1 dx} = e^{\int 0 dx} = 1$ ,  $q(x) = 0.1 = 0$  e  $w(x) = 1.1 = 1$ . Como as duas condições de contorno de  $X_n(x) = \sin(\lambda_n x)$  são homogêneas na forma descrita pelas Eqs. (18-20), conclui-se que as funções características  $\phi_n(x) = \sin(\lambda_n x)$  e  $\phi_m(x) = \sin(\lambda_m x)$  são ortogonais com relação a função peso  $w(x) = 1$ . Agora estamos prontos para aplicar a ortogonalidade na Eq. (44) para determinar  $a_n$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (44) por  $w(x)\sin(\lambda_m x)dx$  e integrando de  $x=0$  a  $x=L$  obtém-se:

$$\int_0^L f(x)w(x)\sin(\lambda_m x)dx = \int_0^L \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n W) \right] w(x) \sin(\lambda_m x) dx \quad (46)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que  $w(x) = 1$  pode-se reescrever a Eq. (46) como:

$$\int_0^L f(x) \sin(\lambda_m x) dx = a_n \sinh(\lambda_n W) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m x) dx \quad (47)$$

De acordo com o princípio da ortogonalidade, Eq. (17), a integral do lado direito da Eq. (47) é nula quando  $m \neq n$ . Assim, todas as integrais devido ao sinal de somatório são nulas, exceto no caso quando  $m = n$ . A Eq. (47) pode então ser reescrita como:

$$\int_0^L f(x) \sin(\lambda_n x) dx = a_n \sinh(\lambda_n W) \int_0^L \sin^2(\lambda_n x) dx \quad (48)$$

A integral do lado direito da Eq. (48) pode ser calculada fazendo inicialmente a mudança de variáveis  $\lambda_n x = a$  de tal forma que  $\lambda_n dx = da$ . Substituindo esse resultado na integral do lado direito da Eq. (48) obtém-se:

$$\int_0^L \sin^2(\lambda_n x) dx = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^L \sin^2 a da \quad (49)$$

A integral da Eq. (49) pode ser calculada utilizando as identidades trigonométricas  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$  e  $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$  de tal forma que  $\sin^2 a = \frac{1}{2}[1 - \cos(2a)]$ . Substituindo esse resultado na Eq. (49) e rearranjando obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^L \sin^2 a da &= \frac{1}{\lambda_n} \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} [1 - \cos(2a)] \right\} da = \frac{1}{2\lambda_n} \int_0^L [1 - \cos(2a)] da = \frac{1}{2\lambda_n} \left( a - \frac{1}{2} \sin(2a) \right) \Big|_0^L = \\ &= \frac{1}{2\lambda_n} \left[ \lambda_n x - \frac{1}{2} \sin(2\lambda_n x) \right] \Big|_0^L = \frac{1}{2\lambda_n} \left[ \lambda_n L - \frac{1}{2} \sin(2\lambda_n L) \right] - \frac{1}{2\lambda_n} \left[ \lambda_n 0 - \frac{1}{2} \underbrace{\sin(2\lambda_n 0)}_{=0} \right] = \\ &= \frac{1}{2\lambda_n} \left[ \lambda_n L - \frac{1}{2} \sin(2\lambda_n L) \right] = \frac{L}{2} - \frac{1}{4\lambda_n} \sin(2\lambda_n L) = \frac{L}{2} - \frac{1}{4\lambda_n} \underbrace{\sin\left(2 \frac{n\pi}{L} L\right)}_{=0} = \frac{L}{2} \quad (50) \end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (50) na Eq. (48) e resolvendo para  $a_n$  obtém-se:

$$a_n = \frac{2}{L \sinh(\lambda_n W)} \int_0^L f(x) \sin(\lambda_n x) dx \quad (51)$$

A forma final da distribuição de temperaturas é escrita substituindo a Eq. (51) na Eq. (43) e posterior substituição da equação característica para  $\lambda_n$ , Eq. (38), na expressão resultante, fornecendo o seguinte resultado:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L \sinh\left(\frac{n\pi}{L} W\right)} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L} y\right), n = 1, 2, 3, \dots \quad (52)$$

**(5) Checando.** Análise dimensional. (i) o argumento do  $\sin$  e do  $\sinh$  devem ser adimensionais. De acordo com a Eq. (38),  $\lambda_n$  tem unidade de  $(1/m)$ . Assim,  $\lambda_n x$  e  $\lambda_n y$  são adimensionais e (ii) O coeficiente  $a_n$  na Eq. (51) deve ter unidade de temperatura. Como  $f(x)$  na condição de contorno 4 representa temperatura, segue da Eq. (51) que  $a_n$  tem medida de temperatura. Se  $f(x) = 0$ , a temperatura deve ser zero em todos os pontos do domínio. Substituindo  $f(x) = 0$  na Eq. (51) obtém-se  $a_n = 0$ . Substituindo esse resultado na Eq. (43) obtém-se  $T(x, y) = 0$ , conforme esperado.

**(6) Comentários:** (i) a aplicação da condição de contorno não-homogênea leva a uma equação contendo uma série infinita com coeficientes desconhecidos. Ortogonalidade é utilizada para determinar esses coeficientes, (ii) na aplicação da ortogonalidade, é importante identificar as funções características e a função peso do problema de Sturm-Liouville, (iii) a seguir serão apresentados diversos exemplos de solução de problemas de condução de calor bidimensionais em regime permanente. Diversos aspectos de solução são similares aos considerados no EXEMPLO 1. Assim, o procedimento de solução será mostrado de forma abreviada. Somente quando novos procedimentos matemáticos surgirem o procedimento de solução será detalhado e (iv) uma rotina de cálculos para esse exemplo pode ser vista no arquivo MAPLE1.mw do MAPLE.

## EXEMPLO 2 – PLACA SEMI-INFINITA COM CONVECÇÃO SUPERFICIAL

Considere condução bidimensional em uma placa semi-infinita estacionária conforme a figura abaixo. A placa troca calor por convecção com um ambiente a  $T_\infty$ . O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a altura da placa é  $L$ . Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente na placa semi-infinita.

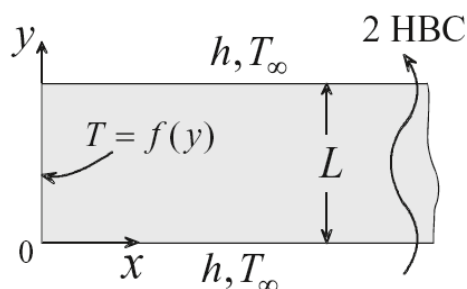


Figura 2 – Esquema do EXEMPLO 2.

**(1) Observações.** (i) em  $x = \infty$ , a placa atinge a temperatura do fluido e (ii) as quatro condições de contorno são não-homogêneas. Entretanto, definindo a variável excesso de temperaturas  $\theta(x, y) = T(x, y) - T_\infty$ , três das quatro condições de contorno tornam-se homogêneas, tornando o método da separação de variáveis aplicável.

**(2) Origem e coordenadas.** A Fig. (2) mostra a origem e os eixos coordenados.

**(3) Formulação.**

**(i) Considerações.** (1) condução bidimensional, (2) regime permanente, (3) coeficiente de transferência de calor e temperatura ambiente uniformes, (4) condutividade térmica constante e (5) sem geração de energia.

**(ii) Equações governantes.** Introduzindo a definição do excesso de temperaturas na Eq. (4) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ (H.)} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \text{ (H.)} \quad (53)$$

**(iii) Variável independente com duas condições de contorno homogêneas.** Em termos de  $\theta$ , a direção  $y$  possui duas condições de contorno homogêneas. Assim, a direção  $y$  na Fig. (2) está marcada com uma seta ondulada indicando 2 HBC.

**(iv) Condições de contorno.** As quatro condições de contorno para esse problema são:

$$(1) \quad k \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = h[T(x, 0) - T_\infty] \text{ (Ñ.H.)} \Rightarrow k \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = h\theta(x, 0) \text{ (H.)}$$

$$(2) \quad -k \frac{\partial T(x, L)}{\partial y} = h[T(x, L) - T_\infty] \text{ (Ñ.H.)} \Rightarrow -k \frac{\partial \theta(x, L)}{\partial y} = h\theta(x, L) \text{ (H.)}$$

$$(3) \quad T(\infty, y) = T_\infty \text{ (Ñ.H.)} \Rightarrow \theta(\infty, y) = 0 \text{ (H.)}$$

$$(4) \quad T(0, y) = f(y) \text{ (Ñ.H.)} \Rightarrow \theta(0, y) = f(y) - T_\infty \text{ (Ñ.H.)}$$

#### (4) Solução.

(i) **Assumindo solução produto.** Tem-se então que:

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y) \quad (54)$$

Substituindo a Eq. (54) na Eq. (53), separando variáveis e igualando a uma constante obtém-se:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \pm \lambda_n^2 \quad (55)$$

Assim, considerando que  $\lambda_n$  pode assumir diversos valores, a Eq. (55) pode ser reescrita em termos de duas equações diferenciais ordinárias, ou seja:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} \pm \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (56)$$

e

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} \pm \lambda_n^2 Y_n = 0 \quad (57)$$

(ii) **Escolhendo o sinal dos termos  $\lambda_n^2$ .** Como a variável  $y$  tem duas condições de contorno homogêneas, o termo  $\lambda_n^2 Y_n$  na Eq. (57) deve ser sinal positivo. Assim:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} - \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (58)$$

e

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \lambda_n^2 Y_n = 0 \quad (59)$$

**(iii) Soluções das equações diferenciais ordinárias.** As Eqs. (58-59) podem ser resolvidas pela técnica da equação característica conforme mostrado no Apêndice. Os resultados são:

$$X_n(x) = A_n \exp(-\lambda_n x) + B_n \exp(\lambda_n x) \quad (60)$$

$$Y_n(y) = C_n \sin(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y) \quad (61)$$

Correspondente a cada valor de  $\lambda_n$  existe uma solução para a distribuição de temperaturas  $\theta_n(x, y)$ . Assim:

$$\theta_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) \quad (62)$$

A solução completa tem a seguinte forma:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) \quad (63)$$

**(iv) Aplicação das condições de contorno.** Nesse problema a aplicação das condições de contorno exige uma preparação prévia das Eqs. (60-61) pela necessidade das derivadas dessas expressões, conforme as condições de contorno 1 e 2. Da condição de contorno 1 são necessárias as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_n}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [X_n(x)Y_n(y)] = X_n(x) \frac{\partial}{\partial y} [Y_n(y)] = X_n(x) \frac{\partial}{\partial y} [C_n \sin(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y)] = \\ &X_n(x) \lambda_n [C_n \cos(\lambda_n y) - D_n \sin(\lambda_n y)] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta_n(x, 0)}{\partial y} = X_n(x) \lambda_n \left[ C_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} - D_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0} \right] = X_n(x) C_n \lambda_n \quad (64)$$

$$\theta_n(x, 0) = X_n(x)Y_n(0) = X_n(x) \left[ C_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0} + D_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} \right] = X_n(x) D_n \quad (65)$$

Utilizando os resultados das Eqs. (64-65) e aplicando a condição de contorno 1 obtém-se:

$$kX_n(x)C_n\lambda_n = hX_n(x)D_n \Rightarrow C_n = \left(\frac{h}{k\lambda_n}\right)D_n \quad (66)$$

Da condição de contorno 2 são necessárias as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_n}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [X_n(x)Y_n(y)] = X_n(x) \frac{\partial}{\partial y} [Y_n(y)] = X_n(x) \frac{\partial}{\partial y} [C_n \sin(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y)] = \\ &X_n(x)\lambda_n [C_n \cos(\lambda_n y) - D_n \sin(\lambda_n y)] \\ \frac{\partial \theta_n(x, L)}{\partial y} &= X_n(x)\lambda_n [C_n \cos(\lambda_n L) - D_n \sin(\lambda_n L)] \end{aligned} \quad (67)$$

$$\theta_n(x, L) = X_n(x)Y_n(L) = X_n(x)[C_n \sin(\lambda_n L) + D_n \cos(\lambda_n L)] \quad (68)$$

Utilizando os resultados das Eqs. (67-68) e aplicando a condição de contorno 2 obtém-se:

$$-kX_n(x)\lambda_n [C_n \cos(\lambda_n L) - D_n \sin(\lambda_n L)] = hX_n(x)[C_n \sin(\lambda_n L) + D_n \cos(\lambda_n L)] \quad (69)$$

Substituindo o resultado da Eq. (66) na Eq. (69) e simplificando obtém-se:

$$-k\lambda_n \left[ \left(\frac{h}{k\lambda_n}\right) D_n \cos(\lambda_n L) - D_n \sin(\lambda_n L) \right] = h \left[ \left(\frac{h}{k\lambda_n}\right) D_n \sin(\lambda_n L) + D_n \cos(\lambda_n L) \right] \quad (70)$$

Simplificando e rearranjando a Eq. (70) obtém-se:

$$\left(\frac{h}{k\lambda_n}\right) \cos(\lambda_n L) - \sin(\lambda_n L) = -\frac{h}{k\lambda_n} \left[ \left(\frac{h}{k\lambda_n}\right) \sin(\lambda_n L) + \cos(\lambda_n L) \right] \quad (71)$$

O termo  $\frac{h}{k\lambda_n}$  pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\frac{h}{k\lambda_n} = \frac{hL}{k} \frac{1}{\lambda_n L} = \frac{Bi}{\lambda_n L} \quad (72)$$

onde  $Bi = hL/k$  é o número de Biot. Substituindo o resultado da Eq. (72) na Eq. (71) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{\lambda_n L}{Bi} - \frac{Bi}{\lambda_n L} = 2 \cot(\lambda_n L) \quad (73)$$

A Eq. (73) é a equação característica cuja solução fornece os valores de  $\lambda_n$ . Os valores de  $\lambda_n$  podem ser obtidos numericamente pela solução da Eq. (73) para um número de Biot especificado. Na forma gráfica, a solução da Eq. (73) pode ser representada pela Fig. (3). Aplicando a condição de contorno 3 obtém-se:

$$\theta(\infty, y) = X_n(\infty)Y_n(y) = 0 \Rightarrow [A_n \underbrace{\exp(-\lambda_n \infty)}_{=0} + B_n \underbrace{\exp(\lambda_n \infty)}_{=\infty}] \underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow B_n = 0 \quad (74)$$

Com os resultados das Eqs. (66, 72 e 74) pode-se reescrever as Eqs. (60-61) na seguinte forma:

$$X_n(x) = A_n \exp(-\lambda_n x) \quad (75)$$

$$Y_n(y) = D_n \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] \quad (76)$$

Assim, a Eq. (62) é reescrita como:

$$\theta_n(x, y) = A_n D_n \exp(-\lambda_n x) \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] \quad (77)$$

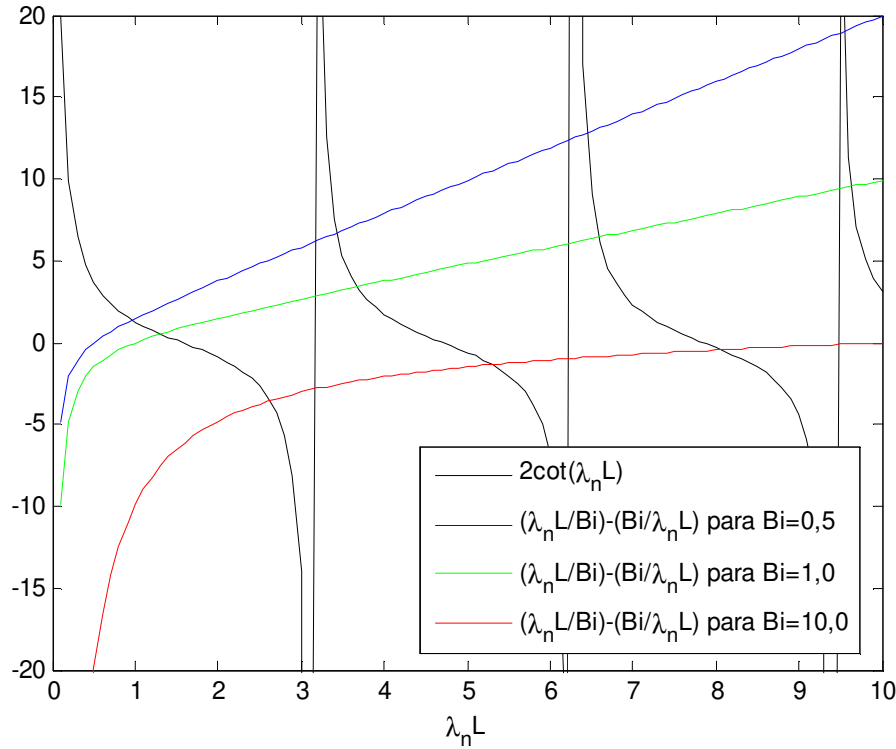


Figura 3 – Representação gráfica da Eq. (73).

Substituindo a Eq. (77) na Eq. (63) obtém-se:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n x) \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] \quad (78)$$

onde  $a_n = A_n D_n$ . A última incógnita restante é a combinação de constantes  $a_n$ . Para a determinação de  $a_n$  aplica-se a condição de contorno 4 na Eq. (78), ou seja:

$$\begin{aligned} \theta(0, y) = f(y) - T_{\infty} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n 0) \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] \Rightarrow \\ f(y) - T_{\infty} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] \end{aligned} \quad (79)$$

A Eq. (79) não pode ser resolvida diretamente para a obtenção de  $a_n$  por causa da variável  $y$  e pelo sinal de somatório. Para prosseguir deve-se utilizar o conceito de ortogonalidade conforme a Eq. (17).

(v) **Ortogonalidade.** A Eq. (17) é utilizada para determinar  $a_n$ . Nota-se que a função  $[(Bi/\lambda_n L)\sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y)]$  na Eq. (79) é a solução da Eq. (59). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (79) somente se a Eq. (59) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $y = 0$  e  $y = L$  foram homogêneas da forma descrita pelas Eqs. (18-20). Comparando a Eq. (59) com a Eq. (12) obtém-se:

$$a_1(y) = a_2(y) = 0 \quad \text{e} \quad a_3(y) = 1 \quad (80)$$

Utilizando os resultados da Eq. (80), obtém-se das Eqs. (14-16) que  $p(y) = e^{\int a_1 dy} = e^{\int 0 dy} = 1$ ,  $q(y) = 0.1 = 0$  e  $w(y) = 1.1 = 1$ . Como as duas condições de contorno de  $Y_n(y) = [(Bi/\lambda_n L)\sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y)]$  são homogêneas da forma descrita pelas Eqs. (18-20), conclui-se que as funções características  $\phi_n(y) = [(Bi/\lambda_n L)\sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y)]$  e  $\phi_m(y) = [(Bi/\lambda_m L)\sin(\lambda_m y) + \cos(\lambda_m y)]$  são ortogonais com relação a função peso  $w(y) = 1$ . Agora estamos prontos para aplicar a ortogonalidade na Eq. (79) para determinar  $a_n$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (79) por  $w(y)[(Bi/\lambda_m L)\sin(\lambda_m y) + \cos(\lambda_m y)]dy$  e integrando de  $y = 0$  a  $y = L$  obtém-se:

$$\int_0^L [f(y) - T_\infty] w(y) \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_m L} \right) \sin(\lambda_m y) + \cos(\lambda_m y) \right] dy =$$

$$\int_0^L \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] \right\} w(y) \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_m L} \right) \sin(\lambda_m y) + \cos(\lambda_m y) \right] dy \quad (81)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que  $w(y) = 1$  pode-se reescrever a Eq. (81) como:

$$\int_0^L [f(y) - T_\infty] \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_m L} \right) \sin(\lambda_m y) + \cos(\lambda_m y) \right] dy =$$

$$a_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_m L} \right) \sin(\lambda_m y) + \cos(\lambda_m y) \right] dy \quad (82)$$

De acordo com o princípio da ortogonalidade, Eq. (17), a integral do lado direito da Eq. (82) é nula quando  $m \neq n$ . Assim, todas as integrais que surgem devido ao sinal de somatório são nulas no caso quando  $m = n$ . A Eq. (82) pode então ser reescrita como:

$$\int_0^L [f(y) - T_\infty] \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] dy = a_n \int_0^L \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right]^2 dy \quad (83)$$

A integral do lado direito da Eq. (83) pode ser calculada fazendo inicialmente a mudança de variáveis  $\lambda_n y = a$  de tal forma que  $\lambda_n dy = da$ . Substituindo esse resultado na integral do lado direito da Eq. (83) obtém-se:

$$\int_0^L \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right]^2 dy = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^L \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin a + \cos a \right]^2 da \quad (84)$$

A Eq. (84) pode ser reescrita utilizando o produto notável quadrado da soma de dois termos, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^L \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin a + \cos a \right]^2 da &= \frac{1}{\lambda_n} \int_0^L \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right)^2 \sin^2 a + 2 \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin a \cos a + \cos^2 a \right] da = \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right)^2 \int_0^L \sin^2 a da + 2 \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \int_0^L \sin a \cos a da + \int_0^L \cos^2 a da \right] \end{aligned} \quad (85)$$

A primeira integral do lado direito da Eq. (85) pode ser calculada utilizando a identidade trigonométrica  $\sin^2 a = \frac{1}{2}[1 - \cos(2a)]$ , conforme o EXEMPLO 1, ou seja:

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin^2 a da &= \int_0^L \left\{ \frac{1}{2}[1 - \cos(2a)] \right\} da = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^L [1 - \cos(2a)] da = \frac{1}{2} \left( a - \frac{1}{2} \sin(2a) \right) \Big|_0^L \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lambda_n L - \frac{1}{2} \sin(2\lambda_n L) \right] - \frac{1}{2} \left[ \lambda_n 0 - \frac{1}{2} \underbrace{\sin(2\lambda_n 0)}_{=0} \right] = \frac{\lambda_n L}{2} - \frac{\sin(2\lambda_n L)}{4} \end{aligned} \quad (86)$$

A segunda integral do lado direito da Eq. (85) pode ser calculada utilizando o método da substituição. Nesse caso pode-se fazer  $u = \sin a$  de tal forma que  $du = \cos a da$ . Substituindo esses resultados obtém-se:

$$\int_0^L \sin a \cos a da = \int_0^L u du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\sin^2 a}{2} \Big|_0^L = \frac{\sin^2(\lambda_n y)}{2} \Big|_0^L = \frac{\sin^2(\lambda_n L)}{2} - \underbrace{\frac{\sin^2(\lambda_n 0)}{2}}_{=0} = \frac{\sin^2(\lambda_n L)}{2} \quad (87)$$

A terceira integral do lado direito da Eq. (85) pode ser calculada utilizando as identidades trigonométricas  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$  e  $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$  de tal forma que  $\cos^2 a = \frac{1}{2}[1 + \cos(2a)]$ . Tem-se então que:

$$\int_0^L \cos^2 a da = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} [1 + \cos(2a)] \right\} da = \frac{1}{2} \int_0^L [1 + \cos(2a)] da = \frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{2} \sin(2a) \right) \Big|_0^L = \frac{1}{2} \left[ \lambda_n L + \frac{1}{2} \sin(2\lambda_n L) \right] - \frac{1}{2} \left[ \lambda_n 0 + \frac{1}{2} \underbrace{\sin(2\lambda_n 0)}_{=0} \right] = \frac{\lambda_n L}{2} + \frac{\sin(2\lambda_n L)}{4} \quad (88)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (86-88) no lado direito da Eq. (85), utilizando o resultado da Eq. (73) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{1}{\lambda_n} \left\{ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right)^2 \left[ \frac{\lambda_n L}{2} - \frac{\sin(2\lambda_n L)}{4} \right] + 2 \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \left[ \frac{\sin^2(\lambda_n L)}{2} \right] + \left[ \frac{\lambda_n L}{2} + \frac{\sin(2\lambda_n L)}{4} \right] \right\} = \left( \frac{L}{2} \right) \left[ 1 + \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right)^2 + \frac{2Bi}{(\lambda_n L)^2} \right] \quad (89)$$

Substituindo a Eq. (89) na Eq. (83) e resolvendo para  $a_n$  obtém-se:

$$a_n = \frac{\int_0^L [f(y) - T_\infty] \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] dy}{\left( \frac{L}{2} \right) \left[ 1 + \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right)^2 + \frac{2Bi}{(\lambda_n L)^2} \right]} \quad (90)$$

A forma final da distribuição de temperaturas é escrita substituindo a Eq. (90) na Eq. (78) e voltando na variável original, fornecendo o seguinte resultado:

$$T(x, y) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^L [f(y) - T_\infty] \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] dy}{\left( \frac{L}{2} \right) \left[ 1 + \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right)^2 + \frac{2Bi}{(\lambda_n L)^2} \right]} \exp(-\lambda_n x) \times \left[ \left( \frac{Bi}{\lambda_n L} \right) \sin(\lambda_n y) + \cos(\lambda_n y) \right] \quad (91)$$

**(5) Checando.** Análise dimensional. (i) os argumentos do sin, cos e exp devem ser adimensionais. De acordo com a Eq. (73),  $\lambda_n$  tem unidade de (1/m). Assim,  $\lambda_n x$ ,  $\lambda_n y$  e  $\lambda_n L$  são adimensionais e (ii) o coeficiente  $a_n$  na Eq. (90) deve ter unidade de temperatura. Como  $f(y)$  na condição de contorno 4 representa temperatura, segue da Eq. (90) que  $a_n$  tem medida de temperatura. Se  $f(y) = T_\infty$ , não ocorre transferência de calor na placa e toda a placa estará a  $T_\infty$ . Substituindo  $f(y) = T_\infty$  na Eq. (90) obtém-se  $a_n = 0$ . Substituindo esse resultado na Eq. (78) obtém-se que  $T(x, y) = T_\infty$ , conforme esperado.

**(6) Comentários:** (i) a introdução da variável  $\theta(x, y) = T(x, y) - T_\infty$  tornou possível a transformação de três das quatro condições de contorno de não-homogêneas para homogêneas, condição necessária para a aplicação do método da separação de variáveis e (ii) uma rotina de cálculos para esse exemplo pode ser vista no arquivo MAPLE2.mw do MAPLE.

### EXEMPLO 3 – PLACA EM MOVIMENTO COM CONVECÇÃO SUPERFICIAL

Uma placa semi-infinita de espessura  $2L$  move-se através de um forno com velocidade  $U$  e deixa o forno a uma temperatura  $T_o$ . Fora do forno a placa é resfriada por convecção. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . Determine a distribuição de temperaturas bidimensional em regime permanente na placa.

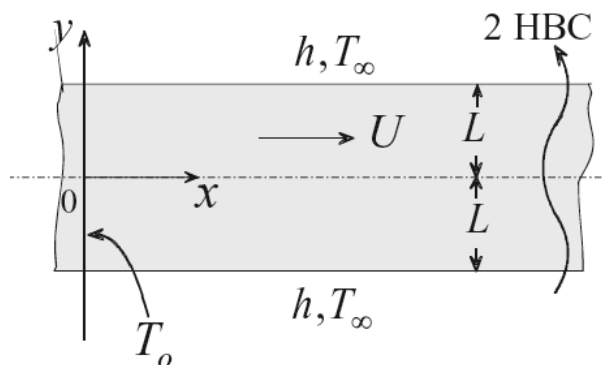


Figura 4 – Esquema do EXEMPLO 3.

**(1) Observações.** (i) a distribuição de temperaturas é simétrica com relação ao eixo  $x$ , (ii) em  $x = \infty$ , a placa atinge a temperatura do fluido e (iii) as quatro condições de contorno são não-homogêneas. Entretanto, definindo a variável excesso de temperaturas  $\theta(x, y) = T(x, y) - T_\infty$ , três das quatro condições de contorno tornam-se homogêneas.

**(2) Origem e coordenadas.** A Fig. (4) mostra a origem e os eixos coordenados.

**(3) Formulação.**

**(i) Considerações.** (1) condução bidimensional, (2) regime permanente, (3) coeficiente de transferência de calor e temperatura ambiente uniformes, (4) condutividade térmica constante e (5) sem geração de energia.

**(ii) Equações governantes.** Introduzindo a definição do excesso de temperaturas na Eq. (4) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\rho c_p U}{k} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ (H.)} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - 2\beta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ (H.)} \quad (92)$$

com a variável  $\beta$  sendo definida por:

$$\beta = \frac{\rho c_p U}{2k}$$

**(iii) Variável independente com duas condições de contorno homogêneas.** Em termos de  $\theta$ , a variável  $y$  possui duas condições de contorno homogêneas. Assim, a direção  $y$  na Fig. (4) está marcada com uma seta ondulada indicando 2 HBC.

**(iv) Condições de contorno.** As quatro condições de contorno para esse problema são:

$$(1) \frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = 0 \text{ (H.)} \Rightarrow \frac{\partial \theta(x,0)}{\partial y} = 0 \text{ (H.)}$$

$$(2) -k \frac{\partial T(x,L)}{\partial y} = h[T(x,L) - T_\infty] \text{ (Ñ.H.)} \Rightarrow -k \frac{\partial \theta(x,L)}{\partial y} = h\theta(x,L) \text{ (H.)}$$

$$(3) T(\infty, y) = T_\infty \text{ (Ñ.H.)} \Rightarrow \theta(\infty, y) = 0 \text{ (H.)}$$

$$(4) T(0, y) = T_o \text{ (Ñ.H.)} \Rightarrow \theta(0, y) = T_o - T_\infty \text{ (Ñ.H.)}$$

#### **(4) Solução.**

**(i) Assumindo solução produto.** Tem-se então que:

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y) \tag{93}$$

Substituindo a Eq. (93) na Eq. (91), separando variáveis e igualando a uma constante obtém-se:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{2\beta}{X} \frac{dX}{dx} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \pm \lambda_n^2 \tag{94}$$

Assim, considerando que  $\lambda_n$  pode assumir diversos valores, a Eq. (94) pode ser reescrita em termos de duas equações diferenciais ordinárias, ou seja:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} - 2\beta \frac{dX_n}{dx} \pm \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (95)$$

e

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} \pm \lambda_n^2 Y_n = 0 \quad (96)$$

(ii) **Escolhendo o sinal dos termos  $\lambda_n^2$ .** Como a variável  $y$  tem duas condições de contorno homogêneas, o termo  $\lambda_n^2 Y_n$  na Eq. (96) deve ser sinal positivo. Assim:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} - 2\beta \frac{dX_n}{dx} - \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (97)$$

e

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \lambda_n^2 Y_n = 0 \quad (98)$$

(iii) **Soluções das equações diferenciais ordinárias.** As Eqs. (97-98) podem ser resolvidas pela técnica da equação característica conforme mostrado no Apêndice. Os resultados são:

$$X_n(x) = A_n \exp(\beta x + \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2} x) + B_n \exp(\beta x - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2} x) \quad (99)$$

$$Y_n(y) = C_n \sin(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y) \quad (100)$$

Correspondente a cada valor de  $\lambda_n$  existe uma solução para a distribuição de temperaturas  $\theta_n(x, y)$ . Assim:

$$\theta_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) \quad (101)$$

A solução completa tem a seguinte forma:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \quad (102)$$

**(iv) Aplicação das condições de contorno.** Nesse problema a aplicação das condições de contorno exige uma preparação prévia das Eqs. (99-100) pela necessidade das derivadas dessas expressões, conforme as condições de contorno 1 e 2. Da condição de contorno 1 são necessárias as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_n}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [X_n(x) Y_n(y)] = X_n(x) \frac{\partial}{\partial y} [Y_n(y)] = X_n(x) \frac{\partial}{\partial y} [C_n \sin(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y)] = \\ &X_n(x) \lambda_n [C_n \cos(\lambda_n y) - D_n \sin(\lambda_n y)] \\ \frac{\partial \theta_n(x, 0)}{\partial y} &= \underbrace{X_n(x)}_{\neq 0} \underbrace{\lambda_n}_{\neq 0} [\underbrace{C_n \cos(\lambda_n 0)}_{=1} - \underbrace{D_n \sin(\lambda_n 0)}_{=0}] = 0 \Rightarrow C_n = 0 \end{aligned} \quad (103)$$

Da condição de contorno 2 e utilizando o resultado da Eq. (103) são necessárias as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_n}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [X_n(x) Y_n(y)] = X_n(x) \frac{\partial}{\partial y} [Y_n(y)] = X_n(x) \frac{\partial}{\partial y} [C_n \sin(\lambda_n y) + D_n \cos(\lambda_n y)] = \\ &X_n(x) \lambda_n [C_n \cos(\lambda_n y) - D_n \sin(\lambda_n y)] \\ \frac{\partial \theta_n(x, L)}{\partial y} &= -X_n(x) D_n \lambda_n \sin(\lambda_n L) \end{aligned} \quad (104)$$

$$\theta_n(x, L) = X_n(x) Y_n(L) = X_n(x) D_n \cos(\lambda_n L) \quad (105)$$

Utilizando os resultados das Eqs. (104-105) e aplicando a condição de contorno 2 obtém-se:

$$k X_n(x) D_n \lambda_n \sin(\lambda_n L) = h X_n(x) D_n \cos(\lambda_n L) \quad (106)$$

Simplificando e rearranjando a Eq. (106) obtém-se:

$$\lambda_n L \tan(\lambda_n L) = Bi \quad (107)$$

onde  $Bi = hL/k$  é o número de Biot. A Eq. (106) é a equação característica cuja solução fornece os valores de  $\lambda_n$ . Os valores de  $\lambda_n$  podem ser obtidos numericamente pela solução da Eq. (107) para um número de Biot especificado. Na forma gráfica, a solução da Eq. (107) pode ser representada pela Fig. (5). Aplicando a condição de contorno 3 obtém-se:

$$\theta(\infty, y) = X_n(\infty)Y_n(y) = 0 \Rightarrow$$

$$[A_n \underbrace{\exp(\beta\infty + \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2}\infty)}_{=\infty} + B_n \underbrace{\exp(\beta\infty - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2}\infty)}_{=0}] \underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow A_n = 0 \quad (108)$$

Com os resultados das Eqs. (103), (107-108) pode-se reescrever as Eqs. (99-100) na seguinte forma:

$$X_n(x) = B_n \exp(\beta x - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2} x) \quad (109)$$

$$Y_n(y) = D_n \cos(\lambda_n y) \quad (110)$$

Assim, a Eq. (101) é reescrita como:

$$\theta_n(x, y) = B_n D_n \exp(\beta x - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2} x) \cos(\lambda_n y) \quad (111)$$

Substituindo a Eq. (111) na Eq. (102) obtém-se:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\beta x - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2} x) \cos(\lambda_n y) \quad (112)$$

onde  $a_n = B_n D_n$ . A última incógnita restante é a combinação de constantes  $a_n$ . Para a determinação de  $a_n$  aplica-se a condição de contorno 4 na Eq. (112), ou seja:

$$\theta(0, y) = T_o - T_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\beta_0 - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2} 0) \cos(\lambda_n y) \Rightarrow T_o - T_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n y) \quad (113)$$

A Eq. (113) não pode ser resolvida diretamente para a obtenção de  $a_n$  por causa da variável  $y$  e pelo sinal de somatório. Para prosseguir deve-se utilizar o conceito de ortogonalidade conforme a Eq. (17).

**(v) Ortogonalidade.** A Eq. (17) é utilizada para determinar  $a_n$ . Nota-se que a função  $\cos(\lambda_n y)$  na Eq. (113) é a solução da Eq. (98). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (113) somente se a Eq. (98) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $y = 0$  e  $y = L$  foram homogêneas da forma descrita pelas Eqs. (18-20). Comparando a Eq. (98) com a Eq. (12) obtém-se

$$a_1(y) = a_2(y) = 0 \quad \text{e} \quad a_3(y) = 1 \quad (114)$$

Utilizando os resultados da Eq. (114), obtém-se das Eqs. (14-16) que  $p(y) = e^{\int a_1 dy} = e^{\int 0 dy} = 1$ ,  $q(y) = 0.1 = 0$  e  $w(y) = 1.1 = 1$ . Como as duas condições de contorno de  $Y_n(y) = \cos(\lambda_n y)$  são homogêneas da forma descrita pelas Eqs. (18-20), conclui-se que as funções características  $\phi_n(y) = \cos(\lambda_n y)$  e  $\phi_m(y) = \cos(\lambda_m y)$  são ortogonais com relação a função peso  $w(y) = 1$ . Agora estamos prontos para aplicar a ortogonalidade na Eq. (113) para determinar  $a_n$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (113) por  $w(y) \cos(\lambda_m y) dy$  e integrando de  $y = 0$  a  $y = L$  obtém-se:

$$\int_0^L (T_o - T_\infty) w(y) \cos(\lambda_m y) dy = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n w(y) \cos(\lambda_m y) \cos(\lambda_n y) dy \quad (115)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que  $w(y) = 1$  pode-se reescrever a Eq. (115) como:

$$(T_o - T_\infty) \int_0^L \cos(\lambda_m y) dy = a_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \cos(\lambda_m y) \cos(\lambda_n y) dy \quad (116)$$

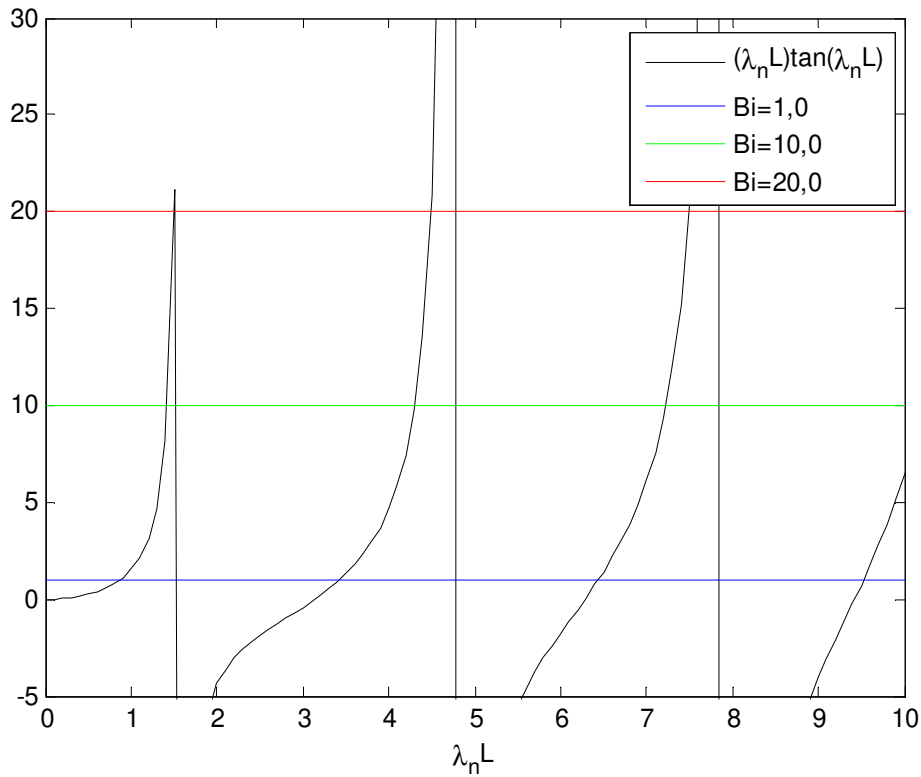


Figura 5 - Representação gráfica da Eq. (107).

De acordo com o princípio da ortogonalidade, Eq. (17), a integral do lado direito da Eq. (116) é nula quando  $m \neq n$ . Assim, todas as integrais que surgem devido ao sinal de somatório são nulas no caso quando  $m = n$ . A Eq. (116) pode então ser reescrita como:

$$(T_o - T_\infty) \int_0^L \cos(\lambda_n y) dy = a_n \int_0^L \cos^2(\lambda_n y) dy \quad (117)$$

A integral do lado esquerdo da Eq. (117) pode ser calculada fazendo a mudança de variáveis  $\lambda_n y = a$  de tal forma que  $\lambda_n dy = da$  e a integral do lado direito da Eq. (117) pode ser calculada de maneira similar ao EXEMPLO2, cujo resultado está indicado pela Eq. (89). Substituindo os resultados em ambos os lados da Eq. (117) obtém-se:

$$(T_o - T_\infty) \frac{\sin(\lambda_n L)}{\lambda_n} = a_n \left[ \frac{L}{2} + \frac{\sin(2\lambda_n L)}{4\lambda_n} \right] \quad (118)$$

A Eq. (118) pode ser reescrita utilizando a definição trigonométrica  $\sin(2\lambda_n L) = 2\sin(\lambda_n L)\cos(\lambda_n L)$  de tal forma que  $a_n$  é então escrita como:

$$a_n = \frac{2(T_o - T_\infty)\sin(\lambda_n L)}{\lambda_n L + \sin(\lambda_n L)\cos(\lambda_n L)} \quad (119)$$

A forma final da distribuição de temperaturas é escrita substituindo a Eq. (119) na Eq. (112), ou seja:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2(T_o - T_\infty)\sin(\lambda_n L)}{\lambda_n L + \sin(\lambda_n L)\cos(\lambda_n L)} \right] \exp(\beta x - \sqrt{\beta^2 + \lambda_n^2} x) \cos(\lambda_n y) \quad (120)$$

**(5) Checando.** Análise dimensional. (i) da Eq. (112),  $\beta$  deve ter a mesma unidade de  $\lambda_n$ , que de acordo com a Eq. (98) tem a unidade (1/m). Da definição de  $\beta$  da Eq. (92) tem-se que:

$$\beta = \frac{\rho(\text{kg/m}^3)c_p(\text{J/kg.K})U(\text{m/s})}{k(\text{W/m.K})} = (1/\text{m})$$

Se  $T_\infty = T_o$ , não ocorre transferência de calor na placa e consequentemente a temperatura permanece uniforme. Substituindo  $T_\infty = T_o$  na Eq. (119) obtém-se  $a_n = 0$ . Substituindo esse resultado na Eq. (120) obtém-se que  $T(x, y) = T_\infty = T_o$ , conforme esperado.

**(6) Comentários:** (i) para uma placa estacionária ( $U = \beta = 0$ ), a solução desse caso especial deve ser idêntica à do EXEMPLO 2 com  $f(y) = T_o$ . Entretanto, antes de comparar as duas soluções, deve ser feita uma transformação de coordenadas visto que a origem da coordenada  $y$  não é a mesma para ambos os problemas. Além disso, as definições de ambos  $L$  e  $Bi$  diferem por um fator igual a 2 e (ii) uma rotina de cálculos para esse exemplo pode ser vista no arquivo MAPLE3.mw do MAPLE.

#### EXEMPLO 4 – CONDUÇÃO AXIAL E RADIAL EM UM CILINDRO

Dois cilindros sólidos idênticos de raio  $r_o$  e comprimento  $L$  são pressionados coaxialmente com uma força  $F$  e rotacionados em direções opostas. A velocidade angular é  $\omega$  e o coeficiente de atrito na interface é  $\mu$ . As superfícies cilíndricas trocam calor por convecção com um meio a  $T_\infty$  e coeficiente de convecção  $h$ . Determine a temperatura da interface.

**(1) Observações.** (i) a distribuição de temperaturas é simétrica com relação ao plano da interface, (ii) a energia térmica gerada na interface depende da velocidade tangencial e da força tangencial. Como a velocidade tangencial varia com o raio, segue que o fluxo de calor na interface é não-uniforme. Assim, segue que a condição de contorno na interface é representada por um fluxo de calor que é função do raio e (iii) As condições de contorno convectivas tornam-se homogêneas definindo a variável  $\theta(r, z) = T(r, z) - T_\infty$ .

**(2) Origem e coordenadas.** Devido a simetria axial, a origem é posicionada na interface conforme a figura acima. Assim, somente um cilindro é analisado.

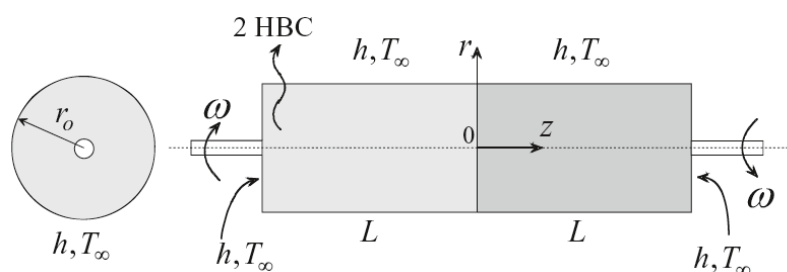


Figura 6 – Esquema do EXEMPLO 4.

#### (3) Formulação.

**(i) Considerações.** (1) condução bidimensional, (2) regime permanente, (3) condutividade térmica constante, (4) pressão na interface uniforme, (5) temperatura ambiente uniforme, (6) coeficiente de transferência de calor uniforme, (7) sem geração de energia e (8) o raio do eixo de apoio de cada cilindro é pequeno quando comparado com o raio do cilindro.

**(ii) Equação governante.** Definindo  $\theta(r, z) = T(r, z) - T_\infty$  pode-se reescrever a Eq. (65) do Cap. (1) como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{H.}) \quad (121)$$

**(iii) Variável homogênea com duas condições de contorno homogêneas.** Somente a variável  $r$  pode ter duas condições de contorno homogêneas. Na figura acima isso está indicado pela seta ondulada 2HBC.

**(iv) Condições de contorno.**

$$(1) \quad \frac{\partial \theta(0, z)}{\partial r} = 0 \quad (\text{H.})$$

$$(2) \quad -k \frac{\partial \theta(r_o, z)}{\partial r} = h \theta(r_o, z) \quad (\text{H.})$$

$$(3) \quad -k \frac{\partial \theta(r, L)}{\partial z} = h \theta(r, L) \quad (\text{H.})$$

$$(4) \quad -k \frac{\partial \theta(r, 0)}{\partial z} = \mu \frac{F}{\pi r_o^2} \omega r = f(r) \quad (\text{N.H.})$$

Cabe aqui uma melhor interpretação da quarta condição de contorno. Fisicamente, o efeito do atrito entre os dois cilindros girando em direções opostas é a geração de energia térmica ao longo do tempo devido ao efeito do atrito entre as superfícies. Espera-se então que a taxa de energia térmica gerada na interface seja diretamente proporcional à velocidade tangencial  $V_{\text{tangencial}}$  e à força coaxial  $F$ , ou seja:

$$q_{\text{interface}} \propto F V_{\text{tangencial}} \quad (122)$$

Entretanto, a velocidade tangencial varia com o raio do cilindro na forma  $V_{\text{tangencial}} = \omega r$  de tal forma que a taxa de geração de energia na interface é não-uniforme, ou seja:

$$q_{\text{interface}} \propto F \omega r \quad (123)$$

Fisicamente, a taxa de calor na interface será conduzida ao longo do cilindro a partir de  $z = 0$ . Usualmente, a condição de contorno de segunda espécie é escrita em termos de um fluxo de calor de tal forma que a Eq. (123) pode ser dividida por  $\pi r_o^2$  para ser convertida em um fluxo de calor. Finalmente, a proporcionalidade da Eq. (123) pode ser convertida em uma igualdade introduzindo um coeficiente que leva em consideração o tipo de superfície, que no caso é o coeficiente de atrito  $\mu$ . Assim, pode-se reescrever a Eq. (123) na seguinte forma:

$$q_{\text{interface}} = \mu \frac{F \omega r}{\pi r_o^2} = f(r) \quad (124)$$

#### (4) Solução.

(i) **Assumindo solução produto.** Fazendo

$$\theta(r, z) = R(r)Z(z) \quad (125)$$

e substituindo a Eq. (125) na Eq. (121), separando variáveis e igualando o resultado a uma constante  $\pm \lambda_k^2$  obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_k}{dr} \right) \pm \lambda_k^2 R_k = 0 \quad (126)$$

e

$$\frac{d^2 Z_k}{dz^2} \pm \lambda_k^2 Z_k = 0 \quad (127)$$

(ii) **Selecionando o sinal dos termos  $\lambda_k^2$ .** Como a variável  $r$  tem duas condições de contorno homogêneas,  $+$   $\lambda_k^2$  é selecionado para a Eq. (126). Assim, as Eqs. (126-127) são reescritas como:

$$r^2 \frac{d^2 R_k}{dr^2} + r \frac{dR_k}{dr} + \lambda_k^2 r^2 R_k = 0 \quad (128)$$

e

$$\frac{d^2 Z_k}{dz^2} - \lambda_k^2 Z_k = 0 \quad (129)$$

**(iii) Soluções das equações diferenciais ordinárias.** Eq. (128) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis. Comparando a Eq. (128) com a equação geral de Bessel do Apêndice, obtém-se:

$$A = B = 0, \quad C = 1, \quad D = \lambda_k, \quad n = 0$$

Como  $n = 0$  e  $D$  é real, a solução da Eq. (128) é escrita como:

$$R_k(r) = A_k J_0(\lambda_k r) + B_k Y_0(\lambda_k r) \quad (130)$$

A solução da Eq. (129) é escrita como:

$$Z_k(z) = C_k \sinh(\lambda_k z) + D_k \cosh(\lambda_k z) \quad (131)$$

A solução completa é então:

$$\theta(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) Z_k(z) \quad (132)$$

**(iv) Aplicação das condições de contorno.** Para a condição de contorno 1 é necessária a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [R_k(r) Z_k(z)] &= Z_k(z) \frac{\partial}{\partial r} [R_k(r)] = Z_k(z) \frac{\partial}{\partial r} [A_k J_0(\lambda_k r) + B_k Y_0(\lambda_k r)] = \\ &= Z_k(z) \lambda_k [-A_k J_1(\lambda_k r) - B_k Y_1(\lambda_k r)] \end{aligned}$$

Utilizando a condição de contorno 1 obtém-se:

$$\frac{\partial \theta_k(0, z)}{\partial r} = \underbrace{Z_k(z)}_{\neq 0} \underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} \left[ -A_k \underbrace{J_1(\lambda_k 0)}_{=0} - B_k \underbrace{Y_1(\lambda_k 0)}_{=-\infty} \right] = 0 \Rightarrow B_k = 0 \quad (133)$$

Para a condição de contorno 2 são necessárias as seguintes expressões:

$$\frac{\partial \theta_k(r_o, z)}{\partial r} = Z_k(z) \lambda_k \left[ -A_k J_1(\lambda_k r) - \underbrace{B_k Y_1(\lambda_k r)}_{=0} \right] = -Z_k(z) A_k \lambda_k J_1(\lambda_k r_o) \quad (134)$$

$$\theta_k(r_o, z) = R_k(r_o) Z_k(z) = [A_k J_0(\lambda_k r_o) + \underbrace{B_k Y_0(\lambda_k r_o)}_{=0}] Z_k(z) = Z_k(z) A_k J_0(\lambda_k r_o) \quad (135)$$

Utilizando as Eqs. (134-135) e aplicando a condição de contorno 2 obtém-se:

$$-k[-Z_k(z) A_k \lambda_k J_1(\lambda_k r_o)] = h Z_k(z) A_k J_0(\lambda_k r_o) \quad (136)$$

Simplificando e rearranjando a Eq. (136) obtém-se:

$$(\lambda_k r_o) \frac{J_1(\lambda_k r_o)}{J_0(\lambda_k r_o)} = Bi_{r_o} \quad (137)$$

onde  $Bi_{r_o} = hr_o/k$  é o número de Biot baseado no raio do cilindro. A Eq. (137) é a equação característica cuja solução fornece os valores de  $\lambda_k$ . Os valores de  $\lambda_k$  podem ser obtidos numericamente pela solução da Eq. (137) para um número de Biot especificado. Na forma gráfica, a Eq. (137) pode ser representada pela Fig. (6). Da condição de contorno 3 são necessárias as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} [R_k(r) Z_k(z)] = R_k(r) \frac{\partial}{\partial z} [Z_k(z)] = R_k(r) \frac{\partial}{\partial z} [C_k \sinh(\lambda_k z) + D_k \cosh(\lambda_k z)] = \\ &R_k(r) \lambda_k [C_k \cosh(\lambda_k z) + D_k \sinh(\lambda_k z)] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta_k(r, L)}{\partial z} = R_k(r) \lambda_k [C_k \cosh(\lambda_k L) + D_k \sinh(\lambda_k L)] \quad (138)$$

$$\theta_k(r, L) = R_k(r) Z_k(L) = R_k(r) [C_k \sinh(\lambda_k L) + D_k \cosh(\lambda_k L)] \quad (139)$$

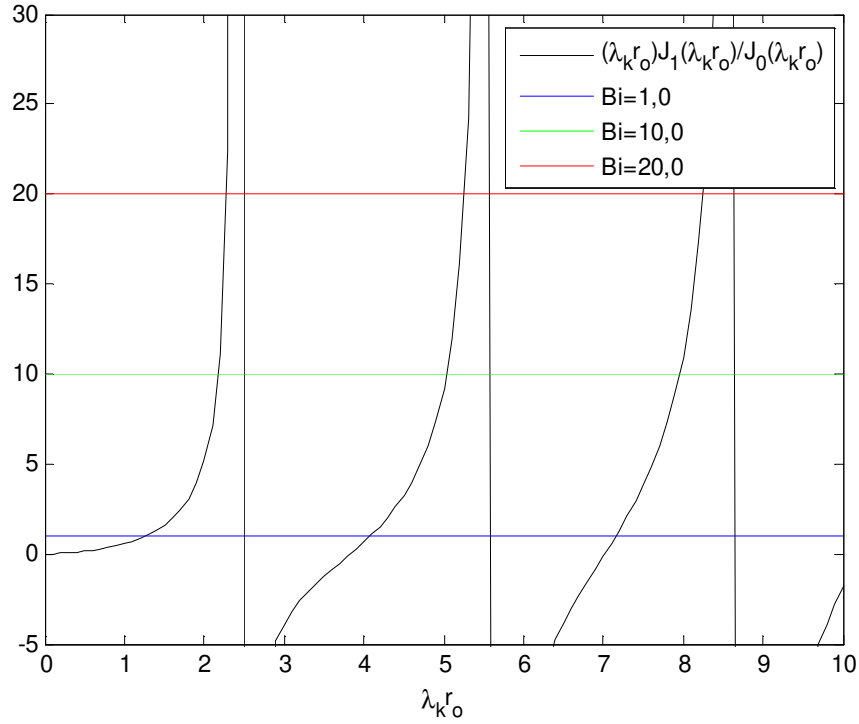


Figura 7 - Representação gráfica da Eq. (137).

Utilizando os resultados das Eqs. (138-139) e aplicando a condição de contorno 3 obtém-se:

$$-k R_k(r) \lambda_k [C_k \cosh(\lambda_k L) + D_k \sinh(\lambda_k L)] = h R_k(r) [C_k \sinh(\lambda_k L) + D_k \cosh(\lambda_k L)] \quad (140)$$

Simplificando e rearranjando a Eq. (140) obtém-se:

$$D_k = -C_k \frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L / \lambda_k L) \sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L / \lambda_k L) \cosh(\lambda_k L)} \quad (141)$$

onde  $Bi_L = hL/k$  é o número de Biot baseado no comprimento do cilindro. Com os resultados das Eqs. (133, 137 e 141) pode-se reescrever as Eqs. (130-131) na seguinte forma:

$$R_k(r) = A_k J_0(\lambda_k r) \quad (142)$$

$$Z_k(z) = C_k \left[ \sinh(\lambda_k z) - \frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \cosh(\lambda_k L)} \cosh(\lambda_k z) \right] \quad (143)$$

Pode-se então escrever a Eq. (132) como:

$$\theta(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_0(\lambda_k r) \left[ \sinh(\lambda_k z) - \frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \cosh(\lambda_k L)} \cosh(\lambda_k z) \right] \quad (144)$$

onde  $a_k = A_k C_k$ . A última incógnita restante é a combinação de constantes  $a_k$ . Para a determinação de  $a_k$  aplica-se a condição de contorno 4 na Eq. (144). Da condição de contorno 4 é necessária a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_0(\lambda_k r) \left[ \sinh(\lambda_k z) - \frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \cosh(\lambda_k L)} \cosh(\lambda_k z) \right] \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k J_0(\lambda_k r) \left[ \cosh(\lambda_k z) - \frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \cosh(\lambda_k L)} \sinh(\lambda_k z) \right] \\ \frac{\partial \theta(r, 0)}{\partial z} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k J_0(\lambda_k r) \left[ \cosh(\lambda_k 0) - \frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \cosh(\lambda_k L)} \sinh(\lambda_k 0) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k J_0(\lambda_k r) \quad (145) \end{aligned}$$

Assim, aplicando a condição de contorno 4 juntamente com o resultado da Eq. (145) obtém-se:

$$-k \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k J_0(\lambda_k r) = f(r) \quad (146)$$

A Eq. (146) não pode ser resolvida diretamente para a obtenção de  $a_k$  por causa da variável  $r$  e pelo sinal de somatório. Para prosseguir deve-se utilizar o conceito de ortogonalidade conforme a Eq. (17).

**(v) Ortogonalidade.** A Eq. (17) é utilizada para determinar  $a_k$ . Nota-se que a função  $J_0(\lambda_k r)$  na Eq. (146) é a solução da Eq. (128). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (146) somente se a Eq. (128) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $r=0$  e  $r=r_o$  foram homogêneas da forma descrita pelas Eqs. (18-20). Comparando a Eq. (128) com a Eq. (12) obtém-se

$$a_1(r)=1/r, \quad a_2(r)=0 \quad \text{e} \quad a_3(r)=1 \quad (147)$$

Utilizando os resultados da Eq. (147), obtém-se das Eqs. (14-16) que  $p(r)=e^{\int a_1 dr}=e^{\int \frac{dr}{r}}=r$ ,  $q(r)=0$ ,  $r=0$  e  $w(r)=1$ ,  $r=r_o$ . Como as duas condições de contorno de  $R_k(r)=J_0(\lambda_k r)$  são homogêneas da forma descrita pelas Eqs. (18-20), conclui-se que as funções características  $\phi_k(r)=J_0(\lambda_k r)$  e  $\phi_i(r)=J_0(\lambda_i r)$  são ortogonais com relação a função peso  $w(r)=r$ . Agora estamos prontos para aplicar a ortogonalidade na Eq. (146) para determinar  $a_k$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (146) por  $w(r)J_0(\lambda_i r)dr$  e integrando de  $r=0$  a  $r=r_o$  obtém-se:

$$\int_0^{r_o} f(r)w(r)J_0(\lambda_i r)dr = \int_0^{r_o} \left[ -k \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k w(r)J_0(\lambda_k r)J_0(\lambda_i r) \right] dr \quad (148)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que  $w(r)=r$  pode-se reescrever a Eq. (148) como:

$$\int_0^{r_o} f(r)rJ_0(\lambda_i r)dr = -ka_k \lambda_k \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{r_o} rJ_0(\lambda_k r)J_0(\lambda_i r)dr \quad (149)$$

De acordo com o princípio da ortogonalidade, Eq. (17), a integral do lado direito da Eq. (149) é nula quando  $k \neq i$ . Assim, todas as integrais que surgem devido ao sinal

de somatório são nulas exceto no caso quando  $k = i$ . A Eq. (149) pode então ser reescrita como:

$$\int_0^{r_o} f(r) r J_0(\lambda_k r) dr = -k a_k \lambda_k \int_0^{r_o} r J_0^2(\lambda_k r) dr \quad (150)$$

A integral do lado direito da Eq. (150) pode ser calculada utilizando a Tab. (3) do Apêndice. Assim, a constante  $a_k$  é escrita como:

$$a_k = -\frac{2\lambda_k \int_0^{r_o} f(r) r J_0(\lambda_k r) dr}{k[(hr_o/k)^2 + (\lambda_k r_o)^2] J_0^2(\lambda_k r_o)} \quad (151)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (151) na Eq. (144) obtém-se:

$$T(r, z) = T_\infty - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k \int_0^{r_o} f(r) r J_0(\lambda_k r) dr}{k[(hr_o/k)^2 + (\lambda_k r_o)^2] J_0^2(\lambda_k r_o)} J_0(\lambda_k r) \left[ \frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \cosh(\lambda_k L)} \cosh(\lambda_k z) - \sinh(\lambda_k z) \right] \quad (152)$$

A temperatura na interface é determinada substituindo  $z = 0$  na Eq. (152), ou seja:

$$T(r, 0) = T_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k \int_0^{r_o} f(r) r J_0(\lambda_k r) dr}{k[(hr_o/k)^2 + (\lambda_k r_o)^2] J_0^2(\lambda_k r_o)} \left[ \frac{\cosh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \sinh(\lambda_k L)}{\sinh(\lambda_k L) + (Bi_L/\lambda_k L) \cosh(\lambda_k L)} \right] J_0(\lambda_k r) \quad (153)$$

**(5) Checando.** Análise dimensional. As unidades de  $a_k$  na Eq. (151) devem estar em °C. Da definição de  $f(r)$  na condição de contorno (4) concluímos que  $f(r)$  tem unidades W/m<sup>2</sup>. Uma checagem dimensional da Eq. (151) confirma que  $a_k$  tem unidades de °C. Se o coeficiente de atrito for igual a zero, não será gerada energia térmica na interface e o cilindro estará à temperatura ambiente  $T_\infty$ . Fazendo  $\mu = 0$  na condição de contorno (4) obtemos  $f(r) = 0$ . Substituindo  $f(r) = 0$  na Eq. (151) obtém-se  $a_k = 0$ . Assim, da Eq.

(153) obtém-se que  $\theta(r, z) = 0$  o que implica que  $T(r, z) = T_\infty$ . A mesma análise pode ser feita considerando  $\omega = 0$ .

**(6) Comentários:** (i) é importante determinar a função peso pela comparação da equação diferencial da direção homogênea com o problema de Sturm-Liouville e não assumir diretamente que ela é igual a unidade e (ii) é utilizado o subscrito  $k$  nas funções características e no símbolo de somatório para evitar confusão com o índice  $n$  que representa a ordem da função de Bessel, que surgem usualmente na análise de problemas envolvendo geometrias cilíndricas.

#### EXEMPLO 5 – CILINDRO COM GERAÇÃO DE ENERGIA

Em um cilindro sólido estacionário de raio  $r_o$  e comprimento  $L$  existe geração de energia volumétrica uniforme a uma taxa  $\dot{q}$ . Uma das superfícies planas está mantida a  $T_o$  enquanto a outra superfície está isolada. A superfície cilíndrica está mantida a uma temperatura  $T_a$ . Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente.

**(1) Observações.** (i) o termo de geração de energia torna a equação diferencial parcial governante do problema não-homogênea, (ii) O método da separação de variáveis não pode ser aplicado diretamente para resolver equações diferenciais parciais não-homogêneas. Entretanto, uma simples modificação no procedimento de solução torna possível estender o método da separação de variáveis para equações diferenciais parciais não-homogêneas. Esse é o objetivo desse exemplo, (iii) definindo a variável  $\theta(r, z) = T(r, z) - T_a$  a condição de contorno na superfície do cilindro torna-se homogênea e (iv) deve ser utilizado um sistema de coordenadas cilíndricas.

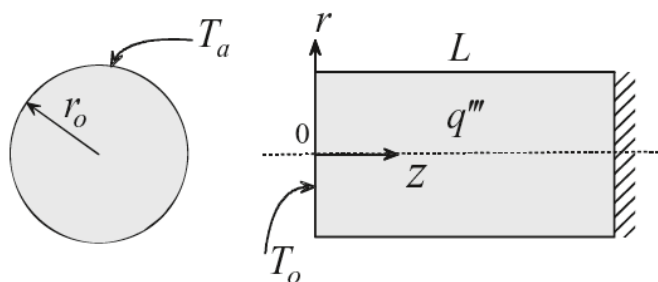


Figura 8 – Esquema do EXEMPLO 5.

**(2) Origem e coordenadas.** Na figura acima estão mostrados a origem e os eixos coordenados.

**(3) Formulação.**

**(i) Considerações.** (1) condução bidimensional, (2) regime permanente, (3) geração volumétrica de energia uniforme e (4) condutividade térmica constante.

**(ii) Equação governante.** Definindo  $\theta(r, z) = T(r, z) - T_a$  pode-se reescrever a Eq. (65) do Cap. (1) como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (\text{N.H.}) \quad (154)$$

**(iii) Variável independente com duas condições de contorno homogêneas.** A variável  $r$  tem duas condições de contorno homogêneas. Entretanto, isso deve ser reexaminado dependendo do método utilizado para lidar com a natureza não-homogênea da Eq. (154).

**(iv) Condições de contorno.**

$$(1) \frac{\partial \theta(0, z)}{\partial r} = 0 \quad (\text{H.})$$

$$(2) \theta(r_o, z) = 0 \quad (\text{H.})$$

$$(3) \frac{\partial \theta(r, L)}{\partial z} = 0 \quad (\text{H.})$$

$$(4) \theta(r, 0) = T_o - T_a \quad (\text{N.H.})$$

**(4) Solução.** A Eq. (154) é não-homogênea devido ao termo de geração de energia. Assim, nós não podemos prosseguir diretamente com o método da separação de variáveis. Ao invés disso, podemos assumir uma solução na forma:

$$\theta(r, z) = \psi(r, z) + \phi(z)$$

Note que  $\psi(r, z)$  depende de duas variáveis enquanto  $\phi(z)$  depende de uma única variável. Substituindo  $\psi(r, z)$  na Eq. (154) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (155)$$

O próximo passo consiste em separar a Eq. (155) em duas equações diferenciais, uma para  $\psi(r, z)$  e outra para  $\phi(z)$ , ou seja:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{H.}) \quad (156)$$

e

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (\text{N.H.}) \quad (157)$$

Deve ser notado o seguinte a respeito desse procedimento: (i) a Eq. (156) é uma equação diferencial parcial homogênea, (ii) a Eq. (157) é uma equação diferencial ordinária não-homogênea e (iii) a idéia de separar a Eq. (155) é excluir o termo  $\dot{q}/k$  da equação diferencial parcial para que essa possa ser resolvida pelo método da separação de variáveis, conforme resultado da Eq. (156). As condições de contorno em  $\psi(r, z)$  e  $\phi(z)$  são obtidas substituindo  $\theta(r, z) = \psi(r, z) + \phi(z)$  nas quatro condições de contorno originais. Assim, da condição de contorno 1 obtém-se:

$$\frac{\partial \theta(0, z)}{\partial r} = \frac{\partial \psi(0, z)}{\partial r} + \underbrace{\frac{\partial \phi(z)}{\partial r}}_{=0} = 0 \quad (158)$$

$$\frac{\partial \psi(0, z)}{\partial r} = 0 \quad (\text{H.}) \quad (159)$$

Da condição de contorno 2 obtém-se:

$$\theta(r_o, z) = \psi(r_o, z) + \phi(z) = 0 \Rightarrow \psi(r_o, z) = -\phi(z) \text{ (N.H.)} \quad (160)$$

Da condição de contorno 3 obtém-se:

$$\frac{\partial \theta(r, L)}{\partial z} = \frac{\partial \psi(r, L)}{\partial z} + \frac{d\phi(L)}{dz} = 0 \quad (161)$$

$$\frac{d\phi(L)}{dz} = 0 \quad (162)$$

$$\frac{\partial \psi(r, L)}{\partial z} = 0 \text{ (H.)} \quad (163)$$

Da condição de contorno 4 obtém-se:

$$\theta(r, 0) = \psi(r, 0) + \phi(0) = T_o - T_a \quad (164)$$

$$\psi(r, 0) = 0 \text{ (H.)} \quad (165)$$

$$\phi(0) = T_o - T_a \quad (166)$$

Note que a separação das condições de contorno é guiada pela regra que, quando possível, as condições de contorno da equação diferencial parcial são escolhidas tal que elas sejam homogêneas. Assim, a equação diferencial parcial não-homogênea, Eq. (154) é substituída por duas equações: a Eq. (156) que é uma equação diferencial parcial homogênea com as condições de contorno dadas pelas Eqs. (159), (160), (163) e (165) e a Eq. (157) que é uma equação diferencial ordinária com as condições de contorno dadas pelas Eqs. (162) e (166). A solução da Eq. (157) pode ser obtida por dupla integração, fornecendo o seguinte resultado:

$$\phi(z) = -\frac{\dot{q}z^2}{2k} + Ez + F \quad (167)$$

onde  $E$  e  $F$  são constantes de integração. Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (162) obtém-se:

$$\frac{d\phi(L)}{dz} = -\frac{\dot{q}L}{k} + E = 0 \Rightarrow E = \frac{\dot{q}L}{k} \quad (168)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (166) obtém-se:

$$\phi(0) = -\frac{\dot{q}0^2}{2k} + E0 + F = T_o - T_a \Rightarrow F = T_o - T_a \quad (169)$$

Substituindo as Eqs. (168-169) na Eq. (167) e rearranjando obtém-se:

$$\phi(z) = \frac{\dot{q}L^2}{2k} \left[ 2\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right] + (T_o - T_a) \quad (170)$$

**(ii) Assumindo solução produto.** Para resolver a Eq. (156) vamos assumir solução produto na seguinte forma:

$$\psi(r, z) = R(r)Z(z) \quad (171)$$

Substituindo a Eq. (171) na Eq. (156), separando variáveis e igualando o resultado das duas equações a uma constante  $\pm \lambda_k^2$ , obtém-se:

$$\frac{d^2 Z_k}{dz^2} \pm \lambda_k^2 Z_k = 0 \quad (172)$$

e

$$r^2 \frac{d^2 R_k}{dr^2} + r \frac{dR_k}{dr} \pm \lambda_k^2 r^2 R_k = 0 \quad (173)$$

(ii) **Selecionando o sinal dos termos  $\lambda_k^2$ .** Como a variável  $z$  tem duas condições de contorno homogêneas, é escolhido o sinal positivo na Eq. (172). Assim, as Eqs. (172-173) são reescritas como:

$$\frac{d^2 Z_k}{dz^2} + \lambda_k^2 Z_k = 0 \quad (174)$$

e

$$r^2 \frac{d^2 R_k}{dr^2} + r \frac{dR_k}{dr} - \lambda_k^2 r^2 R_k = 0 \quad (175)$$

(iii) **Solução das equações diferenciais ordinárias.** A solução da Eq. (174) tem a seguinte forma:

$$Z_k(z) = A_k \sin(\lambda_k z) + B_k \cos(\lambda_k z) \quad (176)$$

A Eq. (175) é uma equação de Bessel com  $A = B = n = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = \lambda_k i$ . Assim:

$$R_k(r) = C_k I_0(\lambda_k r) + D_k K_0(\lambda_k r) \quad (177)$$

A solução completa é então escrita como:

$$\psi(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(r) Z_k(z) \quad (178)$$

(iv) **Aplicação das condições de contorno.** Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (159) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [R_k(r) Z_k(z)] &= Z_k(z) \frac{\partial}{\partial r} [R_k(r)] = Z_k(z) \frac{\partial}{\partial r} [C_k I_0(\lambda_k r) + D_k K_0(\lambda_k r)] = \\ &= Z_k(z) \lambda_k [C_k I_1(\lambda_k r) - D_k K_1(\lambda_k r)] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi_k(0, z)}{\partial r} = \underbrace{Z_k(z)}_{\neq 0} \underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} [\underbrace{C_k I_1(\lambda_k 0)}_{=0} - \underbrace{D_k K_1(\lambda_k 0)}_{=\infty}] = 0 \Rightarrow D_k = 0 \quad (179)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (165) obtém-se:

$$\psi_k(r, 0) = R_k(r) Z_k(0) = 0 \Rightarrow \underbrace{R_k(r)}_{\neq 0} [\underbrace{A_k \sin(\lambda_k 0)}_{=0} + \underbrace{B_k \cos(\lambda_k 0)}_{=1}] = 0 \Rightarrow B_k = 0 \quad (180)$$

A aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (163) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_k}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} [R_k(r) Z_k(z)] = R_k(r) \frac{\partial}{\partial z} [Z_k(z)] = R_k(r) \frac{\partial}{\partial z} [A_k \sin(\lambda_k z) + B_k \cos(\lambda_k z)] = \\ &R_k(r) \lambda_k [A_k \cos(\lambda_k z) - B_k \sin(\lambda_k z)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_k(r, L)}{\partial z} &= \underbrace{R_k(r)}_{\neq 0} \underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} [\underbrace{A_k}_{\neq 0} \cos(\lambda_k L) - \underbrace{B_k}_{=0} \sin(\lambda_k L)] = 0 \Rightarrow \cos(\lambda_k L) = 0 \Rightarrow \\ \lambda_k &= \frac{(2j-1)\pi}{2L}, j = 1, 2, 3, \dots \quad (181) \end{aligned}$$

Com os resultados das Eqs. (179, 180 e 181) pode-se reescrever as Eqs. (176-177) na seguinte forma:

$$Z_k(z) = A_k \sin(\lambda_k z) \quad (182)$$

$$R_k(r) = C_k I_0(\lambda_k r) \quad (183)$$

Pode-se então escrever a Eq. (178) como:

$$\psi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k I_0(\lambda_k r) \sin(\lambda_k z) \quad (184)$$

onde  $a_k = A_k C_k$ . A última incógnita restante é a combinação de constantes  $a_k$ . Para a determinação de  $a_k$  aplica-se a condição de contorno dada pela Eq. (160) na Eq. (184):

$$-\frac{\dot{q}L^2}{2k} \left[ 2\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right] - (T_o - T_a) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k I_0(\lambda_k r_o) \sin(\lambda_k z) \quad (185)$$

**(v) Ortogonalidade.** A Eq. (185) é utilizada para determinar  $a_k$ . Nota-se que a função  $\sin(\lambda_k z)$  na Eq. (185) é a solução da Eq. (174). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (185) somente se a Eq. (174) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $z=0$  e  $z=L$  foram homogêneas da forma descrita pelas Eqs. (18-20). Comparando a Eq. (174) com a Eq. (12) obtém-se:

$$a_1(z) = a_2(z) = 0 \quad \text{e} \quad a_3(z) = 1 \quad (186)$$

Utilizando os resultados da Eq. (186), obtém-se das Eqs. (14-16) que  $p(z) = e^{\int a_1 dz} = e^{\int 0 dz} = 1$ ,  $q(z) = 0.1 = 0$  e  $w(z) = 1.1 = 1$ . Como as duas condições de contorno de  $Z_k(z) = \sin(\lambda_k z)$  são homogêneas da forma descrita pelas Eqs. (18-20), conclui-se que as funções características  $\phi_k(z) = \sin(\lambda_k z)$  e  $\phi_l(z) = \sin(\lambda_l z)$  são ortogonais com relação a função peso  $w(z) = 1$ . Agora estamos prontos para aplicar a ortogonalidade na Eq. (185) para determinar  $a_k$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (185) por  $w(z)\sin(\lambda_l z)dz$  e integrando de  $z=0$  a  $z=L$  obtém-se:

$$\int_0^L w(z) \left\{ -\frac{\dot{q}L^2}{2k} \left[ 2\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right] - (T_o - T_a) \right\} \sin(\lambda_l z) dz = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} a_k w(z) I_0(\lambda_k r_o) \sin(\lambda_k z) \sin(\lambda_l z) dz \quad (187)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que  $w(z) = 1$  pode-se reescrever a Eq. (187) como:

$$\int_0^L \left\{ -\frac{\dot{q}L^2}{2k} \left[ 2\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right] - (T_o - T_a) \right\} \sin(\lambda_i z) dz =$$

$$a_k I_0(\lambda_k r_o) \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^L \sin(\lambda_k z) \sin(\lambda_i z) dz \quad (188)$$

De acordo com o princípio da ortogonalidade, Eq. (17), a integral do lado direito da Eq. (188) é nula quando  $k \neq i$ . Assim, todas as integrais devido ao sinal de somatório são nulas exceto no caso quando  $k = i$ . A Eq. (188) pode então ser reescrita como:

$$\int_0^L \left\{ -\frac{\dot{q}L^2}{2k} \left[ 2\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right] - (T_o - T_a) \right\} \sin(\lambda_k z) dz = a_k I_0(\lambda_k r_o) \int_0^L \sin^2(\lambda_k z) dz \quad (189)$$

Calculando as integrais e resolvendo para  $a_k$  obtém-se:

$$a_k = \frac{-2}{(\lambda_k L) I_0(\lambda_k r_o)} [(T_o - T_a) + \dot{q}/k\lambda_k^2] \quad (190)$$

Substituindo as Eqs. (170), (184) e (190) em  $\theta(r, z) = \psi(r, z) + \phi(r)$  obtém-se:

$$T(r, z) = T_a + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{-2}{(\lambda_k L) I_0(\lambda_k r_o)} [(T_o - T_a) + \dot{q}/k\lambda_k^2] \right\} I_0(\lambda_k r) \sin(\lambda_k z) +$$

$$\frac{\dot{q}L^2}{2k} \left[ 2\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \right] + (T_o - T_a) \quad (191)$$

**(5) Checando.** Cada termo na Eq. (191) tem unidade de temperatura. Se  $\dot{q} = 0$  e  $T_a = T_o$ , considerações físicas requerem que o cilindro esteja a uma temperatura uniforme. Sob essa consideração, a Eq. (190) fornece que  $a_k = 0$ . Substituindo esse resultado na Eq. (191) obtém-se que  $T(r, z) = T_a$ , conforme esperado.

**(6) Comentários:** (i) uma solução alternativa consiste em substituir a  $\theta(r, z) = \psi(r, z) + \phi(r)$  por  $\theta(r, z) = \psi(r, z) + \phi(z)$ . Essa expressão alternativa levaria a duas condições de contorno homogêneas na variável  $r$  ao invés da variável  $z$ .

## 5-CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL EM COORDENADAS ESFÉRICAS

O método de separação de variáveis também pode ser aplicado em problemas de condução em coordenadas esféricas. As características essenciais do método, mostradas nos exemplos anteriores, continuam as mesmas.

### EXEMPLO 6 – CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL EM UM HEMISFÉRIO

Uma gota condensando sobre uma superfície plana horizontal pode ser modelada como um hemisfério de raio  $R$ . A temperatura da base da gota,  $T_C$ , é assumida menor que a temperatura da superfície convexa. Pode-se também assumir que a temperatura da superfície convexa é igual a temperatura de saturação do líquido,  $T_S$ . Determine a distribuição de temperaturas na gota. Despreze efeitos de convecção e considere que a taxa de variação da massa da gota com o tempo é desprezível.

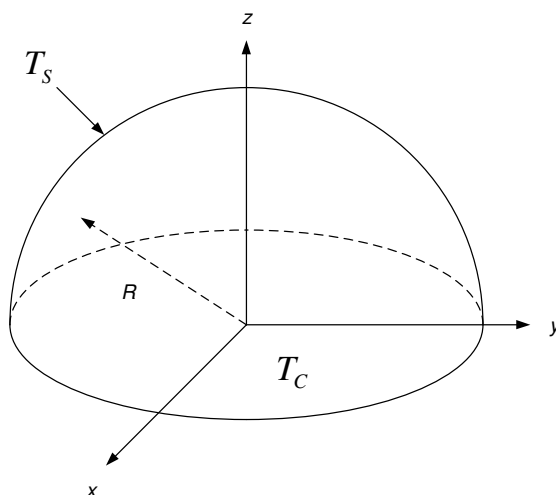


Figura 9 – Esquema do EXEMPLO 6.

#### (1) Formulação.

(i) **Considerações.** (1) condução bidimensional em  $r$  e  $\theta$ , (2) regime permanente, (3) sem geração de energia, (4) condutividade térmica constante e (5) gota estacionária.

#### (ii) Equações governantes.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{H.}) \quad (192)$$

$$(1) T(R, \theta) = T_s \text{ (N.H.)}$$

$$(2) \frac{\partial T(0, \theta)}{\partial r} = 0 \text{ (H.)}$$

$$(3) T(r, \pi/2) = T_c \text{ (N.H.)}$$

$$(4) \frac{\partial T(r, 0)}{\partial \theta} = 0 \text{ (H.)}$$

Definindo  $\Theta(r, \theta) = T(r, \theta) - T_c$  pode-se reescrever a Eq. (192) e suas condições de contorno na seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = 0 \text{ (H.)} \quad (193)$$

$$(1) \Theta(R, \theta) = T_s - T_c = \Theta_s \text{ (N.H.)}$$

$$(2) \frac{\partial \Theta(0, \theta)}{\partial r} = 0 \text{ (H.) ou } \Theta(0, \theta) = \text{finito}$$

$$(3) \Theta(r, \pi/2) = 0 \text{ (H.)}$$

$$(4) \frac{\partial \Theta(r, 0)}{\partial \theta} = 0 \text{ (H.) ou } \Theta(r, 0) = \text{finito}$$

#### (4) Solução produto.

$$\Theta(r, \theta) = G(r)H(\theta) \quad (194)$$

Substituindo a Eq. (194) na Eq. (193) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial [G(r)H(\theta)]}{\partial r} \right\} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial [G(r)H(\theta)]}{\partial \theta} \right\} = 0 \quad (\text{H.}) \quad (195)$$

ou,

$$H(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial G(r)}{\partial r} \right] + \frac{G(r)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (196)$$

Separando as variáveis na Eq. (196) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) = - \frac{1}{H \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) = \pm \lambda^2 \quad (197)$$

onde  $\lambda_i^2$  é a constante de separação. A Eq. (197) representa o conjunto de duas equações:

$$r^2 \frac{d^2 G}{dr^2} + 2r \frac{dG}{dr} - \lambda^2 G = 0 \quad (198)$$

e

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \lambda^2 (\sin \theta) H = 0 \quad (199)$$

onde  $\theta$  é a direção homogênea. A Eq. (198) é conhecida como equação de Euler e a Eq. (199) é conhecida como equação de Legendre.

**(5) Solução das equações diferenciais ordinárias.** A Eq. (198) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, conhecida por equação de Euler. A solução geral da equação de Euler é obtida fazendo a transformação  $v = \ln r$  de tal forma que as derivadas da Eq. (198) possam ser reescritas na seguinte forma:

$$\frac{dG}{dr} = \frac{dG}{dv} \frac{dv}{dr} = \frac{dG}{dv} \frac{d}{dr} (\ln r) = \frac{1}{r} \frac{dG}{dv} \quad (200)$$

$$\frac{d^2G}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left( \frac{dG}{dv} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dG}{dv} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dG}{dv} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dG}{dv} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dG}{dv} + \frac{1}{r} \frac{d(dG/dv)}{dr} \quad (201)$$

O segundo termo do lado direito da Eq. (201) pode ser avaliado de maneira similar à Eq. (200), ou seja:

$$\frac{d(dG/dv)}{dr} = \frac{d(dG/dv)}{dv} \frac{dv}{dr} = \frac{d^2G}{dv^2} \frac{d}{dr} (\ln r) = \frac{1}{r} \frac{d^2G}{dv^2} \quad (202)$$

Substituindo a Eq. (202) na Eq. (201) obtém-se:

$$\frac{d^2G}{dr^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{dG}{dv} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2G}{dv^2} \quad (203)$$

Substituindo as Eqs. (200) e (203) na Eq. (198) obtém-se:

$$r^2 \left( -\frac{1}{r^2} \frac{dG}{dv} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2G}{dv^2} \right) + 2r \left( \frac{1}{r} \frac{dG}{dv} \right) - \lambda^2 G = 0 \quad (204)$$

Rearranjando a Eq. (204) obtém-se:

$$\frac{d^2G}{dv^2} + \frac{dG}{dv} - \lambda^2 G = 0 \quad (205)$$

Com a transformação  $v = \ln r$ , a Eq. (198) foi convertida em uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução é obtida pela equação característica. A equação característica tem a forma  $n^2 + n - \lambda^2 = 0$ . cuja solução é obtida pela fórmula de Bhaskara, obtendo-se:

$$n_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} \quad \text{e} \quad n_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} \quad (206)$$

Por simplicidade define-se  $n_1 = n$  de tal forma  $n_2$  possa ser reescrito como:

$$n_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} = n_1 - 2\sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} \quad (207)$$

Substituindo  $\sqrt{1/4 + \lambda^2} = -1/2 - n_2$  da Eq. (206) na Eq. (207) e rearranjando obtém-se:

$$n_2 = n_1 - 2\left(-\frac{1}{2} - n_2\right) = n_1 + 1 + 2n_2 \Rightarrow -n_2 = n_1 + 1 \Rightarrow n_2 = -(n_1 + 1) = -(n + 1) \quad (208)$$

Além disso, o produto  $n(n + 1)$  fornece que:

$$n(n + 1) = n_2^2 + n_2 = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} + \frac{1}{4} + \lambda^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2} = \lambda^2 \quad (209)$$

Para raízes reais e distintas a solução geral da Eq. (205) tem a seguinte forma:

$$G(v) = Ae^{n_1 v} + Be^{n_2 v} = Ae^{nv} + Be^{-(n+1)v} = Ae^{nv} + \frac{B}{e^{(n+1)v}} \quad (210)$$

Voltando a Eq. (210) na variável original  $r$  e sabendo que  $e^{\ln r^n} = r^n$  obtém-se:

$$G(r) = Ae^{n \ln r} + \frac{B}{e^{(n+1) \ln r}} = Ae^{\ln r^n} + \frac{B}{e^{\ln r^{n+1}}} = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \quad (211)$$

Já a solução da equação de Legendre, Eq. (199) é obtida definindo inicialmente a seguinte variável de transformação:

$$\eta = \cos \theta \quad (212)$$

A derivada na Eq. (199) pode ser reescrita em termos de  $\eta$  utilizando a regra da cadeia, obtendo-se:

$$\frac{dH}{d\theta} = \frac{dH}{d\eta} \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{dH}{d\eta} \frac{d}{d\theta}(\cos \theta) = -\sin \theta \frac{dH}{d\eta} \quad (213)$$

Substituindo as Eqs. (209) e (213) na Eq. (199) obtém-se:

$$\frac{d}{d\eta} \left( -\sin^2 \theta \frac{dH}{d\eta} \right) + n(n+1)(\sin \theta)H = 0 \quad (214)$$

Expressando  $(d/d\theta)$  pela regra da cadeia e sabendo que  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  pode-se reescrever a Eq. (214) como:

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (\cos^2 \theta - 1) \frac{dH}{d\eta} \right] \frac{d\eta}{d\theta} + n(n+1)(\sin \theta)H = 0 \quad (215)$$

Substituindo a Eq. (212) e  $(d\eta/d\theta = -\sin \theta)$  na Eq. (215) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{dH}{d\eta} \right] \sin \theta + n(n+1)(\sin \theta)H = 0 \quad (216)$$

Simplificando  $(\sin \theta)$  na Eq. (216) e rearranjando obtém-se:

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 H}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dH}{d\eta} + n(n+1)H = 0 \quad (217)$$

A solução geral da Eq. (217), conforme o Apêndice, é escrita como:

$$H(\theta) = CP_n(\eta) + DQ_n(\eta) = CP_n(\cos \theta) + DQ_n(\cos \theta) \quad (218)$$

onde as funções  $P_n(\eta)$  são chamadas de polinômios de Legendre de primeira espécie e as funções  $Q_n(\eta)$  são chamadas de polinômios de Legendre de segunda espécie.

De acordo com a Eq. (194), cada produto  $GH$  é solução da Eq. (193). Assim:

$$\Theta(r, \theta) = G(r)H(\theta) \quad (219)$$

Como a Eq. (193) é linear, segue que a soma de todas as soluções também é uma solução. Assim, a solução completa pode ser escrita como:

$$\Theta(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \right) [CP_n(\cos\theta) + DQ_n(\cos\theta)] \quad (220)$$

**(6) Aplicação das condições de contorno.** Para completar a solução, as constantes  $A, B, C$  e  $D$  devem ser determinados. Aplicando a condição de contorno 2 obtém-se:

$$\Theta(0, \theta) = \underbrace{H(\theta)}_{\neq 0} \left( \underbrace{A0^n}_{=0} + \frac{B}{\underbrace{0^{n+1}}_{=\infty}} \right) = \text{finito} \Rightarrow B = 0 \quad (221)$$

Aplicando a condição de contorno 4 obtém-se:

$$\Theta(r, 0) = G(r)[CP_n(\cos 0) + DQ_n(\cos 0)] = \underbrace{G(r)}_{\neq 0} [\underbrace{CP_n(1)}_{=1} + \underbrace{DQ_n(1)}_{=\infty}] = \text{finito} \Rightarrow D = 0 \quad (222)$$

Até o momento a solução é escrita como:

$$\Theta(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Ar^n CP_n(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} ar^n P_n(\eta) \quad (223)$$

onde  $a = AC$ . Deve ser notado que não foi necessária a aplicação da condição de contorno 3 visto que a constante de separação e as raízes da equação características foram relacionadas entre si, eliminando a necessidade de uma equação para  $\lambda$ . Aplicando a condição de contorno 1 na Eq. (223) obtém-se:

$$\Theta(R, \theta) = \Theta_s = \sum_{n=1}^{\infty} aR^n P_n(\eta) \quad (224)$$

A Eq. (224) não pode ser resolvida diretamente para a obtenção de  $a$  por causa da variável  $\eta = \cos\theta$  e pelo sinal de somatório. Para prosseguir deve-se utilizar o conceito de ortogonalidade conforme a Eq. (17).

**(7) Ortogonalidade.** A Eq. (17) é utilizada para determinar  $a$ . Nota-se que a função  $P_n(\eta)$  na Eq. (224) é a solução da Eq. (217). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (224) somente se a Eq. (214) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $\theta=0$  e  $\theta=\pi/2$  foram homogêneas da forma descrita pelas Eqs. (18-20). Comparando a Eq. (217) com a Eq. (12) obtém-se:

$$a_1(\eta) = -\frac{2\eta}{1-\eta^2} \quad (225)$$

$$a_2(\eta) = 0 \quad (226)$$

$$a_3(\eta) = \frac{1}{1-\eta^2} \quad (227)$$

Utilizando os resultados da Eq. (225-227), obtém-se das Eqs. (14-16):

$$p(\eta) = e^{\int a_1 d\eta} = e^{\int \left( \frac{-2\eta}{1-\eta^2} \right) d\eta} = e^{[\ln(\eta-1) + \ln(\eta+1)]} = e^{\ln[(\eta-1)(\eta+1)]} = \eta^2 - 1 \quad (228)$$

$$q(\eta) = a_2(\eta) p(\eta) = 0 \times \frac{1}{\eta^2 - 1} = 0 \quad (229)$$

$$w(\eta) = a_3(\eta) p(\eta) = \frac{\eta^2 - 1}{1 - \eta^2} = -1 \quad (230)$$

Como as duas condições de contorno de  $H(\theta) = P_n(\eta)$  são homogêneas na forma descrita pelas Eqs. (18-20), conclui-se que as funções características  $\phi_n(\eta) = P_n(\eta)$  e  $\phi_m(\eta) = P_m(\eta)$  são ortogonais com relação a função peso  $w(\eta) = -1$ . Agora estamos

prontos para aplicar a ortogonalidade na Eq. (224) para determinar  $a$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (224) por  $w(\eta)P_m(\eta)d\eta$  e integrando de  $\eta=0$  ( $\theta=\pi/2$ ) a  $\eta=1$  ( $\theta=0$ ), obtém-se:

$$\int_0^1 \Theta_s w(\eta) P_m(\eta) d\eta = \int_0^1 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a R^n P_n(\eta) \right] w(\eta) P_m(\eta) d\eta \quad (231)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que  $w(\eta) = -1$  pode-se reescrever a Eq. (231) como:

$$\Theta_s \int_0^1 P_m(\eta) d\eta = a R^n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 P_n(\eta) P_m(\eta) d\eta \quad (232)$$

De acordo com o princípio da ortogonalidade, Eq. (17), a integral do lado direito da Eq. (232) é nula quando  $m \neq n$ . Assim, todas as integrais que surgem devido ao sinal de somatório são nulas, exceto no caso quando  $m = n$ . A Eq. (232) pode então ser reescrita utilizando somente o subscrito  $n$  e resolvida para  $a$ , obtendo-se:

$$a = \frac{\Theta_s \int_0^1 P_n(\eta) d\eta}{R^n \int_0^1 [P_n(\eta)]^2 d\eta} \quad (233)$$

As integrais da Eq. (233) podem ser avaliadas utilizando as Eqs. (80) e (84) do Apêndice, obtendo-se:

$$a = \frac{\Theta_s}{R^n} [P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)] \quad (234)$$

A forma final da distribuição de temperaturas é escrita substituindo a Eq. (234) na Eq. (223), obtendo-se:

$$\Theta(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_s}{R^n} [P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)] r^n P_n(\eta) \quad (235)$$

Substituindo as definições de  $\Theta(r, \theta)$ ,  $\Theta_s$  e  $\eta$  e rearranjando, pode-se reescrever a Eq. (223) na seguinte forma:

$$T(r, \theta) = T_C + (T_S - T_C) \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)] \left( \frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad (236)$$

## 6 – CONDUÇÃO TRIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Os princípios básicos de solução de problemas de condução bidimensionais em regime permanente utilizando o método da separação de variáveis continuam válidos para problemas de condução tridimensionais em regime permanente. O princípio da superposição pode estar envolvido na solução de tais problemas. Para ilustrar o procedimento de solução será apresentado um exemplo resolvido.

### EXEMPLO 7 – CONDUÇÃO TRIDIMENSIONAL EM UM CUBO

Um sólido estacionário no formato de um cubo com lados de comprimento  $L$  e condutividade térmica constante está fixado sobre uma superfície conforme mostrado na figura abaixo. A distribuição de temperaturas na base do sólido é conhecida (medida) e é denotada por  $f(x, y)$ . Um fluido refrigerante com temperatura  $T_{\infty}$  e coeficiente de transferência de calor  $h$  escoa sobre o cubo. Por simplicidade, pode-se assumir que  $h$  é bastante elevado. Obtenha distribuição de temperaturas  $T(x, y, z)$  em regime permanente sem geração de energia.

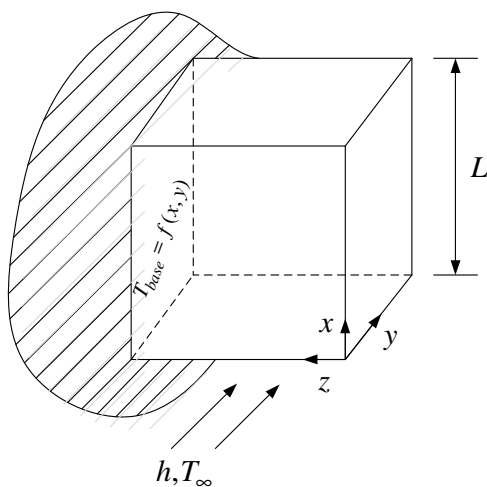


Figura 7 – Esquema do EXEMPLO 7.

A formulação do problema é escrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \text{ (H.)} \quad (237)$$

$$T(x, y, 0) = T_{\infty} \text{ (N.H.)} \quad (238)$$

$$T(x, y, L) = f(x, y) \text{ (N.H.)} \quad (239)$$

$$T(x, 0, z) = T_{\infty} \text{ (N.H.)} \quad (240)$$

$$T(x, L, z) = T_{\infty} \text{ (N.H.)} \quad (241)$$

$$T(0, y, z) = T_{\infty} \text{ (N.H.)} \quad (242)$$

$$T(L, y, z) = T_{\infty} \text{ (N.H.)} \quad (243)$$

A equação diferencial parcial é homogênea, mas as seis condições de contorno são não-homogêneas. Para que o método da separação de variáveis possa ser aplicado, pelo menos cinco das seis condições de contorno devem ser homogêneas. Para isso, define-se a variável  $\theta(x, y, z) = T(x, y, z) - T_{\infty}$  de tal forma que a equação diferencial governante e as condições de contorno sejam reescritas como:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \text{ (H.)} \quad (244)$$

$$\theta(x, y, 0) = 0 \text{ (H.)} \quad (245)$$

$$\theta(x, y, L) = f(x, y) - T_{\infty} = \phi(x, y) \text{ (N.H.)} \quad (246)$$

$$\theta(x, 0, z) = 0 \text{ (H.)} \quad (247)$$

$$\theta(x, L, z) = 0 \text{ (H.)} \quad (248)$$

$$\theta(0, y, z) = 0 \text{ (H.)} \quad (249)$$

$$\theta(L, y, z) = 0 \text{ (H.)} \quad (250)$$

Assim, além da equação diferencial parcial homogênea, cinco das seis condições de contorno são agora homogêneas, tornando o método da separação de variáveis aplicável. A solução esperada para a Eq. (244) tem a seguinte forma:

$$\theta(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (251)$$

Substituindo a Eq. (251) na Eq. (244), separando variáveis, igualando a duas constantes distintas e sabendo que  $x$  e  $y$  são direções homogêneas, obtém-se as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (252)$$

$$\frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \alpha_m^2 Y_m = 0 \quad (253)$$

$$\frac{d^2 Z_{nm}}{dz^2} - (\lambda_n^2 + \alpha_m^2) Z_{nm} = 0 \quad (254)$$

As Eqs. (252-254) podem ser resolvidas utilizando a técnica da equação característica, com as soluções gerais sendo escritas na seguinte forma:

$$X_n(x) = A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x) \quad (255)$$

$$Y_m(y) = C_m \sin(\alpha_m y) + D_m \cos(\alpha_m y) \quad (256)$$

$$Z_{nm}(z) = E_{nm} \sinh(\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_m^2} z) + F_{nm} \cosh(\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_m^2} z) \quad (257)$$

A solução geral completa é então escrita como:

$$\theta(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x)] [C_n \sin(\alpha_m y) + D_n \cos(\alpha_m y)] \times \\ [E_{nm} \sinh(\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_m^2} z) + F_{nm} \cosh(\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_m^2} z)] \quad (258)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (245) obtém-se:

$$\theta_{nm}(x, y, 0) = \underbrace{X_n(x)}_{\neq 0} \underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} [\underbrace{E_{nm} \sinh(\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_m^2} 0)}_{=0} + \underbrace{F_{nm} \cosh(\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_m^2} 0)}_{=1}] = 0 \Rightarrow F_{nm} = 0 \quad (259)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (247) obtém-se:

$$\theta_{nm}(x, 0, z) = \underbrace{X_n(x)}_{\neq 0} [\underbrace{C_n \sin(\alpha_m 0)}_{=0} + \underbrace{D_n \cos(\alpha_m 0)}_{=1}] \underbrace{Z_{nm}(z)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow D_n = 0 \quad (260)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (249) obtém-se:

$$\theta_{nm}(0, y, z) = [\underbrace{A_n \sin(\lambda_n 0)}_{=0} + \underbrace{B_n \cos(\lambda_n 0)}_{=1}] \underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} \underbrace{Z_{nm}(z)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow B_n = 0 \quad (261)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (259-261) na Eq. (258) obtém-se:

$$\theta(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n x) C_n \sin(\alpha_m y) E_{nm} \sinh(\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_m^2} z) \quad (262)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (248) obtém-se:

$$\theta_{nm}(x, L, z) = \underbrace{X_n(x)}_{\neq 0} \underbrace{C_n}_{\neq 0} \sin(\alpha_m L) \underbrace{Z_{nm}(z)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \sin(\alpha_m L) = 0 \Rightarrow \alpha_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (263)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (250) obtém-se:

$$\theta_{nm}(L, y, z) = \underbrace{A_n}_{\neq 0} \sin(\lambda_n L) \underbrace{Y_n(y)}_{\neq 0} \underbrace{Z_{nm}(z)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \sin(\lambda_n L) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (264)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (263-264) na Eq. (262) obtém-se:

$$\theta(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sinh\left(\pi \sqrt{n^2 + m^2} \frac{z}{L}\right) \quad (265)$$

onde  $a_{nm} = A_n C_n E_{nm}$ . Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (246) obtém-se:

$$\theta(x, y, L) = \phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sinh(\pi \sqrt{n^2 + m^2}) \quad (266)$$

Dupla ortogonalidade é utilizada para se determinar  $a_{nm}$ . A função  $\sin(n\pi x/L)$  na Eq. (266) é solução da Eq. (252) e a função  $\sin(n\pi y/L)$  na Eq. (266) é solução da Eq. (253). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (266) somente se a Eq. (252) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $x=0$  e  $x=L$  foram homogêneas. De maneira similar, ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (266) somente se a Eq. (253) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $y=0$  e  $y=L$  foram homogêneas.

Comparando a Eq. (252) com a Eq. (12) obtém-se que  $w(x)=1$ . De maneira similar, comparando a Eq. (253) com a Eq. (12) obtém-se que  $w(y)=1$ . Tem-se então que  $\phi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$  e  $\phi_k(x) = \sin(k\pi x/L)$  são ortogonais com relação a função de ponderação  $w(x)=1$ . De maneira similar, tem-se também que  $\phi_m(y) = \sin(m\pi y/L)$  e  $\phi_i(y) = \sin(i\pi y/L)$  são ortogonais com relação a função de ponderação  $w(y)=1$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (266) por  $[w(x)w(y)\sin(k\pi x/L)\sin(i\pi y/L)dx dy]$ , integrando de  $x=0$  a  $x=L$  e de  $y=0$  a  $y=L$  obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^L \phi(x, y) w(x) w(y) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi y}{L}\right) dx dy = \\
& \int_0^L \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} w(x) w(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi y}{L}\right) \sinh(\pi\sqrt{n^2 + m^2}) dx dy
\end{aligned} \tag{267}$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral, sabendo que  $w(x) = w(y) = 1$  e utilizando o princípio da ortogonalidade pode-se resolver a Eq. (267) para  $a_{nm}$ , ou seja:

$$a_{nm} = \frac{\int_0^L \int_0^L \phi(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) dx dy}{\sinh(\pi\sqrt{n^2 + m^2}) \int_0^L \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi y}{L}\right) dx dy} \tag{268}$$

Finalmente, substituindo a Eq. (268) na Eq. (265) e retornando à variável original obtém-se:

$$\begin{aligned}
T(x, y, z) = T_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} & \left[ \frac{\int_0^L \int_0^L \phi(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) dx dy}{\sinh(\pi\sqrt{n^2 + m^2}) \int_0^L \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi y}{L}\right) dx dy} \right] \times \\
& \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sinh\left(\pi\sqrt{n^2 + m^2} \frac{z}{L}\right) \tag{269}
\end{aligned}$$

## 7 – CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO-HOMOGÊNEAS: O MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO

O método da separação de variáveis pode ser aplicado para resolver problemas de condução com condições de contorno não-homogêneas com o auxílio do princípio da superposição. Nessa aproximação, um problema é decomposto em problemas mais simples em número igual ao número de condições de contorno não-homogêneas. Para cada problema mais simples é atribuída uma condição de contorno não-homogênea de maneira que quando os problemas mais simples e suas condições de contorno são

adicionados, retorna-se à formulação do problema original. Para ilustrar esse método, considere condução bidimensional em regime permanente na placa mostrada na Fig. (8):

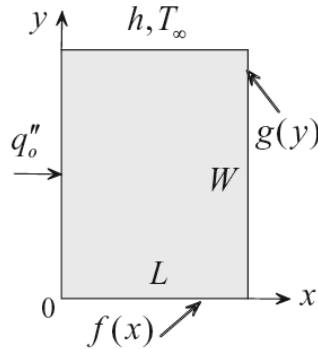


Figura 8 – Condução bidimensional com quatro condições de contorno não-homogêneas.

Como todas as quatro condições de contorno são não-homogêneas, pode-se dividir o problema original em quatro problemas mais simples, cada um com uma condição de contorno não-homogênea. A equação governante para esse problema, considerando condutividade térmica constante e sem geração de energia, é escrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{H.}) \quad (270)$$

As condições de contorno do problema original são:

$$(1) -k \frac{\partial T(0, y)}{\partial x} = q_o'' \quad (\text{N.H.})$$

$$(2) T(L, y) = g(y) \quad (\text{N.H.})$$

$$(3) T(x, 0) = f(x) \quad (\text{N.H.})$$

$$(4) -k \frac{\partial T(x, W)}{\partial y} = h[T(x, W) - T_\infty] \quad (\text{N.H.})$$

Pode-se assumir que a solução  $T(x, y)$  é a soma das soluções dos quatro problemas, ou seja:

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) + T_3(x, y) + T_4(x, y) \quad (271)$$

As quatro soluções,  $T_n(x, y)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , devem satisfazer a Eq. (270) e as quatro condições de contorno. Substituindo a Eq. (271) na Eq. (270) obtém-se quatro equações diferenciais parciais idênticas, ou seja:

$$\frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (272)$$

Substituindo a Eq. (271) na condição de contorno 1 obtém-se:

$$-k \frac{\partial T_1(0, y)}{\partial x} - k \frac{\partial T_2(0, y)}{\partial x} - k \frac{\partial T_3(0, y)}{\partial x} - k \frac{\partial T_4(0, y)}{\partial x} = q_o'' \quad (273)$$

Pode-se associar a parte não-homogênea da Eq. (273) a  $T_1(x, y)$ , deixando as condições homogêneas para os três problemas restantes, ou seja:

$$-k \frac{\partial T_1(0, y)}{\partial x} = q_o'', \quad -k \frac{\partial T_2(0, y)}{\partial x} = 0, \quad -k \frac{\partial T_3(0, y)}{\partial x} = 0, \quad -k \frac{\partial T_4(0, y)}{\partial x} = 0 \quad (274)$$

De maneira similar, as três condições de contorno restantes são subdivididas em:

$$T_1(L, y) = 0, \quad T_2(L, y) = g(y), \quad T_3(L, y) = 0, \quad T_4(L, y) = 0 \quad (275)$$

$$T_1(x, 0) = 0, \quad T_2(x, 0) = 0, \quad T_3(x, 0) = f(x), \quad T_4(x, 0) = 0 \quad (276)$$

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T_1(x, W)}{\partial y} &= hT_1(x, W), \quad -k \frac{\partial T_2(x, W)}{\partial y} = hT_2(x, W), \\ -k \frac{\partial T_3(x, W)}{\partial y} &= hT_3(x, W), \quad -k \frac{\partial T_4(x, W)}{\partial y} = h[T_4(x, W) - T_\infty] \end{aligned} \quad (277)$$

Nota-se que cada um dos quatro problemas tem agora uma condição de contorno não-homogênea, conforme mostrado na Fig. (9):

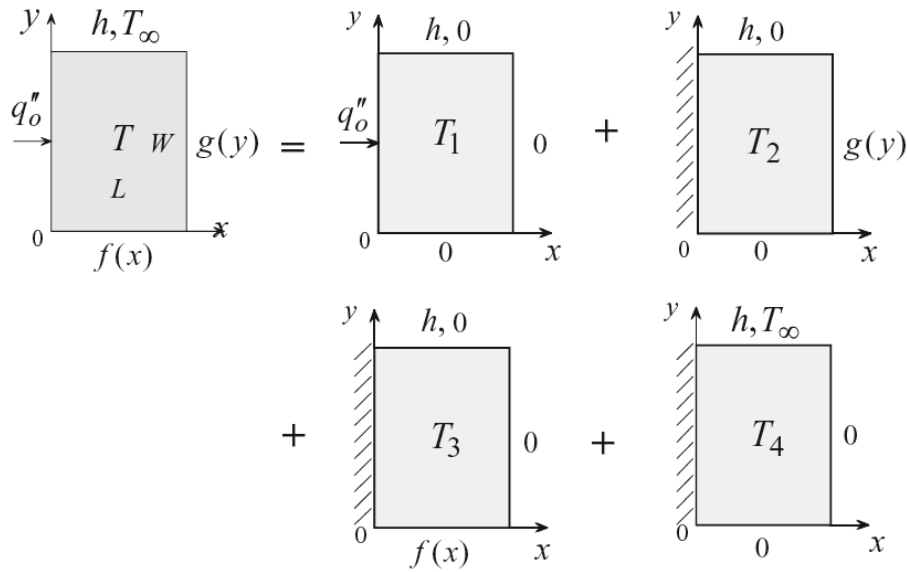


Figura 9 – Divisão do problema original em quatro problemas mais simples.

Na resolução dos problemas mais simples pode ser conveniente alterar a localização da origem e/ou a direção dos eixos coordenados. Entretanto, todas as soluções devem ser obtidas utilizando a mesma localização da origem e/ou direção dos eixos coordenados. É importante checar se o problema original é reestabelecido a partir da formulação dos problemas mais simples. Isso por ser feito somando as equações diferenciais governantes e as condições de contorno de cada problema. Por exemplo, para a equação diferencial governante do problema mostrado na Fig. (9) tem-se que:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 T_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_2(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2(x, y)}{\partial y^2} + \\
 & \frac{\partial^2 T_3(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_4(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_4(x, y)}{\partial y^2} = \\
 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} [T_1(x, y) + T_2(x, y) + T_3(x, y) + T_4(x, y)] + \\
 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} [T_1(x, y) + T_2(x, y) + T_3(x, y) + T_4(x, y)] = \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (278)
 \end{aligned}$$

Da condição de contorno 1 tem-se que:

$$-k \frac{\partial T_1(0, y)}{\partial x} - k \frac{\partial T_2(0, y)}{\partial x} - k \frac{\partial T_3(0, y)}{\partial x} - k \frac{\partial T_4(0, y)}{\partial x} =$$

$$-k \frac{\partial}{\partial x} [T_1(0, y) + T_2(0, y) + T_3(0, y) + T_4(0, y)] = -k \frac{\partial T(0, y)}{\partial x} = q_o'' \quad (279)$$

Da condição de contorno 2 tem-se que:

$$T_1(L, y) + T_2(L, y) + T_3(L, y) + T_4(L, y) = T(L, y) = g(y) \quad (280)$$

Da condição de contorno 3 tem-se que:

$$T_1(x, 0) + T_2(x, 0) + T_3(x, 0) + T_4(x, 0) = T(x, 0) = f(x) \quad (281)$$

Da condição de contorno 4 tem-se que:

$$-k \frac{\partial}{\partial y} [T_1(x, W) + T_2(x, W) + T_3(x, W) + T_4(x, W)] = -k \frac{\partial T(x, W)}{\partial y} =$$

$$h[T_1(x, W) + T_2(x, W) + T_3(x, W) + T_4(x, W) - T_\infty] = h[T(x, W) - T_\infty] \quad (282)$$

Nos exemplos a seguir, como grande parte do procedimento de solução é semelhante ao que já foi mostrado em detalhes nos cinco primeiros exemplos resolvidos, o procedimento de solução será apresentado de maneira mais abreviada.

#### EXEMPLO 8 – SUPERPOSIÇÃO EM UMA PLACA DELGADA

Considere condução de calor bidimensional na placa delgada mostrada abaixo. Considerando que a placa está estacionária, que não há geração interna de energia e que sua condutividade térmica é constante, determine a distribuição de temperaturas  $T(x, y)$  em regime permanente na placa.

A formulação do problema original é escrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ (H.)} \quad (283)$$

$$k \frac{\partial T(0, y)}{\partial x} = h[T(0, y) - T_{\infty}] \text{ (N.H.)} \quad (284)$$

$$-k \frac{\partial T(b, y)}{\partial x} = h[T(b, y) - T_{\infty}] - q'' \text{ (N.H.)} \quad (285)$$

$$k \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = h[T(x, 0) - T_{\infty}] \text{ (N.H.)} \quad (286)$$

$$T(x, H) = f(x) \text{ (N.H.)} \quad (287)$$

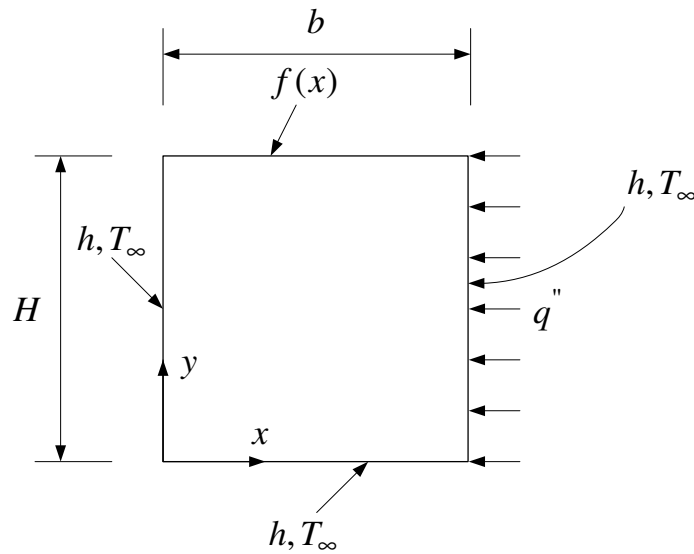


Figura 10 – Esquema do EXEMPLO 8.

A formulação original do problema consiste em uma equação diferencial parcial homogênea e quatro condições de contorno não-homogêneas. Para reduzir o número de condições de contorno não-homogêneas pode-se utilizar a variável  $\theta(x, y) = T(x, y) - T_{\infty}$ , de tal forma que as Eqs. (283-287) sejam reescritas como:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \text{ (H.)} \quad (288)$$

$$k \frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x} = h\theta(0, y) \text{ (H.)} \quad (289)$$

$$-k \frac{\partial \theta(b, y)}{\partial x} = h\theta(b, y) - q'' \text{ (N.H.)} \quad (290)$$

$$k \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = h\theta(x, 0) \text{ (H.)} \quad (291)$$

$$\theta(x, H) = f(x) - T_{\infty} = \phi(x) \text{ (N.H.)} \quad (292)$$

O novo problema tem a equação diferencial parcial homogênea e agora duas condições de contorno homogêneas. Ainda não é possível aplicar o método da separação de variáveis, que exige que três das quatro condições de contorno sejam homogêneas. Para contornar esse problema pode-se utilizar o princípio da superposição para dividir o problema original com duas não-homogeneidades em dois problemas mais simples, cada um contendo uma não-homogeneidade. Um esquema dessa separação pode ser visto na Fig. (11):

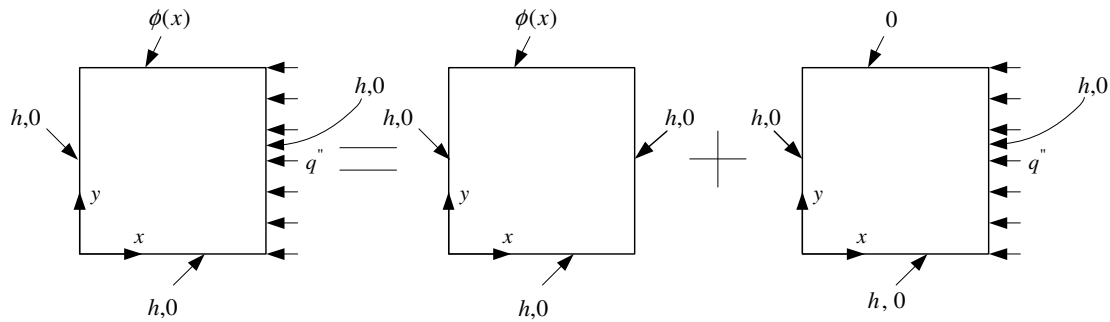


Figura 11 – Esquema do problema a ser resolvido por superposição.

Como o problema original foi dividido em dois novos problemas, a solução geral deve ter a seguinte forma:

$$\theta(x, y) = \theta_1(x, y) + \theta_2(x, y) \quad (293)$$

onde  $\theta_1(x, y)$  é a distribuição de temperaturas do primeiro problema e  $\theta_2(x, y)$  é a distribuição de temperaturas do segundo problema, conforme a Fig. (11). O modelo matemático para o primeiro problema é escrito como:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = 0 \text{ (H.)} \quad (294)$$

$$k \frac{\partial \theta_1(0, y)}{\partial x} = h \theta_1(0, y) \text{ (H.)} \quad (295)$$

$$-k \frac{\partial \theta_1(b, y)}{\partial x} = h \theta_1(b, y) \text{ (H.)} \quad (296)$$

$$k \frac{\partial \theta_1(x, 0)}{\partial y} = h \theta_1(x, 0) \text{ (H.)} \quad (297)$$

$$\theta_1(x, H) = \phi(x) \text{ (N.H.)} \quad (298)$$

O modelo matemático para o segundo problema é escrito como:

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} = 0 \text{ (H.)} \quad (299)$$

$$k \frac{\partial \theta_2(0, y)}{\partial x} = h \theta_2(0, y) \text{ (H.)} \quad (300)$$

$$-k \frac{\partial \theta_2(b, y)}{\partial x} = h \theta_2(b, y) - q'' \text{ (N.H.)} \quad (301)$$

$$k \frac{\partial \theta_2(x, 0)}{\partial y} = h \theta_2(x, 0) \text{ (H.)} \quad (302)$$

$$\theta_2(x, H) = 0 \text{ (H.)} \quad (303)$$

Deve ser notado que cada um dos dois problemas possui três condições de contorno homogêneas, tornando possível a aplicação do método da separação de variáveis para ambos. Além disso, deve ser notado que a soma das equações diferenciais governantes bem como das condições de contorno correspondentes dos dois problemas

resulta na equação diferencial e condições de contorno do problema original. Por exemplo, somando as Eqs. (294) e (299) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\theta_1 + \theta_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\theta_1 + \theta_2)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (304)$$

Somando as condições de contorno correspondentes obtém-se:

$$k \frac{\partial \theta_1(0, y)}{\partial x} + k \frac{\partial \theta_2(0, y)}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} [\theta_1(0, y) + \theta_2(0, y)] = k \frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x} =$$

$$h \theta_1(0, y) + h \theta_2(0, y) = h [\theta_1(0, y) + \theta_2(0, y)] = h \theta(0, y) \quad (305)$$

$$-k \frac{\partial \theta_1(b, y)}{\partial x} - k \frac{\partial \theta_2(b, y)}{\partial x} = -k \frac{\partial}{\partial x} [\theta_1(b, y) + \theta_2(b, y)] = -k \frac{\partial \theta(b, y)}{\partial x} =$$

$$h \theta_1(b, y) + h \theta_2(b, y) - q'' = h [\theta_1(b, y) + \theta_2(b, y)] - q'' = h \theta(b, y) - q'' \quad (306)$$

$$k \frac{\partial \theta_1(x, 0)}{\partial y} + k \frac{\partial \theta_2(x, 0)}{\partial y} = k \frac{\partial}{\partial y} [\theta_1(x, 0) + \theta_2(x, 0)] = k \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} =$$

$$h \theta_1(x, 0) + h \theta_2(x, 0) = h [\theta_1(x, 0) + \theta_2(x, 0)] = h \theta(x, 0) \quad (307)$$

$$\theta_1(x, H) + \theta_2(x, H) = \theta(x, H) = \phi(x) \quad (308)$$

A solução para o primeiro problema, Eq. (294), tem a seguinte forma:

$$\theta_1(x, y) = X_1(x, y) Y_1(x, y) \quad (309)$$

Substituindo a Eq. (309) na Eq. (294), separando variáveis, igualando a uma constante e sabendo que  $x$  é a direção homogênea, obtém-se as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2 X_{1n}}{dx^2} + \lambda_n^2 X_{1n} = 0 \quad (310)$$

$$\frac{d^2 Y_{1n}}{dx^2} - \lambda_n^2 Y_{1n} = 0 \quad (311)$$

As Eqs. (310-311) podem ser resolvidas utilizando a técnica da equação característica, com as soluções sendo escritas como:

$$X_{1n}(x) = A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x) \quad (312)$$

$$Y_{1n}(y) = C_n \sinh(\lambda_n y) + D_n \cosh(\lambda_n y) \quad (313)$$

A solução completa é então escrita como:

$$\theta_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x)] [C_n \sinh(\lambda_n y) + D_n \cosh(\lambda_n y)] \quad (314)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (295) obtém-se:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial [X_{1n}(0)Y_{1n}(y)]}{\partial x} &= kY_{1n}(y)\lambda_n [A_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} - B_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0}] = kY_{1n}(y)\lambda_n A_n = \\ h[X_{1n}(0)Y_{1n}(y)] &= h[A_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0} + B_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1}]Y_{1n}(y) = hB_n Y_{1n}(y) \end{aligned}$$

$$A_n = \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) B_n \quad (315)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (297) obtém-se:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial [X_{1n}(x)Y_{1n}(0)]}{\partial y} &= kX_{1n}(x)\lambda_n [C_n \underbrace{\cosh(\lambda_n 0)}_{=1} + D_n \underbrace{\sinh(\lambda_n 0)}_{=0}] = kX_{1n}(x)\lambda_n C_n = \\ h[X_{1n}(x)Y_{1n}(0)] &= h[C_n \underbrace{\sinh(\lambda_n 0)}_{=0} + D_n \underbrace{\cosh(\lambda_n 0)}_{=1}]X_{1n}(x) = hD_n X_{1n}(x) \end{aligned}$$

$$C_n = \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) D_n \quad (316)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (296) e utilizando os resultados das Eqs. (315-316) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 -k \frac{\partial [X_{1n}(b)Y_{1n}(y)]}{\partial x} &= -kY_{1n}(y)\lambda_n B_n \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \cos(\lambda_n b) - \sin(\lambda_n b) \right] = \\
 h[X_{1n}(b)Y_{1n}(y)] &= hY_{1n}(y)B_n \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n b) + \cos(\lambda_n b) \right] \\
 \cot(\lambda_n b) &= \frac{(\lambda_n b)}{2\text{Bi}} - \frac{\text{Bi}}{2(\lambda_n b)}
 \end{aligned} \tag{317}$$

onde  $\text{Bi} = hb/k$ . Substituindo os resultados das Eqs. (315-316) na Eq. (314) e rearranjando obtém-se:

$$\theta_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right] \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sinh(\lambda_n y) + \cosh(\lambda_n y) \right] \tag{318}$$

onde  $a_n = B_n D_n$ . Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (298) obtém-se:

$$\theta_1(x, H) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right] \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sinh(\lambda_n H) + \cosh(\lambda_n H) \right] \tag{319}$$

Ortogonalidade é utilizada para se determinar a constante  $a_n$ . A função  $\phi_n(x) = \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right]$  na Eq. (319) é a solução da Eq. (310). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (319) somente se a Eq. (310) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $x=0$  e  $x=b$  foram homogêneas. Comparando a Eq. (310) com a Eq. (12) obtém-se  $w(x)=1$ . Tem-se que  $\phi_n(x)$  e  $\phi_m(x)$  são ortogonais com relação a função peso  $w(x)=1$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (319) por  $w(x) \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_m} \right) \sin(\lambda_m x) + \cos(\lambda_m x) \right]$  e integrando de  $x=0$  a  $x=b$  obtém-se:

$$\int_0^b \phi(x) w(x) \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_m} \right) \sin(\lambda_m x) + \cos(\lambda_m x) \right] dx = \int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right] \times$$

$$\left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sinh(\lambda_n H) + \cosh(\lambda_n H) \right] w(x) \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_m} \right) \sin(\lambda_m x) + \cos(\lambda_m x) \right] dx \quad (320)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral, sabendo que  $w(x) = 1$  e utilizando o princípio da ortogonalidade pode-se resolver a Eq. (320) para  $a_n$ , obtendo-se:

$$a_n = \frac{\int_0^b \phi(x) \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right] dx}{\left\{ \int_0^b \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right]^2 dx \right\} \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sinh(\lambda_n H) + \cosh(\lambda_n H) \right]} \quad (321)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (321) na Eq. (318) e retornando à variável original obtém-se:

$$T_1(x, y) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^b \phi(x) \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right] dx \right\} \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right] \times$$

$$\frac{\left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sinh(\lambda_n y) + \cosh(\lambda_n y) \right]}{\left\{ \int_0^b \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right]^2 dx \right\} \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sinh(\lambda_n H) + \cosh(\lambda_n H) \right]} \quad (322)$$

A solução para o segundo problema, Eq. (299), tem a seguinte forma:

$$\theta_2(x, y) = X_2(x)Y_2(y) \quad (323)$$

Substituindo a Eq. (323) na Eq. (299), separando variáveis, igualando a uma constante e sabendo que  $y$  é a direção homogênea, obtém-se as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2 X_{2n}}{dx^2} - \alpha_n^2 X_{2n} = 0 \quad (324)$$

$$\frac{d^2 Y_{2n}}{dy^2} + \alpha_n^2 Y_{2n} = 0 \quad (325)$$

As Eqs. (324-325) podem ser resolvidas utilizando a técnica da equação característica, com as soluções sendo escritas como:

$$X_{2n}(x) = E_n \sinh(\alpha_n x) + F_n \cosh(\alpha_n x) \quad (326)$$

$$Y_{2n}(y) = G_n \sin(\alpha_n y) + H_n \cos(\alpha_n y) \quad (327)$$

A solução completa é então escrita como:

$$\theta_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [E_n \sinh(\alpha_n x) + F_n \cosh(\alpha_n x)] [G_n \sin(\alpha_n y) + H_n \cos(\alpha_n y)] \quad (328)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (300) obtém-se:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial [X_{2n}(0)Y_{2n}(y)]}{\partial x} &= kY_{2n}(y)\alpha_n [E_n \underbrace{\cosh(\alpha_n 0)}_{=1} + F_n \underbrace{\sinh(\alpha_n 0)}_{=0}] = kY_{2n}(y)\alpha_n E_n = \\ h[X_{2n}(0)Y_{2n}(y)] &= h[E_n \underbrace{\sinh(\alpha_n 0)}_{=0} + F_n \underbrace{\cosh(\alpha_n 0)}_{=1}]Y_{2n}(y) = hF_n Y_{2n}(y) \\ E_n &= \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) F_n \end{aligned} \quad (329)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (302) obtém-se:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial [X_{2n}(x)Y_{2n}(0)]}{\partial y} &= kX_{2n}(x)\alpha_n [G_n \underbrace{\cos(\alpha_n 0)}_{=1} - H_n \underbrace{\sin(\alpha_n 0)}_{=0}] = kX_{2n}(x)\alpha_n G_n = \\ h[X_{2n}(x)Y_{2n}(0)] &= h[G_n \underbrace{\sin(\alpha_n 0)}_{=0} + H_n \underbrace{\cos(\alpha_n 0)}_{=1}]X_{2n}(x) = hH_n X_{2n}(x) \\ G_n &= \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) H_n \end{aligned} \quad (330)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (303) e utilizando o resultado do Eq. (330) obtém-se:

$$[X_{2n}(x)Y_{2n}(H)] = \underbrace{X_{2n}(x)}_{\neq 0} \underbrace{H_n}_{\neq 0} \underbrace{\left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n H) + \cos(\alpha_n H) \right]}_{=0} = 0 \Rightarrow -\tan(\alpha_n H) = \frac{k\alpha_n}{h} \quad (331)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (329-330) na Eq. (328) e rearranjando obtém-se:

$$\theta_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sinh(\alpha_n x) + \cosh(\alpha_n x) \right] \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right] \quad (332)$$

onde  $b_n = F_n H_n$ . Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (301) obtém-se:

$$\begin{aligned} -k \sum_{n=1}^{\infty} b_n \alpha_n \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \cosh(\alpha_n b) + \sinh(\alpha_n b) \right] \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right] = \\ h \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sinh(\alpha_n b) + \cosh(\alpha_n b) \right] \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right] - q'' \quad (333) \end{aligned}$$

Ortogonalidade é utilizada para se determinar a constante  $b_n$ . A função  $\phi_n(y) = \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right]$  na Eq. (333) é a solução da Eq. (325). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (333) somente se a Eq. (325) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $y=0$  e  $y=H$  foram homogêneas. Comparando a Eq. (325) com a Eq. (12) obtém-se  $w(y)=1$ . Tem-se que  $\phi_n(y)$  e  $\phi_m(y)$  são ortogonais com relação a função peso  $w(y)=1$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (333) por  $w(y) \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_m} \right) \sin(\alpha_m y) + \cos(\alpha_m y) \right] dy$  e integrando de  $y=0$  a  $y=H$  obtém-se:

$$\int_0^H -k \sum_{n=1}^{\infty} b_n \alpha_n w(y) \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \cosh(\alpha_n b) + \sinh(\alpha_n b) \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right] \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_m} \right) \sin(\alpha_m y) + \cos(\alpha_m y) \right] dy = \\
& \int_0^H h \sum_{n=1}^{\infty} b_n w(y) \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sinh(\alpha_n b) + \cosh(\alpha_n b) \right] \times \\
& \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right] \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_m} \right) \sin(\alpha_m y) + \cos(\alpha_m y) \right] dy - \\
& \int_0^H q'' w(y) \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_m} \right) \sin(\alpha_m y) + \cos(\alpha_m y) \right] dy \quad (334)
\end{aligned}$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral, sabendo que  $w(y) = 1$  e utilizando o princípio da ortogonalidade pode-se resolver a Eq. (334) para  $b_n$ , obtendo-se:

$$b_n = \frac{\frac{q''}{k\alpha_n} \int_0^H \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right] dy}{\sinh(\alpha_n b) \left[ 1 - \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right)^2 \right] \left\{ \int_0^H \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right]^2 dy \right\}} \quad (335)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (335) na Eq. (332) e retornando à variável original obtém-se:

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) = T_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} & \frac{\frac{q''}{k\alpha_n} \int_0^H \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right] dy}{\sinh(\alpha_n b) \left[ 1 - \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right)^2 \right] \left\{ \int_0^H \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right]^2 dy \right\}} \times \\
& \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sinh(\alpha_n x) + \cosh(\alpha_n x) \right] \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right] \quad (336)
\end{aligned}$$

O último passo consiste em adicionar as soluções representadas pelas Eqs. (322) e (336) para a obtenção da solução completa do problema original, ou seja:

$$\begin{aligned}
T(x, y) = T_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} & \left\{ \int_0^b \phi(x) \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right] dx \right\} \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right] \times \\
& \frac{\left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sinh(\lambda_n y) + \cosh(\lambda_n y) \right]}{\left\{ \int_0^b \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right]^2 dx \right\} \left[ \left( \frac{h}{k\lambda_n} \right) \sinh(\lambda_n H) + \cosh(\lambda_n H) \right]} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{q''}{k\alpha_n} \int_0^H \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right] dy}{\sinh(\alpha_n b) \left[ 1 - \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right)^2 \right] \left\{ \int_0^H \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right]^2 dy \right\}} \times \\
& \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sinh(\alpha_n x) + \cosh(\alpha_n x) \right] \left[ \left( \frac{h}{k\alpha_n} \right) \sin(\alpha_n y) + \cos(\alpha_n y) \right] \quad (337)
\end{aligned}$$

#### EXEMPLO 9 – SUPERPOSIÇÃO EM UMA CÁPSULA CILÍNDRICA

Uma cápsula cilíndrica delgada estacionária contendo rejeitos radioativos conforme mostrado na figura abaixo possui geração interna de energia volumétrica uniforme a uma taxa  $\dot{q}$ . A cápsula possui condutividade térmica constante, está em repouso sobre uma superfície adiabática e está sendo resfriada por um fluido refrigerante com temperatura  $T_{\infty}$  escoando sobre a cápsula. É assumido que o coeficiente de transferência de calor por convecção  $h$  entre o fluido refrigerante e a cápsula é bastante alto. Determine a distribuição de temperaturas  $T(r, z)$  em regime permanente na cápsula.

A formulação do problema original é escrita como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \text{ (N.H.)} \quad (338)$$

$$\frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = 0 \text{ (H.)} \quad (339)$$

$$T(R, z) = T_{\infty} \text{ (N.H.)} \quad (340)$$

$$\frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} = 0 \text{ (H.)} \quad (341)$$

$$T(r, L) = T_{\infty} \text{ (N.H.)} \quad (342)$$

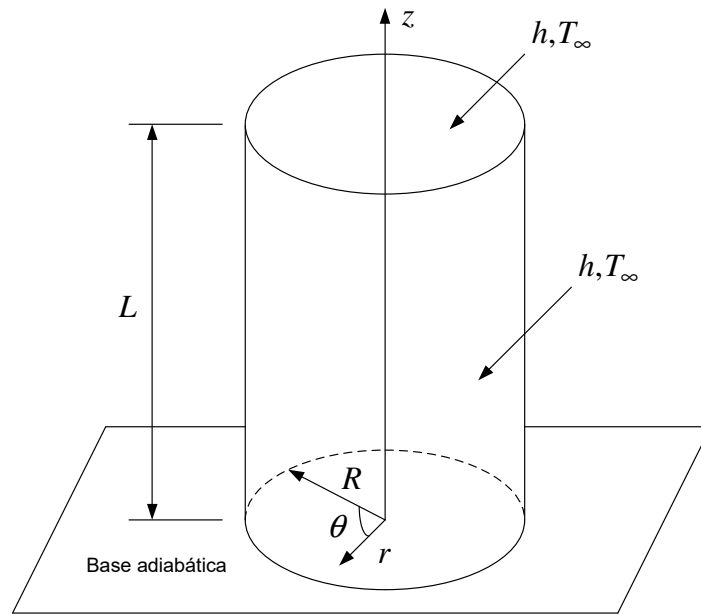


Figura 12 – Esquema do EXEMPLO 9.

A formulação original do problema consiste em uma equação diferencial parcial não-homogênea, duas condições de contorno homogêneas e duas condições de contorno não-homogêneas. Para reduzir o número de condições de contorno não-homogêneas pode-se utilizar a variável  $\theta(r, z) = T(r, z) - T_{\infty}$ , de tal forma que as Eqs. (338-342) sejam reescritas como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \text{ (N.H.)} \quad (343)$$

$$\frac{\partial \theta(0, z)}{\partial r} = 0 \text{ (H.)} \quad (344)$$

$$\theta(R, z) = 0 \text{ (H.)} \quad (345)$$

$$\frac{\partial \theta(r,0)}{\partial z} = 0 \text{ (H.)} \quad (346)$$

$$\theta(r, L) = 0 \text{ (H.)} \quad (347)$$

O novo problema tem a equação diferencial parcial não-homogênea e agora quatro condições de contorno homogêneas. Ainda não é possível aplicar o método da separação de variáveis, que exige que a equação diferencial parcial do problema seja homogênea. Para contornar esse problema pode-se utilizar o princípio da superposição para separar a equação diferencial parcial com uma não-homogeneidade em duas equações diferenciais: uma equação diferencial ordinária contendo a não-homogeneidade e uma equação diferencial parcial homogênea. Um esquema dessa separação pode ser visto na Fig. (13):

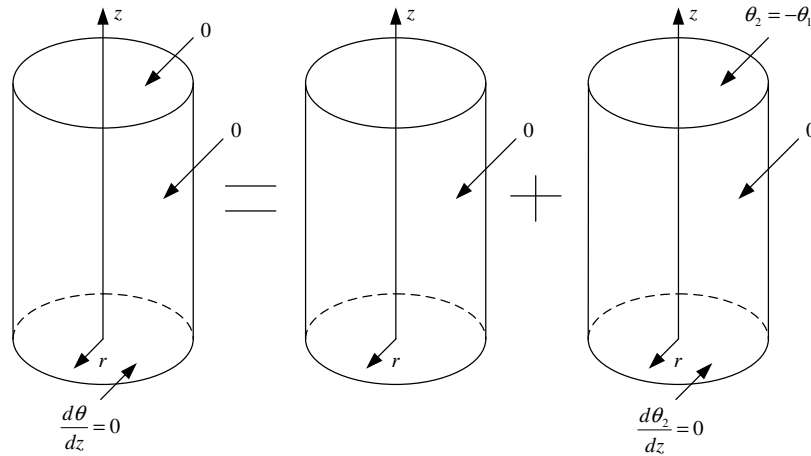


Figura 13 - Esquema do problema a ser resolvido por superposição.

Como o problema foi original foi dividido em dois novos problemas, a solução geral deve ter a seguinte forma:

$$\theta(r, z) = \theta_1(r) + \theta_2(r, z) \quad (348)$$

onde  $\theta_1(r)$  é a distribuição de temperaturas do primeiro problema e  $\theta_2(r, z)$  é a distribuição de temperaturas do segundo problema, conforme a Fig. (13). O modelo matemático para o primeiro problema é escrito como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\theta_1}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (349)$$

$$\frac{d\theta_1(0)}{dr} = 0 \quad (350)$$

$$\theta_1(R) = 0 \quad (351)$$

O modelo matemático para o segundo problema é escrito como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} = 0 \text{ (H.)} \quad (352)$$

$$\frac{\partial \theta_2(0, z)}{\partial r} = 0 \text{ (H.)} \quad (353)$$

$$\theta_2(R, z) = 0 \text{ (H.)} \quad (354)$$

$$\frac{\partial \theta_2(r, 0)}{\partial z} = 0 \text{ (H.)} \quad (355)$$

$$\theta_2(r, L) = -\theta_1(r, L) \text{ (N.H.)} \quad (356)$$

Deve ser notado que o segundo problema possui três condições de contorno homogêneas, tornando possível a aplicação do método da separação de variáveis. Já para o primeiro problema, a solução pode ser obtida por dupla integração. No caso, a não-homogeneidade do problema original foi acoplada à equação diferencial ordinária, bem mais simples de ser resolvida. Além disso, deve ser notado que a soma das equações diferenciais governantes bem como das condições de contorno correspondentes dos dois problemas resulta na equação diferencial e condições de contorno do problema original. Por exemplo, somando as Eqs. (349) e (352) obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial (\theta_1 + \theta_2)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 (\theta_1 + \theta_2)}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} =$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (357)$$

Somando as condições de contorno correspondentes obtém-se:

$$\frac{\partial \theta_1(0, z)}{\partial r} + \frac{\partial \theta_2(0, z)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [\theta_1(0) + \theta_2(0, z)] = \frac{\partial \theta(0, z)}{\partial r} = 0 \quad (358)$$

$$\theta_1(R, z) + \theta_2(R, z) = \theta(R, z) = 0 \quad (359)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \theta_1(r, 0)}{\partial z}}_{=0} + \frac{\partial \theta_2(r, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \theta(r, 0)}{\partial z} = 0 \quad (360)$$

$$\theta_1(r, L) + \theta_2(r, L) = \theta(r, L) = \theta_1(r, L) - \theta_1(r, L) = 0 \quad (361)$$

A solução do primeiro problema é obtida por dupla integração da Eq. (349), ou seja:

$$\frac{d\theta_1}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{A}{r} \quad (362)$$

$$\theta_1(r) = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + A \ln r + B \quad (363)$$

Aplicando as condições de contorno dadas pelas Eqs. (350-351) obtém-se:

$$\frac{d\theta_1(0)}{dr} - \frac{\dot{q}0}{2k} + \frac{A}{0} = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (364)$$

$$\theta_1(R) = -\frac{\dot{q}R^2}{4k} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{\dot{q}R^2}{4k} \quad (365)$$

Substituindo as Eqs. (364-365) na Eq. (363), voltando a variável original e rearranjando obtém-se:

$$T_1(r) = T_\infty + \frac{\dot{q}R^2}{4k} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (366)$$

A solução para o segundo problema, Eq. (352), tem a seguinte forma:

$$\theta_2(r, z) = R_2(r)Z_2(z) \quad (367)$$

Substituindo a Eq. (367) na Eq. (352), separando variáveis, igualando a uma constante e sabendo que  $r$  é a direção homogênea, obtém-se as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$r^2 \frac{\partial^2 R_{2k}}{\partial r^2} + r \frac{\partial R_{2k}}{\partial r} + r^2 \lambda_k^2 R_{2k} = 0 \quad (368)$$

$$\frac{\partial^2 Z_{2k}}{\partial z^2} - \lambda_k^2 Z_{2k} = 0 \quad (369)$$

As Eq. (368) é uma equação diferencial de Bessel, que pode ser resolvida com o auxílio do Apêndice, tendo os coeficientes  $A=B=0$ ,  $C=1$ ,  $D=\lambda_k$  e  $n=0$ . Já a Eq. (369) pode ser resolvida utilizando a técnica da equação característica. As soluções gerais são escritas como:

$$R_{2k}(r) = C_k J_0(\lambda_k r) + D_k Y_0(\lambda_k r) \quad (370)$$

$$Z_{2k}(z) = E_k \sinh(\lambda_k z) + F_k \cosh(\lambda_k z) \quad (371)$$

A solução geral completa é então escrita como:

$$\theta_2(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_k J_0(\lambda_k r) + D_k Y_0(\lambda_k r)] [E_k \sinh(\lambda_k z) + F_k \cosh(\lambda_k z)] \quad (372)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (353) obtém-se:

$$\frac{\partial[R_{2k}(0)Z_{2k}(z)]}{\partial r} = \underbrace{Z_{2k}(z)}_{\neq 0} \underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} [C_k \underbrace{J_1(\lambda_k 0)}_{=0} + D_k \underbrace{Y_1(\lambda_k 0)}_{=\infty}] = 0 \Rightarrow D_k = 0 \quad (373)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (355) obtém-se:

$$\frac{\partial[R_{2k}(r)Z_{2k}(0)]}{\partial z} = \underbrace{R_{2k}(r)}_{\neq 0} \underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} [\underbrace{E_k \cosh(\lambda_k 0)}_{=1} + \underbrace{F_k \sinh(\lambda_k 0)}_{=0}] = 0 \Rightarrow E_k = 0 \quad (374)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (354) e substituindo o resultado das Eqs. (373-374) obtém-se:

$$R_{2k}(R)Z_{2k}(z) = \underbrace{C_k}_{\neq 0} \underbrace{J_0(\lambda_k R)}_{\neq 0} \underbrace{Z_{2k}(z)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow J_0(\lambda_k R) = 0 \quad (375)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (373-374) na Eq. (372) e rearranjando obtém-se:

$$\theta_2(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k [J_0(\lambda_k r)] [\cosh(\lambda_k z)] \quad (376)$$

onde  $a_k = C_k F_k$ . Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (356) obtém-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k [J_0(\lambda_k r)] [\cosh(\lambda_k L)] = -\frac{\dot{q}R^2}{4k} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (377)$$

Ortogonalidade é utilizada para se determinar  $a_k$ . A função  $\phi_k(r) = [J_0(\lambda_k r)]$  na Eq. (377) é a solução da Eq. (368). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (377) somente se a Eq. (368) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $r=0$  e  $r=R$  foram homogêneas. Comparando a Eq. (368) com a Eq. (12) obtém-se  $w(r)=r$ . Tem-se que  $\phi_k(r)$  e  $\phi_i(r)$  são ortogonais com relação a função peso  $w(r)=r$ .

Multiplicando ambos os lados da Eq. (377) por  $w(r)[J_0(\lambda_i r)]dr$  e integrando de  $r=0$  a  $r=R$  obtém-se:

$$\int_0^R \sum_{k=1}^{\infty} a_k w(r)[J_0(\lambda_k r)][J_0(\lambda_i r)] \cosh(\lambda_k L) dr = \int_0^R -w(r)[J_0(\lambda_i r)] \frac{\dot{q} R^2}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr \quad (378)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral, sabendo que  $w(r) = r$  e utilizando o princípio da ortogonalidade pode-se resolver a Eq. (378) para  $a_k$ , obtendo-se:

$$a_k = - \frac{\dot{q} R^2 \int_0^R r J_0(\lambda_k r) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr}{4k [\cosh(\lambda_k L)] \int_0^R r J_0^2(\lambda_k r) dr} \quad (379)$$

As integrais da Eq. (379) não são diretas e podem ser resolvidas com o auxílio do MAPLE, obtendo-se:

$$\int_0^R r J_0(\lambda_k r) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr = - \frac{2}{\lambda_k^3 R} [\lambda_k R J_0(\lambda_k R) - 2 J_1(\lambda_k R)] \quad (380)$$

$$\int_0^R r J_0^2(\lambda_k r) dr = \frac{R^2}{2} [J_0^2(\lambda_k R) + J_1^2(\lambda_k R)] \quad (381)$$

A Eq. (379) é então reescrita com os resultados das Eqs. (380-381) na seguinte forma:

$$a_k = \frac{\dot{q}}{\lambda_k^3 k R \cosh(\lambda_k L)} \frac{[\lambda_k R J_0(\lambda_k R) - 2 J_1(\lambda_k R)]}{[J_0^2(\lambda_k R) + J_1^2(\lambda_k R)]} \quad (382)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (382) na Eq. (376) e voltando na variável original obtém-se:

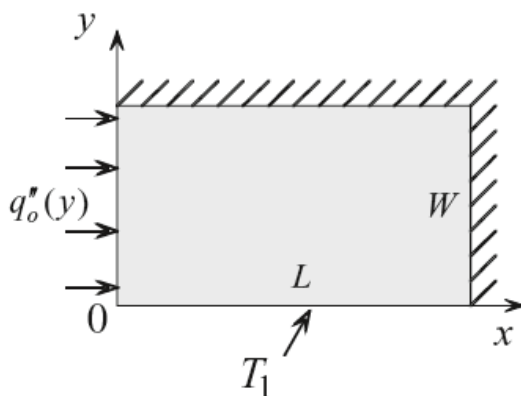
$$T_2(r, z) = T_{\infty} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{q} J_0(\lambda_k r) \cosh(\lambda_k z)}{\lambda_k^3 k R \cosh(\lambda_k L)} \frac{[\lambda_k R J_0(\lambda_k R) - 2 J_1(\lambda_k R)]}{[J_0^2(\lambda_k R) + J_1^2(\lambda_k R)]} \quad (383)$$

O último passo consiste em adicionar as soluções dadas pelas Eqs. (366) e (383) para a obtenção da solução completa do problema original, obtendo-se:

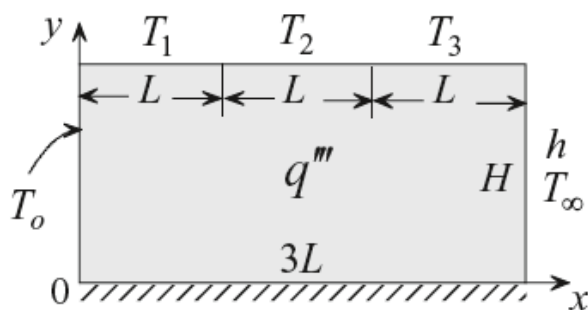
$$T(r, z) = 2T_{\infty} + \frac{\dot{q}R^2}{4k} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{q}J_0(\lambda_k r) \cosh(\lambda_k z)}{\lambda_k^3 k R \cosh(\lambda_k L)} \frac{[\lambda_k R J_0(\lambda_k R) - 2J_1(\lambda_k R)]}{[J_0^2(\lambda_k R) + J_1^2(\lambda_k R)]} \quad (384)$$

## 8-EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Uma placa retangular de comprimento  $L$  e altura  $H$  está isolada em  $x = L$  e  $y = W$ . A placa é aquecida com um fluxo de calor variável ao longo de  $x = 0$ . O quarto lado está a temperatura  $T_1$ . Determine a distribuição de temperaturas bidimensional em regime permanente.

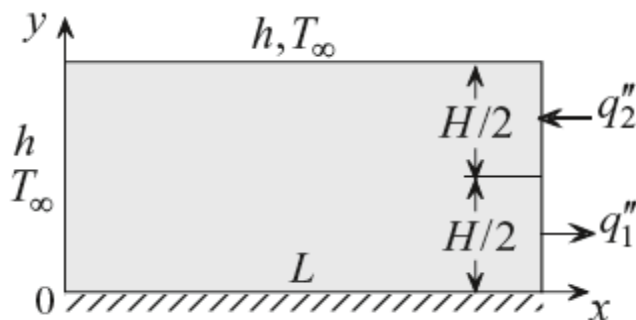


2) Energia térmica é gerada em uma placa retangular de dimensões  $3L \times H$  a uma taxa volumétrica uniforme  $\dot{q}$ . A superfície em  $(0, y)$  está mantida a  $T_o$ . Ao longo da superfície  $(3L, y)$  a placa troca calor por convecção. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . A superfície  $(x, H)$  está dividida em três segmentos iguais que estão mantidos a temperaturas uniformes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ , respectivamente. A superfície em  $(x, 0)$  está isolada. Determine a distribuição de temperaturas bidimensional em regime permanente.

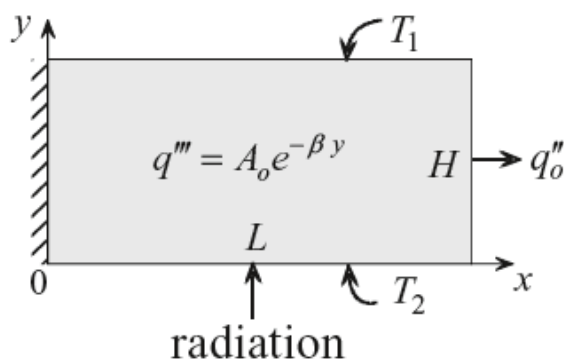


3) Considere condução bidimensional em regime permanente em uma placa retangular de dimensões  $L \times H$ . Os lados  $(0, y)$  e  $(x, H)$  trocam calor por convecção. O coeficiente de

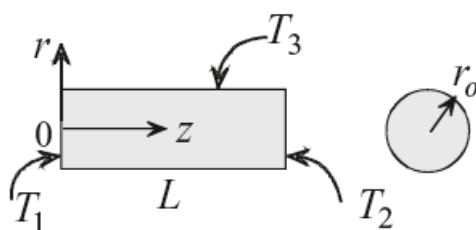
transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . O lado  $(x,0)$  está isolado. Metade da superfície em  $x = L$  é resfriada por um fluxo de calor  $q_1''$  enquanto a outra metade é aquecida por um fluxo de calor  $q_2''$ . Determine a distribuição de temperaturas na placa e calcule a taxa de transferência de calor ao longo de  $(0, y)$ .



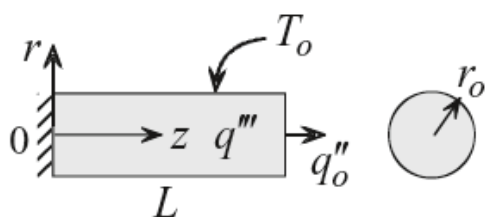
4) Radiação térmica incide sobre um lado de uma placa retangular de dimensões  $L \times H$  e é parcialmente absorvida. A energia absorvida resulta em uma geração de energia térmica não uniforme dada por  $\dot{q} = A_o e^{-\beta y}$ , onde  $A_o$  e  $\beta$  são constantes. A superfície que está exposta a radiação,  $(x,0)$ , está mantida a  $T_2$  enquanto a superfície oposta  $(x,H)$  está mantida a  $T_1$ . A placa está isolada ao longo da superfície  $(0, y)$  e resfriada ao longo da superfície  $(L, y)$  por um fluxo de calor uniforme  $q_o''$ . Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente.



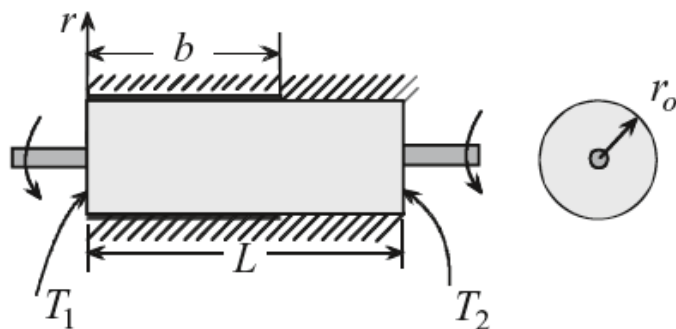
5) Um cilindro sólido de raio  $r_o$  e comprimento  $L$  está mantida a  $T_1$  na sua extremidade esquerda. A extremidade direita está mantida a  $T_2$  e a superfície cilíndrica está mantida a  $T_3$ . Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente no cilindro.



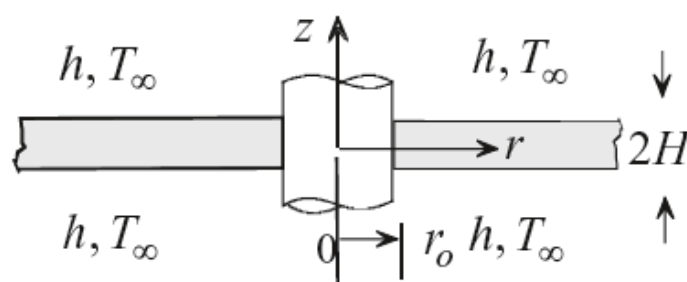
6) A taxa volumétrica de geração de energia em um cilindro sólido de raio  $r_o$  e comprimento  $L$  varia ao longo do raio de acordo com a expressão  $\dot{q} = \dot{q}_o r$ , onde  $\dot{q}_o$  é uma constante. Um lado está isolado enquanto o outro lado é resfriado por um fluxo de calor uniforme  $q_o''$ . A superfície cilíndrica está mantida a uma temperatura uniforme  $T_o$ . Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente no cilindro.



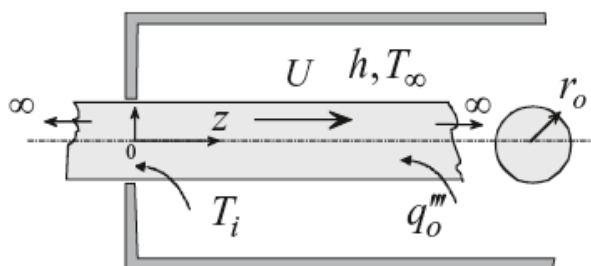
7) Um eixo de raio  $r_o$  e comprimento  $L$  está mantido a  $T_1$  na seu lado esquerdo e mantido a  $T_2$  no seu lado direito. O eixo gira no interior de uma bucha de comprimento  $b$ . Energia térmica é gerada na interface entre a bucha e o eixo a um fluxo uniforme  $q_o''$ . A superfície cilíndrica do eixo está bem isolada. Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente no eixo.



8) No modelo tradicional de aletas radiais de perfil retangular, a variação de temperatura lateral é desprezada. Assim, um problema que seria de condução bidimensional é modelado como um problema de condução unidimensional. Para examinar a precisão dessa aproximação, considere uma placa extensa com espessura  $2H$  fixa em um duto de raio  $r_o$ . O tubo está mantido a temperatura uniforme  $T_o$ . As superfícies superior e inferior da placa trocam calor por convecção. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente e a taxa de transferência de calor na placa.



9) Energia elétrica é gerada no interior de um cabo elétrico de raio  $r_o$  a uma taxa volumétrica uniforme  $\dot{q}_o$ . O cabo se move com velocidade  $U$  através de uma grande câmara onde troca calor por convecção. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . O cabo entra na câmara com uma temperatura  $T_i$ . Determine a distribuição de temperaturas em regime permanente no cabo elétrico.



## CAPÍTULO 6

# CONDUÇÃO TRANSIENTE

Em condução transiente a temperatura em qualquer posição em uma região varia com o tempo. Essa é uma condição comum que é encontrada em diversas aplicações de engenharia. Nesse capítulo será apresentado primeiramente um modelo simplificado para resolver certos problemas transientes na qual a variação espacial de temperaturas é desprezível. Após isso será analisado o problema de condução transiente e unidimensional nas geometrias plana, cilíndrica e esférica. Um problema transiente e bidimensional também será apresentado. Finalmente, será mostrado o método da similaridade e o método integral, amplamente utilizados para analisar problemas transientes e unidimensionais em regiões semi-infinitas.

### 1-MÉTODO SIMPLIFICADO: MÉTODO DA CAPACIDADE CONCENTRADA

Na aproximação mais simples para resolver problemas transientes, a variação espacial de temperaturas é desprezada e é assumido que a temperatura varia somente com o tempo. Tem-se então que:

$$T = T(t) \tag{1}$$

Essa idealização nem sempre é justificada mas pode ser aceita sob certas condições discutidas na próxima seção.

#### 1.1-CRITÉRIO PARA SE DESPREZAR A VARIAÇÃO ESPACIAL DE TEMPERATURAS

Considere um fio de cobre fino que é aquecido em um forno e então removido do forno de tal forma que seja resfriado por convecção. Calor é conduzido através do interior

do fio e então removido por convecção a partir da superfície do fio. Assim, existe uma queda de temperaturas  $\Delta T$  através do raio do fio. É essa queda de temperaturas que é desprezada no método da capacidade concentrada. Fatores que influenciam essa queda são: (1) o raio do fio  $r_o$ , (2) a condutividade térmica do fio  $k$  e (3) o coeficiente de transferência de calor  $h$ .

Espera-se que  $\Delta T$  seja baixo para pequenos raios e para altas condutividades térmicas. O comportamento do  $h$  não é tão óbvio. Um coeficiente de transferência de calor baixo pode ser comparado com uma camada isolante restringindo o calor que deixa o fio e assim forçando um gradiente de temperaturas mais uniforme no interior do fio. A forma como esses fatores se combinam para formar um parâmetro que fornece uma medida da queda de temperaturas pode ser estabelecida por análise dimensional da equação governante do problema e suas condições de contorno. Esse parâmetro é chamado de número de Biot, um adimensional que é definido como:

$$Bi = \frac{h\delta}{k} \quad (2)$$

onde  $\delta$  é a escala de comprimento que é igual a distância através da qual a queda de temperaturas  $\Delta T$  é desprezada. Nesse exemplo,  $\delta = r_o$ . Baseando-se nessa observação, pode-se concluir que quanto menor o número de Biot, menor é o valor de  $\Delta T$ . A próxima questão é: quão baixo deve ser o número de Biot para que a queda de temperaturas  $\Delta T$  seja desprezível?

A resposta é obtida comparando-se soluções transientes aproximadas na qual a variação espacial de temperaturas foi desprezada com soluções exatas onde a variação espacial de temperaturas não foi desprezada. Resultados indicam que para  $Bi \leq 0,1$  a queda de temperaturas  $\Delta T$  é menor do que 5% da diferença de temperaturas entre o centro e a temperatura do fluido ambiente. Assim, o critério para se desprezar a variação espacial de temperaturas e a justificativa para se utilizar o método da capacidade concentrada é:

$$Bi = \frac{h\delta}{k} \leq 0,1 \quad (3)$$

Deve-se ter cuidado para identificar a escala de comprimento  $\delta$  na Eq. (3). Para um cilindro longo,  $\delta = r_o$ . Para uma placa longa com espessura  $L$  que é aquecida ou resfriada em ambos os lados, simetria sugere que  $\delta = L/2$ . Entretanto, para uma placa que está isolada em um dos seus lados,  $\delta = L$ . Para um corpo com formato irregular, ou para um corpo na qual calor é transferido a partir de mais de uma superfície, uma definição razoável para a escala de comprimento do número de Biot é determinada dividindo o volume do objeto,  $V$ , pela sua área superficial,  $A_s$ . Tem-se então que:

$$\delta = \frac{V}{A_s} \quad (4)$$

O significado do número de Biot também pode ser visualizado reescrevendo a Eq. (2) na seguinte forma:

$$\text{Bi} = \frac{\delta/k}{1/h} \quad (5)$$

A Eq. (5) indica que o número de Biot é a relação entre a resistência térmica de condução (interna) e a resistência térmica de convecção (externa). Assim, um baixo número de Biot implica uma baixa resistência térmica interna comparada com a resistência térmica externa.

## 1.2-ANÁLISE GERAL DA CAPACIDADE CONCENTRADA

Embora a condução transiente em um sólido seja normalmente iniciada pela transferência de calor por convecção para ou de um fluido adjacente, outros processos podem induzir condições térmicas transientes no interior do sólido. Por exemplo, um sólido pode estar separado de uma grande vizinhança por um gás ou pelo vácuo. Se as temperaturas do sólido e da vizinhança forem diferentes, a troca de calor por radiação poderia causar uma variação na energia térmica interna do sólido e, assim, na sua temperatura. Mudanças na temperatura do sólido também poderiam ser induzidas pela aplicação de um fluxo térmico sobre a sua superfície ou parte dela, e/ou pelo início de um processo de geração de energia térmica no seu interior. O aquecimento da superfície

poderia, por exemplo, ser efetuado através da fixação de um aquecedor elétrico delgado sobre ela, enquanto a energia térmica poderia ser gerada pela passagem de uma corrente elétrica através do sólido.

A Fig. (1) mostra uma situação na qual as condições térmicas no interior de um sólido podem ser influenciadas simultaneamente pela convecção, pela radiação, pela aplicação de um fluxo em sua superfície e pela geração interna de energia. Considera-se que, no instante inicial ( $t = 0$ ), a temperatura do sólido ( $T_i$ ) é diferente daquelas do fluido,  $T_\infty$ , e da vizinhança,  $T_{viz}$ , e que tanto o aquecimento superficial quanto o aquecimento volumétrico ( $q_s''$  e  $\dot{q}$ ) são acionados.

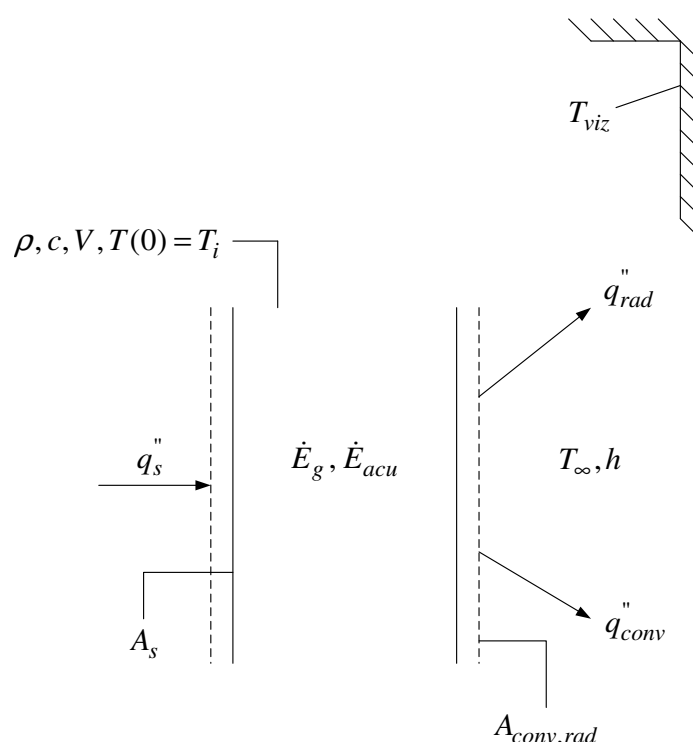


Figura 1 – Volume de controle para análise geral via capacidade concentrada.

O fluxo térmico imposto  $q_s''$  e as transferências de calor por convecção e radiação ocorrem em regiões da superfície exclusivas,  $A_s$ ,  $A_{conv}$  e  $A_{rad}$ . As transferências de calor por convecção e radiação são presumidas saindo da superfície. Além disso, embora as transferências de calor por convecção e radiação tenham sido especificadas na mesma superfície, as superfícies podem, na realidade, ser diferentes ( $A_{conv} \neq A_{rad}$ ). Aplicando a conservação da energia em qualquer instante  $t$  e utilizando a Fig. (1) obtém-se:

$$q_s'' A_s + \dot{E}_g - (q_{conv}'' + q_{rad}'') A_{conv,rad} = \rho V c \frac{dT}{dt} \quad (6)$$

Utilizando as equações das taxas de convecção e radiação pode-se reescrever a Eq. (6) na seguinte forma:

$$q_s'' A_s + \dot{E}_g - [h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_{viz}^4)] A_{conv,rad} = \rho V c \frac{dT}{dt} \quad (7)$$

A Eq. (7) é uma equação diferencial ordinária não-linear de primeira ordem, não-homogênea, que não pode ser integrada diretamente para obter-se uma solução exata. Contudo, soluções exatas podem ser obtidas para versões simplificadas dessa equação.

### 1.2.1-RESFRIAMENTO CONVECTIVO COM $h$ CONSTANTE

Nesse caso, a Eq. (7) é reescrita como:

$$-h(T - T_\infty) A_{conv} = \rho V c \frac{dT}{dt} \quad (8)$$

Definindo as variáveis

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (9)$$

$$\tau = \frac{h A_{conv}}{\rho V c} t \quad (10)$$

pode-se reescrever a Eq. (8) na seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \theta = 0 \quad (11)$$

Separando as variáveis na Eq. (11) e integrando de  $\theta = 1$  ( $T = T_i$ ) em  $\tau = 0$  ( $t = 0$ ) até  $\theta$  em  $\tau$  obtém-se:

$$\theta(\tau) = e^{-\tau} \quad (12)$$

O resultado da Eq. (12) indica que com o aumento de  $\tau$ ,  $\theta$  tende a zero, ou seja,  $T \rightarrow T_\infty$ , o que pode ser visto na Fig. (2):

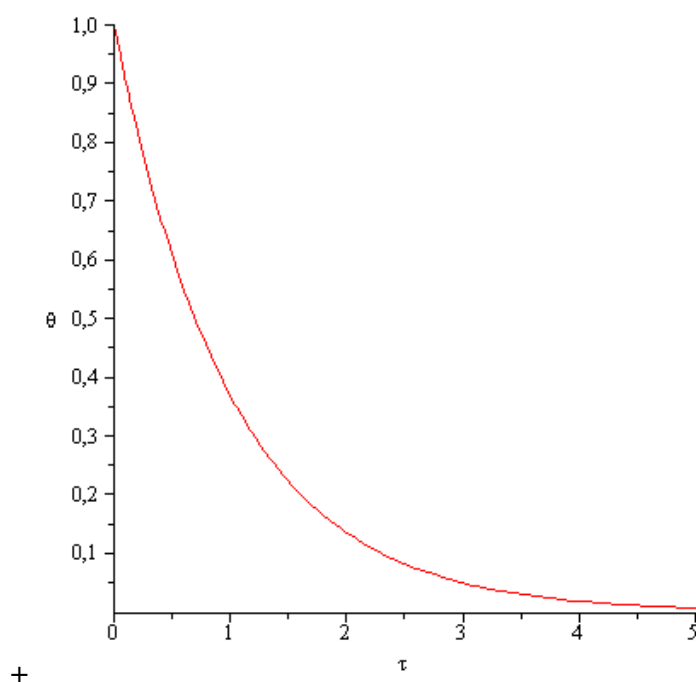


Figura 2 – Variação de  $\theta$  em função de  $\tau$ .

Pode ser calculada a quantidade de energia transferida do sólido para o meio desde o instante inicial até um instante  $t$  através da integração da taxa de calor por convecção ao longo do intervalo de tempo considerado, ou seja:

$$Q = \int_0^t hA_{conv} (T - T_\infty) dt \quad (13)$$

Utilizando os adimensionais das Eqs. (9-10) na Eq. (13) obtém-se:

$$\frac{Q}{\rho V c (T_i - T_\infty)} = \int_0^\tau \theta d\tau \quad (14)$$

Substituindo a Eq. (12) na Eq. (14) e resolvendo a integral obtém-se:

$$\frac{Q}{\rho V c (T_i - T_\infty)} = -e^\tau + 1 \quad (15)$$

O resultado da Eq. (15) indica que com o aumento de  $\tau$ ,  $\frac{Q}{\rho V c (T_i - T_\infty)}$  tende a um, o que pode ser visualizado na Fig. (3):

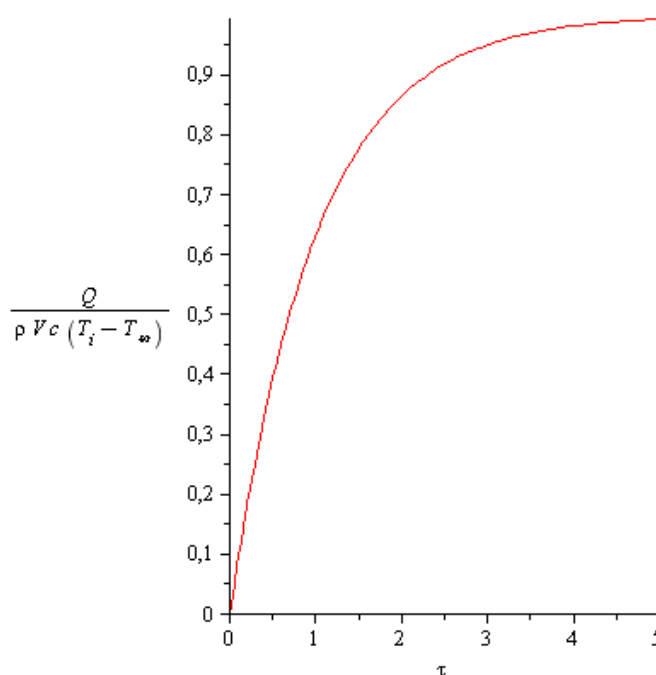


Figura 3 – Variação de  $\frac{Q}{\rho V c (T_i - T_\infty)}$  em função de  $\tau$ .

Os resultados desse modelo podem ser vistos na rotina EXEMPLO1.mw do MAPLE.

### 1.2.2-RESFRIAMENTO CONVECTIVO COM $h$ VARIÁVEL

Em alguns casos, tais como aqueles envolvendo convecção natural e ebulição, o coeficiente de transferência de calor  $h$  varia com a diferença de temperaturas entre o objeto e o fluido. Nessas situações, o coeficiente de convecção pode ser aproximado por uma expressão na forma:

$$h = C(T - T_{\infty})^n \quad (16)$$

onde  $n$  é uma constante e  $C$  tem unidades de  $W/(m^2.K^{(1+n)})$ . Por exemplo, para ar em contato com uma superfície vertical,  $C = 0,59$  e  $n = 1/4$  para convecção natural laminar e  $C = 0,10$  e  $n = 1/3$  para convecção natural turbulenta. Substituindo a Eq. (16) na Eq. (8) e rearranjando obtém-se:

$$-CA_{conv}(T - T_{\infty})^{n+1} = \rho Vc \frac{dT}{dt} \quad (17)$$

Além da Eq. (9), definindo as variáveis

$$\tau = \frac{h_i A_{conv}}{\rho Vc} t \quad (18)$$

$$h_i = C(T_i - T_{\infty})^n \quad (19)$$

pode-se reescrever a Eq. (17) na seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \theta^{n+1} = 0 \quad (20)$$

Separando as variáveis na Eq. (20) e integrando de  $\theta = 1$  ( $T = T_i$ ) em  $\tau = 0$  ( $t = 0$ ) até  $\theta$  em  $\tau$  obtém-se:

$$\theta(\tau) = (1 + m\tau)^{-1/n} \quad (21)$$

O resultado da Eq. (21) indica que com o aumento de  $\tau$ ,  $\theta$  tende a zero, ou seja,  $T \rightarrow T_{\infty}$ , o que pode ser visto na Fig. (4) para diferentes valores de  $n$ . Os resultados desse modelo podem ser vistos na rotina EXEMPLO2.mw do MAPLE.

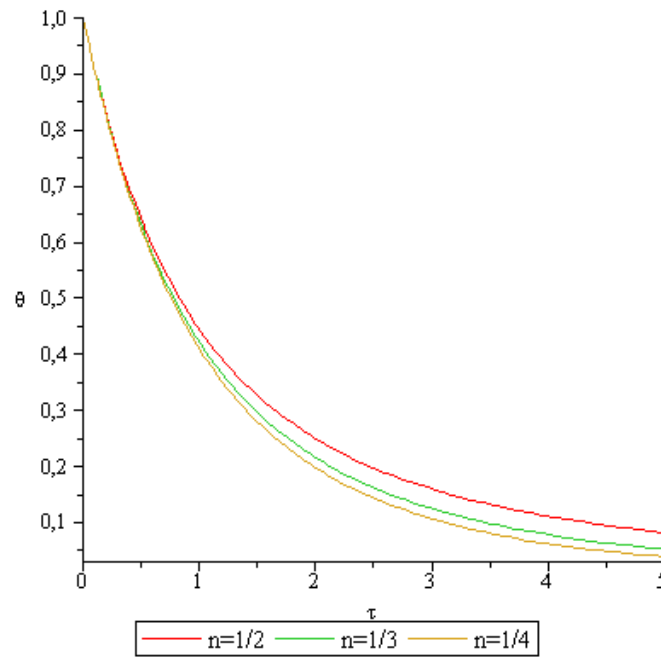


Figura 4 – Variação de  $\theta$  em função de  $\tau$  para diferentes valores de  $n$ .

### 1.2.3-RESFRIAMENTO CONVECTIVO COM $c$ VARIÁVEL

Em diversos casos, pode-se utilizar uma expressão analítica linear para a variação do calor específico de um sólido com a temperatura, ou seja:

$$c = c_{\infty}[1 + \beta(T - T_{\infty})] \quad (22)$$

onde  $c_{\infty}$  é o calor específico avaliado em  $T_{\infty}$  e  $\beta$  é um coeficiente que representa a inclinação da reta num gráfico calor específico-temperatura dividido por  $c_{\infty}$ . Substituindo a Eq. (22) na Eq. (8) obtém-se:

$$-hA_{conv}(T - T_{\infty}) = \rho V c_{\infty}[1 + \beta(T - T_{\infty})] \frac{dT}{dt} \quad (23)$$

Além da Eq. (9), definindo as variáveis

$$\tau = \frac{hA_{conv}}{\rho V c_{\infty}} t \quad (24)$$

$$a = \beta(T_i - T_\infty) \quad (25)$$

pode-se reescrever a Eq. (23) na seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\theta}{1+a\theta} = 0 \quad (26)$$

Separando as variáveis na Eq. (26) e integrando de  $\theta = 1$  ( $T = T_i$ ) em  $\tau = 0$  ( $t = 0$ ) até  $\theta$  em  $\tau$  obtém-se a seguinte expressão na forma implícita:

$$-\ln\theta + a(\theta - 1) = \tau \quad (27)$$

O resultado da Eq. (27) indica que quando  $\theta$  tende a um,  $\tau$  tende ao infinito, como era de se esperar, o que pode ser visto na Fig. (5) para diferentes valores de  $a$ :

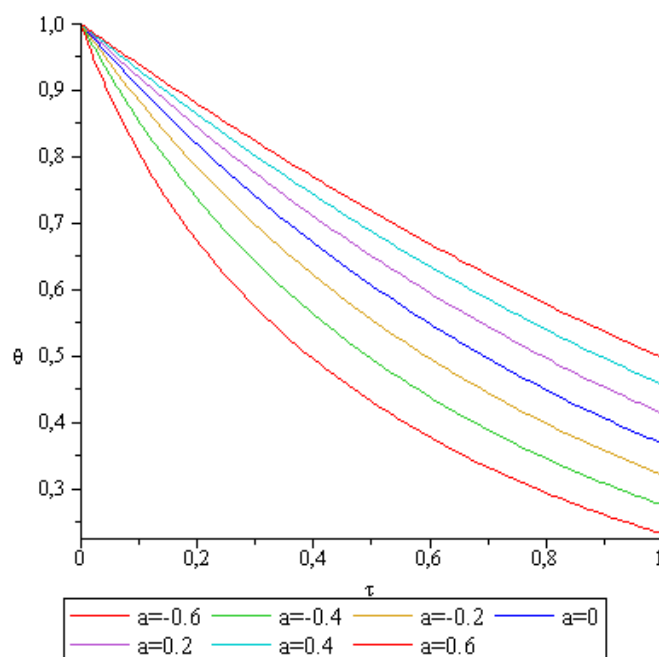


Figura 5 – Variação de  $\theta$  em função de  $\tau$  para diferentes valores de  $a$ .

Os resultados desse modelo podem ser vistos na rotina EXEMPLO3.mw do MAPLE.

#### 1.2.4-RESFRIAMENTO RADIATIVO

Nesse caso, a Eq. (7) é reescrita como:

$$-\varepsilon\sigma(T^4 - T_{viz}^4)A_{rad} = \rho Vc \frac{dT}{dt} \quad (28)$$

Definindo as variáveis

$$\theta = \frac{T}{T_{viz}} \quad (29)$$

$$\tau = \frac{\varepsilon\sigma A_{rad} T_{viz}^3}{\rho Vc} t \quad (30)$$

pode-se reescrever a Eq. (28) na seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \theta^4 - 1 = 0 \quad (31)$$

Separando as variáveis na Eq. (31), pode-se integrar de uma temperatura inicial  $\theta_i = T_i/T_{viz}$  em  $\tau = 0$  ( $t = 0$ ) até  $\theta$  em  $\tau$ , ou seja:

$$\int_0^\tau d\tau = \int_{\theta_i}^\theta \frac{d\theta}{1 - \theta^4} \quad (32)$$

A integral do lado direito da Eq. (32) pode ser resolvida pela técnica das frações parciais, cujo resultado é escrito como:

$$\tau = \frac{1}{4} \left[ \ln \left| \frac{\theta + 1}{\theta - 1} \right| - \ln \left| \frac{\theta_i + 1}{\theta_i - 1} \right| + 2(\tan^{-1} \theta - \tan^{-1} \theta_i) \right] \quad (33)$$

Deve ser notado que não é possível explicitar  $\theta$  em função de  $\tau$  a partir da Eq. (33).

### 1.2.5-SEM RADIAÇÃO E CONVECÇÃO COM $h$ CONSTANTE

Nesse caso a Eq. (7) é reescrita como:

$$q_s'' A_s + \dot{E}_g - h(T - T_\infty) A_{conv} = \rho V c \frac{dT}{dt} \quad (34)$$

Além das Eqs. (9-10), definindo a variável

$$a = \frac{q_s'' A_s + \dot{E}_g}{h A_{conv} (T_i - T_\infty)} \quad (35)$$

pode-se reescrever a Eq. (34) na seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \theta = a \quad (35)$$

Embora a Eq. (35) possa ser resolvida pela soma das suas soluções homogênea e particular, uma abordagem alternativa é eliminar a não-homogeneidade pela introdução da transformação

$$\theta' = \theta - a \quad (36)$$

de tal forma que a Eq. (35) é reescrita como:

$$\frac{d\theta'}{d\tau} + \theta' = 0 \quad (37)$$

Separando as variáveis na Eq. (37), pode-se integrar de uma temperatura inicial  $\theta'_i$  em  $\tau = 0$  ( $t = 0$ ) até  $\theta'$  em  $\tau$ , ou seja:

$$\frac{\theta'}{\theta'_i} = \exp(-\tau) \quad (38)$$

Substituindo a definição de  $\theta'$  obtém-se:

$$\frac{\theta - a}{\theta_i - a} = \exp(-\tau) \quad (39)$$

Deve ser notado que a Eq. (39) também se aplica aos casos onde  $q_s'' = 0$ ,  $\dot{E}_g = 0$  ou  $q_s'' = \dot{E}_g = 0$ . Nesse último caso,  $a = 0$  e a Eq. (39) é simplificada para:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \exp(-\tau) \quad (40)$$

#### EXEMPLO 1 – CONDUÇÃO TRANSIENTE EM UMA MOEDA DESLIZANTE

Uma moeda com raio  $r_o$  e espessura  $\delta$  está em repouso em um plano inclinado e em equilíbrio térmico com o ambiente à  $T_\infty$  e coeficiente de transferência de calor  $h$ . A moeda é colocada em movimento e começa a deslizar pelo plano. A força de atrito  $F_f$  é assumida constante e a velocidade da moeda varia com o tempo de acordo com a expressão  $V = ct$ , onde  $c$  é uma constante. Devido às variações de velocidade, o coeficiente de transferência de calor por convecção varia com o tempo de acordo com a expressão  $h = \beta t$ , onde  $\beta$  é uma constante. Assumindo que o número de Biot é baixo comparado com a unidade e desprezando a perda de calor para o plano, determine a distribuição de temperaturas transiente na moeda.

**(1) Observações:** (1) como o número de Biot é pequeno quando comparado com a unidade, pode-se utilizar o método da capacidade concentrada para determinar a temperatura transiente, (2) a lei de Newton do resfriamento descreve a convecção na superfície. Entretanto, nesse problema o coeficiente de transferência de calor é dependente da temperatura e (3) energia é adicionada a moeda na interface devido ao atrito. Essa energia também é dependente do tempo pois a velocidade de deslizamento é variável.

## (2) Formulação

(i) **Hipóteses.** (1) o número de Biot é pequeno quando comparado com a unidade, (2) propriedades constantes, (3) temperatura ambiente constante, (4) toda a energia térmica gerada pelo atrito é adicionado a moeda, (5) sem geração interna de energia e (6) sem radiação térmica.

(ii) **Equações governantes.** Aplicando um balanço de energia na moeda sujeito às hipóteses mencionadas anteriormente fornece que:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s = \dot{E}_{acu} \quad (41)$$

A taxa de energia adicionada devido ao efeito do atrito pode ser calculada como:

$$\dot{E}_e = F_f V = F_f c t \quad (42)$$

A taxa de energia que deixa a moeda por convecção pode ser calculada pela lei de Newton do resfriamento:

$$\dot{E}_s = (\pi r_o^2 + 2\pi r_o \delta) h (T - T_\infty) = \beta (\pi r_o^2 + 2\pi r_o \delta) (T - T_\infty) t \quad (43)$$

A taxa de energia acumulada na moeda pode ser calculada como:

$$\dot{E}_{acu} = \rho (\pi r_o^2 \delta) c_p \frac{dT}{dt} \quad (44)$$

Substituindo as Eqs. (42-44) na Eq. (41) obtém-se:

$$F_f c t - \beta (\pi r_o^2 + 2\pi r_o \delta) (T - T_\infty) t = \rho (\pi r_o^2 \delta) c_p \frac{dT}{dt} \quad (45)$$

(iii) **Condição inicial.** A condição inicial para a solução da Eq. (45) é

$$T(0) = T_\infty \quad (46)$$

**(3) Solução.** Separando as variáveis na Eq. (45), integrando e usando a Eq. (46) tem-se:

$$\int_0^t dt = \rho(\pi r_o^2 \delta) c_p \int_{T_\infty}^T \frac{dT}{F_f c - \beta(\pi r_o^2 + 2\pi r_o \delta)(T - T_\infty)} \quad (47)$$

Realizando a integração e rearranjando o resultado obtém-se:

$$\frac{T(t) - T_\infty}{\frac{F_f c}{\beta r_o^2 (1 + 2\delta/r_o)}} = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 - e^{-\left[ \frac{\beta(1 + 2\delta/r_o)}{2\rho c_p \delta} \right] t^2} \right\} \quad (48)$$

**(4) Comentários.** Como tanto a energia devido ao atrito e a perda de calor devido à convecção são diretamente proporcionais ao tempo  $t$ , a moeda deve alcançar o regime permanente em  $t = \infty$ . Substituindo  $t = \infty$  na Eq. (48) obtém-se:

$$\frac{T(t = \infty) - T_\infty}{\frac{F_f c}{\beta r_o^2 (1 + 2\delta/r_o)}} = \frac{1}{\pi} \quad (49)$$

## EXEMPLO 2 – CONDUÇÃO TRANSIENTE DEVIDO À RADIAÇÃO TÉRMICA

Antes de ser injetado no interior de uma fornalha, carvão pulverizado a uma temperatura inicial de 25 °C é preaquecido com a sua passagem através de um duto cilíndrico cuja superfície é mantida a  $T_{viz} = 1000$  °C. As partículas de carvão ficam suspensas no escoamento do ar e se movem a uma velocidade de 3 m/s. Aproximando as partículas por esferas com 1 mm de diâmetro e supondo que elas sejam aquecidas por transferência radiante com a superfície do duto, qual deve ser o comprimento do duto para que o carvão seja aquecido até 600 °C? Assuma que o número de Biot é baixo comparado com a unidade. As propriedades do carvão pulverizado são:  $\rho = 1350 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 1260 \text{ J/kg.K}$ ,  $k = 0,26 \text{ W/m.K}$  e  $\varepsilon = 1$ .

**(1) Observações:** (1) como o número de Biot é pequeno quando comparado com a unidade, pode-se utilizar o método da capacidade concentrada para determinar a temperatura transiente e (2) a lei de Stefan-Boltzmann descreve a troca de calor por radiação térmica entre o carvão e a vizinhança.

## **(2) Formulação**

**(i) Hipóteses.** (1) o número de Biot é pequeno quando comparado com a unidade, (2) propriedades constantes, (3) temperatura da vizinhança constante, (4) a única troca de calor relevante é por radiação térmica, (5) sem geração interna de energia e (6) sem convecção térmica.

**(ii) Equações governantes.** A formulação desse problema é dada pela Eq. (33), ou seja:

$$\tau = \frac{1}{4} \left[ \ln \left| \frac{\theta + 1}{\theta - 1} \right| - \ln \left| \frac{\theta_i + 1}{\theta_i - 1} \right| + 2(\tan^{-1} \theta - \tan^{-1} \theta_i) \right] \quad (50)$$

As temperaturas adimensionais da Eq. (50) são calculadas como:

$$\theta = \frac{T}{T_{viz}} = \frac{600 + 273}{1000 + 273} = 0,686 \quad (51)$$

$$\theta_i = \frac{T_i}{T_{viz}} = \frac{25 + 273}{1000 + 273} = 0,234 \quad (52)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (51-52) na Eq. (50) obtém-se:

$$\tau = \frac{1}{4} \left[ \ln \left| \frac{0,686 + 1}{0,686 - 1} \right| - \ln \left| \frac{0,234 + 1}{0,234 - 1} \right| + 2(\tan^{-1} 0,686 - \tan^{-1} 0,234) \right] = 0,487 \quad (53)$$

A relação volume-área superficial é calculada como:

$$\frac{V}{A_s} = \frac{\pi D^3/6}{\pi D^2} = \frac{D}{6} = \frac{1 \times 10^{-3}}{6} = 1,667 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (54)$$

Substituindo o resultado das Eq. (53-54) na Eq. (30) obtém-se:

$$0,487 = \frac{1,05,67 \times 10^{-8} \cdot 1273^3}{1350 \cdot 1,667 \times 10^{-4} \cdot 1260} t \Rightarrow t = 1,18 \text{ s} \quad (55)$$

O comprimento do duto é então:

$$L = V \times t = 3 \times 1,18 = 3,54 \text{ m}$$

**(3) Comentários.** A validade do método da capacidade concentrada requer que  $Bi = h(V/A_s)/k \leq 0,1$ . Utilizando a Eq. (3) com  $h = h_r$  e  $V/A_s = D/6$  obtém-se que quando  $T = 600^\circ\text{C}$ ,  $Bi = 0,19$ ; mas quando  $T = 25^\circ\text{C}$ ,  $Bi = 0,10$ . No início, quando o carvão está mais frio, a hipótese da capacidade concentrada é razoável mas torna-se menos apropriada conforme o carvão é aquecido.

## 2-EFEITOS ESPACIAIS

Com frequência surgem situações nas quais o método da capacidade concentrada é inadequado e abordagens alternativas devem ser utilizadas. Independentemente do método a ser considerado, agora devemos reconhecer que os gradientes de temperaturas no interior do meio não são mais desprezíveis. Nas suas formas mais gerais, os problemas de condução de calor transientes são descritos pelas equações de condução, Eqs. (41, 65) e (87) do Cap. (1) para coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas, respectivamente.

As soluções dessas equações diferenciais parciais fornecem a variação da temperatura com o tempo e com as coordenadas espaciais. Entretanto, em muitos problemas, somente uma coordenada espacial é necessária para descrever a distribuição interna de temperaturas. A seguir serão mostradas as soluções dessas equações diferenciais parciais na condição de condução unidimensional transiente, sem geração interna de energia e com condutividade térmica constante.

### 2.1-A PAREDE PLANA COM CONVECÇÃO

A formulação do problema mostrado na Fig. (6) é escrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (56)$$

$$T(x,0) = T_i \quad (57)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (58)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h[T(L,t) - T_\infty] \quad (59)$$

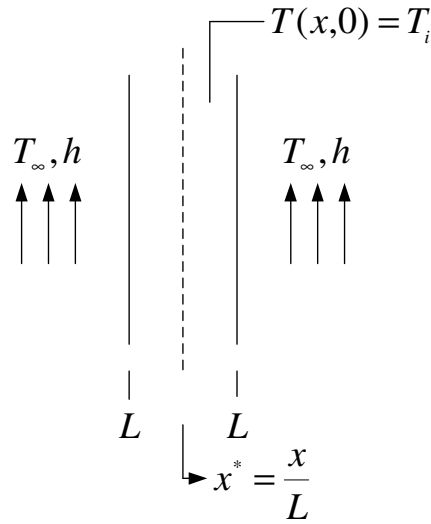


Figura 6 – Parede plana unidimensional com temperatura inicial uniforme submetida subitamente a condições convectivas.

As Eqs. (56-59) podem ser adimensionalizadas através das seguintes variáveis adimensionais:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (60)$$

$$x^* = \frac{x}{L} \quad (61)$$

$$\tau^* = \frac{\alpha t}{L^2} = Fo \quad (62)$$

Substituindo as Eqs. (60-62) nas Eqs. (56-59) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo} \quad (63)$$

$$\theta^*(x^*, 0) = 1 \quad (64)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0 \quad (65)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -Bi \theta^*(1, t^*) \quad (66)$$

onde  $Bi = (hL)/k$ . Deve ser notado que a adimensionalização tornou a direção  $x$  homogênea.

### 2.1.1-SOLUÇÃO EXATA

Pelo método da separação de variáveis, quer-se que a solução da Eq. (63) seja da seguinte forma:

$$\theta^*(x^*, Fo) = X(x^*)\tau(Fo) \quad (67)$$

Substituindo a Eq. (67) na Eq. (63), fazendo as derivadas, multiplicando o resultado por  $1/(X\tau)$  e igualando o resultado a uma constante obtém-se:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial Fo} = \pm \lambda_n^2 \quad (68)$$

Na Eq. (68) deve ser notado que os dois primeiros termos devem ter o mesmo sinal da constante  $\lambda_n^2$ . Nesse caso, o sinal negativo satisfaz a condição de que a equação

diferencial da direção homogênea deve ter o sinal positivo no termo que acompanha a constante  $\lambda_n^2$ . A Eq. (68) é então reescrita como:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^{*2}} + \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (69)$$

$$\frac{d\tau_n}{dFo} + \lambda_n^2 \tau_n = 0 \quad (70)$$

A Eq. (69) pode ser resolvida pela técnica da equação característica enquanto a Eq. (70) pode ser resolvida diretamente por integração, cujos resultados são:

$$X_n(x^*) = A_n \sin(\lambda_n x^*) + B_n \cos(\lambda_n x^*) \quad (71)$$

$$\tau_n(Fo) = D_n \exp(-\lambda_n^2 Fo) \quad (72)$$

A solução completa da Eq. (63) é então escrita como:

$$\theta^*(x^*, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x^*) \tau_n(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(\lambda_n x^*) + B_n \cos(\lambda_n x^*)] [D_n \exp(-\lambda_n^2 Fo)] \quad (73)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (65) obtém-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta_n^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} &= \left. \frac{\partial [X_n(x^*) \tau_n(Fo)]}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = \tau_n(Fo) \left. \frac{\partial [X_n(x^*)]}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = \\ &= \underbrace{\tau_n(Fo)}_{\neq 0} \underbrace{\lambda_n}_{\neq 0} [A_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1} - B_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0}] = 0 \Rightarrow A_n = 0 \quad (74) \end{aligned}$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (66) e substituindo o resultado da Eq. (74) obtém-se:

$$\left. \frac{\partial \theta_n^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = \left. \frac{\partial [X_n(1) \tau_n(Fo)]}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = \tau_n(Fo) \left. \frac{\partial [X_n(1)]}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -\tau_n(Fo) \lambda_n B_n \sin(\lambda_n 1) =$$

$$-Bi\theta^*(1,t^*) = -Bi\tau_n(Fo)B_n \cos(\lambda_n 1)$$

$$\lambda_n \tan(\lambda_n) = Bi \quad (75)$$

A Eq. (75) é uma equação transcendental que fornece os infinitos valores de  $\lambda_n$  em função do número de Biot. O comportamento gráfico da Eq. (75) pode ser visto na Fig. (7) para diferentes números de Biot:

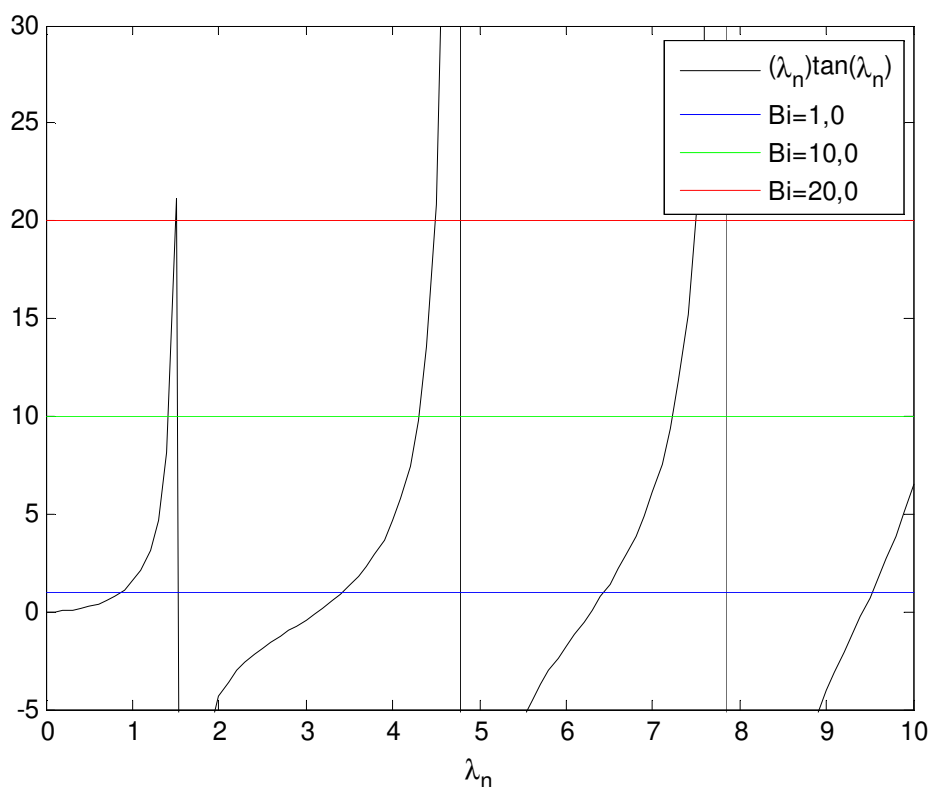


Figura 7 – Representação gráfica da Eq. (60) para diferentes números de Biot.

Na Tab. (1) podem ser vistas as quatro primeiras raízes da Eq. (60) para diferentes número de Biot, e a rotina de cálculos pode ser vista no arquivo EXEMPLO4.mw do MAPLE.

Substituindo a Eq. (74) na Eq. (73) obtém-se:

$$\theta^*(x^*, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n x^*) \exp(-\lambda_n^2 Fo) \quad (76)$$

Tabela 1 – Quatro primeiras raízes da Eq. (75).

| $Bi = hL/k$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0,001       | 0,0316      | 3,1419      | 6,2833      | 9,4248      |
| 0,01        | 0,0998      | 3,1447      | 6,2847      | 9,4258      |
| 0,1         | 0,3110      | 3,1730      | 6,2990      | 9,4353      |
| 1,0         | 0,8603      | 3,4256      | 6,4372      | 9,5293      |
| 10,0        | 1,4288      | 4,3058      | 7,2281      | 10,2002     |
| 100,0       | 1,5552      | 4,6657      | 7,7763      | 10,8871     |

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (64) obtém-se:

$$\theta^*(x^*, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n x^*) \exp(-\lambda_n^2 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n x^*) = 1 \quad (77)$$

onde  $C_n = B_n D_n$ . Ortogonalidade é utilizada para se determinar  $C_n$ . A função  $\phi_n(x^*) = \cos(\lambda_n x^*)$  na Eq. (77) é a solução da Eq. (69). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (77) somente se a Eq. (69) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $x^* = 0$  e  $x^* = 1$  foram homogêneas. Comparando a Eq. (69) com a equação de Sturm-Liouville obtém-se que  $w(x^*) = 1$ . Tem-se que  $\phi_n(x^*)$  e  $\phi_m(x^*)$  são ortogonais com relação a função peso  $w(x^*) = 1$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (77) por  $w(x^*) \cos(\lambda_m x^*) dx^*$  e integrando de  $x^* = 0$  a  $x^* = 1$  obtém-se:

$$\int_0^1 \cos(\lambda_m x^*) w(x^*) dx^* = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n x^*) \cos(\lambda_m x^*) w(x^*) dx^* \quad (78)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que  $w(x^*) = 1$  pode-se reescrever a Eq. (78) como:

$$\int_0^1 \cos(\lambda_m x^*) dx^* = C_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \cos(\lambda_n x^*) \cos(\lambda_m x^*) dx^* \quad (79)$$

De acordo com o princípio da ortogonalidade, a integral do lado direito da Eq. (79) é nula quando  $m \neq n$ . Assim, todas as integrais que surgem devido ao sinal de somatório são nulas, exceto quando  $m = n$ . A Eq. (79) pode então ser reescrita para  $C_n$  como:

$$C_n = \frac{\int_0^1 \cos(\lambda_n x^*) dx^*}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n x^*) dx^*} \quad (80)$$

A solução das integrais da Eq. (80) é escrita como:

$$\int_0^1 \cos(\lambda_n x^*) dx^* = \frac{\sin(\lambda_n)}{\lambda_n} \quad (81)$$

$$\int_0^1 \cos^2(\lambda_n x^*) dx^* = \frac{1}{\lambda_n} \left[ \frac{\sin(2\lambda_n)}{4} + \frac{\lambda_n}{2} \right] \quad (82)$$

Substituindo as Eqs. (81-82) na Eq. (80) e rearranjando obtém-se:

$$C_n = \frac{4 \sin(\lambda_n)}{2 \lambda_n + \sin(2 \lambda_n)} \quad (83)$$

### 2.1.2-SOLUÇÃO APROXIMADA

Pode-se demonstrar que, para valores de  $Fo < 0,2$ , a solução em série infinita, Eq. (76), pode ser aproximada pelo primeiro termo da série. Utilizando essa aproximação e definindo  $\theta_o^* = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo)$ , a forma adimensional da distribuição de temperaturas é reescrita como:

$$\theta^*(x^*, Fo) = C_1 \cos(\lambda_1 x^*) \exp(-\lambda_1^2 Fo) = \theta_o^* \cos(\lambda_1 x^*) \quad (84)$$

$$\lambda_1 \tan(\lambda_1) = Bi \quad (85)$$

$$C_1 = \frac{4 \sin(\lambda_1)}{2\lambda_1 + \sin(2\lambda_1)} \quad (86)$$

### 2.1.3-TRANSFERÊNCIA TOTAL DE ENERGIA

Em diversas situações de engenharia, é útil conhecer a quantidade de energia total que deixou (ou entrou) a parede até um dado tempo  $t$  em um processo transiente. A exigência da conservação da energia na forma diferencial pode ser aplicada no intervalo de tempo delimitado pela condição inicial ( $t = 0$ ) e por qualquer tempo  $t > 0$ , ou seja:

$$-dE_s = d(\Delta E_{acu}) \quad (87)$$

Igualando a quantidade de energia transferida a partir da parede como sendo  $\delta Q = dE_s$  e estabelecendo que  $d(\Delta E_{acu}) = dE(x, t) - dE(x, 0)$  pode-se reescrever a Eq. (87) como:

$$\delta Q = -[dE(x, t) - dE(x, 0)] \quad (88)$$

Desprezando variações de energia cinética e potencial, a variação da energia total da parede na Eq. (88) pode ser reescrita em termos da variação da energia interna específica da parede plana, ou seja:

$$dE(x, t) - dE(x, 0) = dU(x, t) - dU(x, 0) = (dm)[u(x, t) - u(x, 0)] \quad (89)$$

Além disso, como a parede plana é um meio incompressível, a variação de energia interna específica é igual ao produto entre o calor específico do material da parede plana (considerado constante) e sua variação de temperatura, ou seja:

$$dE(x, t) - dE(x, 0) = (dm)c[T(x, t) - T(x, 0)] \quad (90)$$

Finalmente, sabendo que  $dm = \rho dV$  e que  $T(x, 0) = T_i$ , pode-se reescrever a Eq. (90) e igualar com a Eq. (88), fornecendo que:

$$\delta Q = -\rho c [T(x,t) - T_i] dV \quad (91)$$

A quantidade total de energia transferida é obtida pela integração da Eq. (91) ao longo do volume da parede plana, ou seja:

$$Q = -\int \rho c [T(x,t) - T_i] dV \quad (92)$$

É conveniente adimensionalizar a Eq. (92) pela introdução da grandeza:

$$Q_o = \rho c (T_i - T_\infty) V \quad (93)$$

de tal forma que:

$$\frac{Q}{Q_o} = -\frac{\int \rho c [T(x,t) - T_i] dV}{\rho c (T_i - T_\infty) V} = \frac{1}{V} \int -\left[ \frac{T(x,t) - T_i}{T_i - T_\infty} \right] dV \quad (94)$$

A grandeza  $Q_o$  pode ser interpretada como a energia interna inicial da parede plana com relação à temperatura do fluido. De maneira alternativa  $Q_o$  também pode ser interpretada como a máxima transferência de energia que ocorreria entre a parede plana e o fluido se o processo se estendesse até  $t = \infty$ . Pode-se utilizar a Eq. (60) para expressar o termo entre colchetes da Eq. (94), ou seja:

$$\theta^* = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T(x,t) - T_i + T_i - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T(x,t) - T_i}{T_i - T_\infty} + 1 \Rightarrow -\left[ \frac{T(x,t) - T_i}{T_i - T_\infty} \right] = 1 - \theta^* \quad (95)$$

Substituindo a Eq. (95) na Eq. (94), fazendo  $V = AL$ ,  $dV = A dx$  e rearranjando obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = \frac{1}{L} \int (1 - \theta^*) dx \quad (96)$$

Substituindo a Eq. (84) na Eq. (96), sabendo que  $dx = Ldx^*$  e que nesse caso os limites de integração são de  $x^* = 0$  a  $x^* = 1$  obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int_0^1 [1 - \theta_o^* \cos(\lambda_1 x^*)] dx^* \quad (97)$$

Resolvendo a integral da Eq. (97) obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1} \theta_o^* \quad (98)$$

Uma rotina de cálculos pode ser vista no arquivo EXEMPLO5.mw do MAPLE. Deve ser ressaltado que a quantidade de energia transferida da parede plana para o fluido pode também ser determinada a partir da solução exata através de um balanço de energia na interface, fornecendo o seguinte resultado:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int_0^{Fo} \frac{\partial \theta^*(1, Fo)}{\partial x^*} dFo \quad (99)$$

Na rotina do EXEMPLO5.mw, a quantidade de energia transferida foi determinada a partir da Eq. (99), e não a partir da Eq. (98). Isso garante a utilização da solução exata, Eq. (76) para o cálculo da quantidade total de energia transferida entre a parede e o fluido dentro do intervalo de tempo considerado.

## 2.2-O CILINDRO LONGO COM CONVECÇÃO

A formulação do problema mostrado na Fig. (8) é escrita como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (100)$$

$$T(r, 0) = T_i \quad (101)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (102)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_o} = h[T(r_o, t) - T_\infty] \quad (103)$$

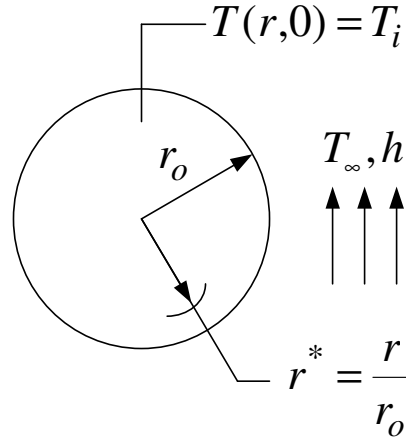


Figura 8 – Cilindro longo unidimensional com temperatura inicial uniforme submetido subitamente a condições convectivas.

As Eqs. (100-103) podem ser adimensionalizadas através das seguintes variáveis adimensionais:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (104)$$

$$r^* = \frac{r}{r_o} \quad (105)$$

$$\tau^* = \frac{\alpha t}{r_o^2} = Fo \quad (106)$$

Substituindo as Eqs. (104-106) nas Eqs. (100-103) obtém-se:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo} \quad (107)$$

$$\theta^*(r^*, 0) = 1 \quad (108)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (109)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = -\text{Bi} \theta^*(1, t^*) \quad (110)$$

onde  $\text{Bi} = (hr_o)/k$ . Deve ser notado que a adimensionalização tornou a direção  $r$  homogênea.

### 2.2.1-SOLUÇÃO EXATA

Pelo método da separação de variáveis, quer-se que a solução da Eq. (107) seja da seguinte forma:

$$\theta^*(r^*, Fo) = R(r^*)\tau(Fo) \quad (111)$$

Substituindo a Eq. (111) na Eq. (107), fazendo as derivadas, multiplicando o resultado por  $1/(R\tau)$  e igualando o resultado a uma constante obtém-se:

$$\frac{1}{Rr^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial R^*}{\partial r^*} \right) = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial Fo} = \pm \lambda_k^2 \quad (112)$$

Na Eq. (112) deve ser notado que os dois primeiros termos devem ter o mesmo sinal da constante  $\lambda_k^2$ . Nesse caso, o sinal negativo satisfaz a condição de que a equação diferencial da direção homogênea deve ter o sinal positivo no termo que acompanha a constante  $\lambda_k^2$ . A Eq. (112) é então reescrita como:

$$r^{*2} \frac{d^2 R_k}{dr^{*2}} + r^* \frac{dR_k}{dr^*} + \lambda_k^2 R_k r^{*2} = 0 \quad (113)$$

$$\frac{d\tau_k}{dFo} + \lambda_k^2 \tau_k = 0 \quad (114)$$

A Eq. (113) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da equação geral de Bessel, conforme Apêndice. Comparando a Eq. (113) com a Eq. (15) do Apêndice obtém-se os seguintes coeficientes:  $A=0$ ,  $B=0$ ,  $C=1$ ,  $D=\lambda_k$  e  $n=0$ . Esses resultados indicam o CASO 1 do Apêndice, cuja solução geral é dada pela Eq. (16) do , ou seja:

$$R_k(r^*) = A_k J_0(\lambda_k r^*) + B_k Y_0(\lambda_k r^*) \quad (115)$$

A Eq. (114) pode ser resolvida diretamente por integração, cujo resultado é:

$$\tau_k(For) = D_k \exp(-\lambda_k^2 For) \quad (116)$$

A solução completa da Eq. (107) é então escrita como:

$$\theta^*(r^*, For) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r^*) \tau_k(For) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k J_0(\lambda_k r^*) + B_k Y_0(\lambda_k r^*)] [D_k \exp(-\lambda_k^2 For)] \quad (117)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (109) obtém-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta_k^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} &= \left. \frac{\partial [R_k(r^*) \tau_k(For)]}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = \tau_k(For) \left. \frac{\partial [R_k(r^*)]}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = \\ &= \underbrace{\tau_k(For)}_{\neq 0} \underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} [-A_k \underbrace{J_1(\lambda_k 0)}_{=0} - B_k \underbrace{Y_1(\lambda_k 0)}_{=-\infty}] = 0 \Rightarrow B_k = 0 \end{aligned} \quad (118)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (110) e substituindo o resultado da Eq. (118) obtém-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} &= \left. \frac{\partial [R_k(1) \tau_k(For)]}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \tau_k(For) \left. \frac{\partial [R_k(1)]}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = -\tau_k(For) \lambda_k A_k J_1(\lambda_k 1) = \\ &= -Bi \theta^*(1, t^*) = -Bi \tau_k(For) A_k J_0(\lambda_k 1) \end{aligned}$$

$$\lambda_k \frac{J_1(\lambda_k)}{J_0(\lambda_k)} = \text{Bi} \quad (119)$$

A Eq. (119) é uma equação transcendental que fornece os infinitos valores de  $\lambda_k$  em função do número de Biot. O comportamento gráfico da Eq. (119) pode ser visto na Fig. (9) para diferentes números de Biot. Já na Tab. (2) podem ser vistas as quatro primeiras raízes da Eq. (119) para diferentes número de Biot, e a rotina de cálculos pode ser vista no arquivo EXEMPLO6.mw do MAPLE:

Tabela 2 – Quatro primeiras raízes da Eq. (104).

| $\text{Bi} = hr_o/k$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0,1                  | 0,4416      | 3,8577      | 7,0298      | 10,1832     |
| 1,0                  | 1,2557      | 4,0794      | 7,1557      | 10,2709     |
| 2,5                  | 1,7060      | 4,3818      | 7,3507      | 10,4117     |
| 5,0                  | 1,9898      | 4,7131      | 7,6177      | 10,6223     |

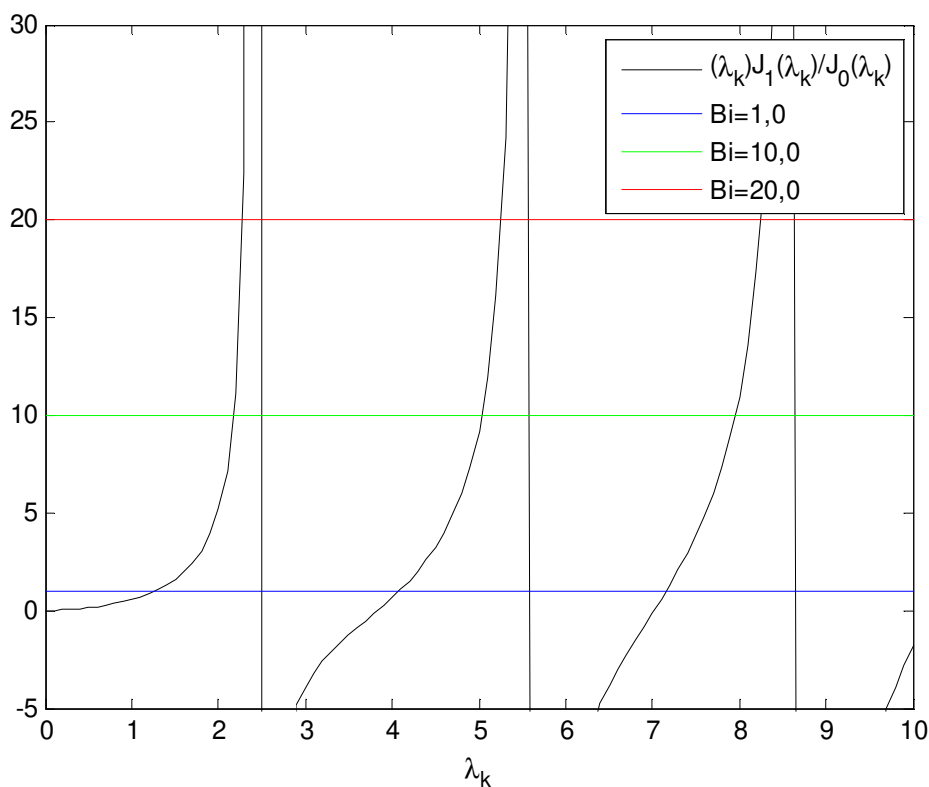


Figura 9 – Representação gráfica da Eq. (119) para diferentes números de Biot.

Substituindo a Eq. (118) na Eq. (117) obtém-se:

$$\theta^*(r^*, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r^*) \tau_k(Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\lambda_k r^*) D_k \exp(-\lambda_k^2 Fo) \quad (120)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (108) obtém-se:

$$\theta^*(r^*, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\lambda_k r^*) D_k \exp(-\lambda_k^2 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k r^*) = 1 \quad (121)$$

onde  $C_k = A_k D_k$ . Ortogonalidade é utilizada para determinar  $C_k$ . A função  $\phi_k(r^*) = J_0(\lambda_k r^*)$  na Eq. (121) é a solução da Eq. (113). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (121) somente se a Eq. (113) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $r^* = 0$  e  $r^* = 1$  foram homogêneas. Comparando a Eq. (113) com a equação de Sturm-Liouville obtém-se que  $w(r^*) = r^*$ . Tem-se que  $\phi_k(r^*)$  e  $\phi_i(r^*)$  são ortogonais com relação a função peso  $w(r^*) = r^*$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (121) por  $w(r^*) J_0(\lambda_i r^*) dr^*$  e integrando de  $r^* = 0$  a  $r^* = 1$  obtém-se:

$$\int_0^1 J_0(\lambda_i r^*) w(r^*) dr^* = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k r^*) J_0(\lambda_i r^*) w(r^*) dr^* \quad (122)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que  $w(r^*) = r^*$  pode-se reescrever a Eq. (122) como:

$$\int_0^1 r^* J_0(\lambda_i r^*) dr^* = C_k \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 r^* J_0(\lambda_k r^*) J_0(\lambda_i r^*) dr^* \quad (123)$$

De acordo com o princípio da ortogonalidade, a integral do lado direito da Eq. (123) é nula quando  $i \neq k$ . Assim, todas as integrais que surgem devido ao sinal de

somatório são nulas, exceto quando  $i = k$ . A Eq. (123) pode então ser reescrita para  $C_k$  como:

$$C_k = \frac{\int_0^1 r^* J_0(\lambda_k r^*) dr^*}{\int_0^1 r^* J_0^2(\lambda_k r^*) dr^*} \quad (124)$$

A solução das integrais da Eq. (124) pode ser obtida com o auxílio do MAPLE, cuja rotina de cálculos está descrita no EXEMPLO7.mw, com os resultados sendo escritos como:

$$\int_0^1 r^* J_0(\lambda_k r^*) dr^* = \left[ \frac{r^* J_1(\lambda_k r^*)}{\lambda_k} \right]_0^1 = \frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} \quad (125)$$

$$\int_0^1 r^* J_0^2(\lambda_k r^*) dr^* = \left\{ \frac{r^{*2}}{2} [J_0^2(\lambda_k r^*) + J_1^2(\lambda_k r^*)] \right\}_0^1 = \frac{1}{2} [J_0^2(\lambda_k) + J_1^2(\lambda_k)] \quad (126)$$

Substituindo as Eqs. (125-126) na Eq. (124) e rearranjando obtém-se:

$$C_k = \frac{2}{\lambda_k} \frac{J_1(\lambda_k)}{J_0^2(\lambda_k) + J_1^2(\lambda_k)} \quad (127)$$

### 2.2.2-SOLUÇÃO APROXIMADA

Pode-se demonstrar que, para valores de  $For < 0,2$ , a solução em série infinita, Eq. (120), pode ser aproximada pelo primeiro termo da série. Utilizando essa aproximação e definindo  $\theta_o^* = C_1 \exp(-\lambda_1^2 For)$ , a forma adimensional da distribuição de temperaturas é reescrita como:

$$\theta^*(r^*, For) = C_1 J_0(\lambda_1 r^*) \exp(-\lambda_1^2 For) = \theta_o^* J_0(\lambda_1 r^*) \quad (128)$$

$$\lambda_1 \frac{J_1(\lambda_1)}{J_0(\lambda_1)} = \text{Bi} \quad (129)$$

$$C_1 = \frac{2}{\lambda_1} \frac{J_1(\lambda_1)}{J_0^2(\lambda_1) + J_1^2(\lambda_1)} \quad (130)$$

### 2.2.3-TRANSFERÊNCIA TOTAL DE ENERGIA

Em diversas situações de engenharia, é útil saber a quantidade energia total que deixou (ou entrou) o cilindro longo até um dado tempo  $t$  em um processo transiente. A exigência da conservação da energia na forma diferencial pode ser aplicada no intervalo de tempo delimitado pela condição inicial ( $t = 0$ ) e por qualquer tempo  $t > 0$ , ou seja:

$$-dE_s = d(\Delta E_{acu}) \quad (131)$$

Igualando a quantidade de energia transferida a partir do cilindro longo como sendo  $\delta Q = dE_s$  e estabelecendo que  $d(\Delta E_{acu}) = dE(r, t) - dE(r, 0)$  pode-se reescrever a Eq. (131) como:

$$\delta Q = -[dE(r, t) - dE(r, 0)] \quad (132)$$

Desprezando variações de energia cinética e potencial, a variação da energia total do cilindro longo na Eq. (132) pode ser reescrita em termos da variação da energia interna específica do cilindro longo, ou seja:

$$dE(r, t) - dE(r, 0) = dU(r, t) - dU(r, 0) = (dm)[u(r, t) - u(r, 0)] \quad (133)$$

Além disso, como o cilindro longo é um meio incompressível, a variação de sua energia interna específica é igual ao produto entre o calor específico do material do cilindro longo (considerado constante) e a variação de temperatura, ou seja:

$$dE(r, t) - dE(r, 0) = (dm)c[T(r, t) - T(r, 0)] \quad (134)$$

Finalmente, sabendo que  $dm = \rho dV$  e que  $T(r,0) = T_i$ , pode-se reescrever a Eq. (134) e igualar com a Eq. (132), fornecendo que:

$$\delta Q = -\rho c [T(r,t) - T_i] dV \quad (135)$$

A quantidade total de energia transferida é obtida pela integração da Eq. (135) ao longo do volume do cilindro longo, ou seja:

$$Q = -\int \rho c [T(r,t) - T_i] dV \quad (136)$$

É conveniente adimensionalizar a Eq. (136) pela introdução da grandeza:

$$Q_o = \rho c (T_i - T_\infty) V \quad (137)$$

de tal forma que:

$$\frac{Q}{Q_o} = -\frac{\int \rho c [T(r,t) - T_i] dV}{\rho c (T_i - T_\infty) V} = \frac{1}{V} \int -\left[ \frac{T(r,t) - T_i}{T_i - T_\infty} \right] dV \quad (138)$$

A grandeza  $Q_o$  pode ser interpretada como a energia interna inicial do cilindro longo com relação à temperatura do fluido. De maneira alternativa  $Q_o$  também pode ser interpretada como a máxima transferência de energia que ocorreria entre o cilindro longo e o fluido se o processo se estendesse até  $t = \infty$ . Pode-se utilizar a Eq. (104) para expressar o termo entre colchetes da Eq. (138), ou seja:

$$\theta^* = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T(r,t) - T_i + T_i - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T(r,t) - T_i}{T_i - T_\infty} + 1 \Rightarrow -\left[ \frac{T(r,t) - T_i}{T_i - T_\infty} \right] = 1 - \theta^* \quad (139)$$

Substituindo a Eq. (139) na Eq. (138), fazendo  $V = \pi r_o^2 L$ ,  $dV = 2\pi r L dr$  e rearranjando obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int (1 - \theta^*) 2 \frac{r}{r_o} \frac{dr}{r_o} \quad (140)$$

Substituindo a Eq. (128) na Eq. (140), sabendo que  $r/r_o = r^*$ ,  $dr/r_o = dr^*$  e que nesse caso os limites de integração são de  $r^* = 0$  a  $r^* = 1$  obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int_0^1 [2r^* - 2\theta_o^* r^* J_0(\lambda_1 r^*)] dr^* \quad (141)$$

Resolvendo a integral da Eq. (141) obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{2\theta_o^*}{\lambda_1} J_1(\lambda_1) \quad (142)$$

Uma rotina de cálculos pode ser vista no arquivo EXEMPLO8.mw do MAPLE. Deve ser ressaltado que a quantidade de energia transferida do cilindro longo para o fluido pode também ser determinada a partir da solução exata através de um balanço de energia na interface, fornecendo o seguinte resultado:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int_0^{Fo} \frac{\partial \theta^* (1, Fo)}{\partial r^*} dFo \quad (143)$$

Na rotina do EXEMPLO8.mw, a quantidade de energia transferida foi determinada a partir da Eq. (143), e não a partir da Eq. (142). Isso garante a utilização da solução exata, Eq. (120) para o cálculo da quantidade total de energia transferida entre o cilindro longo e o fluido dentro do intervalo de tempo considerado.

### 2.3-A ESFERA COM CONVECÇÃO

A formulação do problema mostrado na Fig. (10) é escrita como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (144)$$

$$T(r,0) = T_i \quad (145)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (146)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_o} = h[T(r_o, t) - T_\infty] \quad (147)$$

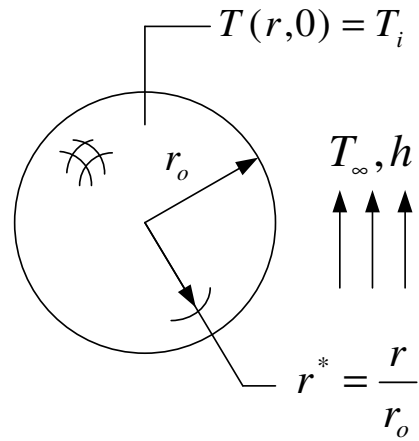


Figura 10 – Esfera unidimensional com temperatura inicial uniforme submetida subitamente a condições convectivas.

As Eqs. (144-147) podem ser adimensionalizadas através das seguintes variáveis adimensionais:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (148)$$

$$r^* = \frac{r}{r_o} \quad (149)$$

$$\tau^* = \frac{\alpha t}{r_o^2} = Fo \quad (150)$$

Substituindo as Eqs. (148-150) nas Eqs. (144-147) obtém-se:

$$\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^{*2} \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo} \quad (151)$$

$$\theta^*(r^*, 0) = 1 \quad (152)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (153)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = -Bi \theta^*(1, t^*) \quad (154)$$

onde  $Bi = (hr_o)/k$ . Deve ser notado que a adimensionalização tornou a direção  $r$  homogênea.

### 2.3.1-SOLUÇÃO EXATA

Pelo método da separação de variáveis, quer-se que a solução da Eq. (144) seja da seguinte forma:

$$\theta^*(r^*, Fo) = R(r^*) \tau(Fo) \quad (155)$$

Substituindo a Eq. (155) na Eq. (151), fazendo as derivadas, multiplicando o resultado por  $1/(R\tau)$  e igualando o resultado a uma constante obtém-se:

$$\frac{1}{Rr^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^{*2} \frac{\partial R^*}{\partial r^*} \right) = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial Fo} = \pm \lambda_k^2 \quad (156)$$

Na Eq. (156) deve ser notado que os dois primeiros termos devem ter o mesmo sinal da constante  $\lambda_k^2$ . Nesse caso, o sinal negativo satisfaz a condição de que a equação

diferencial da direção homogênea deve ter o sinal positivo no termo que acompanha a constante  $\lambda_k^2$ . A Eq. (156) é então reescrita como:

$$r^{*2} \frac{d^2 R_k}{dr^{*2}} + 2r^* \frac{dR_k}{dr^*} + \lambda_k^2 R_k r^{*2} = 0 \quad (157)$$

$$\frac{d\tau_k}{dFo} + \lambda_k^2 \tau_k = 0 \quad (158)$$

A Eq. (157) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis, linear e homogênea, cuja solução pode ser obtida a partir da equação geral de Bessel, conforme Apêndice. Comparando a Eq. (157) com a Eq. (15) do Apêndice obtém-se os seguintes coeficientes:  $A = -1/2$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = \lambda_k$  e  $n = 1/2$ . Esses resultados indicam o CASO 2 do Apêndice, cuja solução geral é dada pela Eq. (17) do Apêndice, ou seja:

$$R_k(r^*) = r^{*-1/2} [A_k J_{1/2}(\lambda_k r^*) + B_k J_{-1/2}(\lambda_k r^*)] \quad (159)$$

Entretanto, utilizando as Eqs. (25-26) do Apêndice pode-se reescrever a Eq. (159) na seguinte forma:

$$R_k(r^*) = r^{*-1} [A_k \sin(\lambda_k r^*) + B_k \cos(\lambda_k r^*)] \quad (160)$$

A Eq. (158) pode ser resolvida diretamente por integração, cujo resultado é:

$$\tau_k(Fo) = D_k \exp(-\lambda_k^2 Fo) \quad (161)$$

A solução completa da Eq. (151) é então escrita como:

$$\theta^*(r^*, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r^*) \tau_k(Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{*-1} [A_k \sin(\lambda_k r^*) + B_k \cos(\lambda_k r^*)] [D_k \exp(-\lambda_k^2 Fo)] \quad (162)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (153) obtém-se:

$$\left. \frac{\partial \theta_k^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = \left. \frac{\partial [R_k(r^*) \tau_k(For)]}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = \tau_k(For) \left. \frac{\partial [R_k(r^*)]}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} =$$

$$\underbrace{\tau_k(For)}_{\neq 0} \left\{ A_k \underbrace{\left[ \frac{\lambda_k r^* \cos(\lambda_k r^*) - \sin(\lambda_k r^*)}{r^{*2}} \right]}_{=0} + B_k \underbrace{\left[ \frac{-\lambda_k r^* \sin(\lambda_k r^*) - \cos(\lambda_k r^*)}{r^{*2}} \right]}_{=\infty} \right\} = 0 \Rightarrow B_k = 0$$

(163)

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (154) e substituindo o resultado da Eq. (163) obtém-se:

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \left. \frac{\partial [R_k(1) \tau_k(For)]}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \tau_k(For) \left. \frac{\partial [R_k(1)]}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \tau_k(For) A_k \left[ \frac{\lambda_k 1 \cos(\lambda_k 1) - \sin(\lambda_k 1)}{1^2} \right]$$

$$- \text{Bi} \theta^*(1, t^*) = -\text{Bi} \tau_k(For) 1^{-1} A_k \sin(\lambda_k 1)$$

$$1 - \lambda_k \cot(\lambda_k) = \text{Bi} \quad (164)$$

A Eq. (164) é uma equação transcendental que fornece os infinitos valores de  $\lambda_k$  em função do número de Biot. O comportamento gráfico da Eq. (164) pode ser visto na Fig. (11) para diferentes números de Biot. Já na Tab. (3) podem ser vistas as quatro primeiras raízes da Eq. (164) para diferentes número de Biot, e a rotina de cálculos pode ser vista no arquivo EXEMPLO9.mw do MAPLE:

Tabela 3 – Quatro primeiras raízes da Eq. (149).

| $Bi = hr_o/k$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ |
|---------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1,0           | 1,5707      | 4,7123      | 7,8539      | 10,9955     |
| 5,0           | 2,5704      | 5,3540      | 8,3029      | 11,3348     |
| 10,0          | 2,8363      | 5,7172      | 8,6587      | 11,6532     |
| 100,0         | 2,9349      | 5,8852      | 8,8605      | 11,8633     |

Substituindo a Eq. (163) na Eq. (162) obtém-se:

$$\theta^*(r^*, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r^*) \tau_k(Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{*-1} A_k \sin(\lambda_k r^*) D_k \exp(-\lambda_k^2 Fo) \quad (165)$$

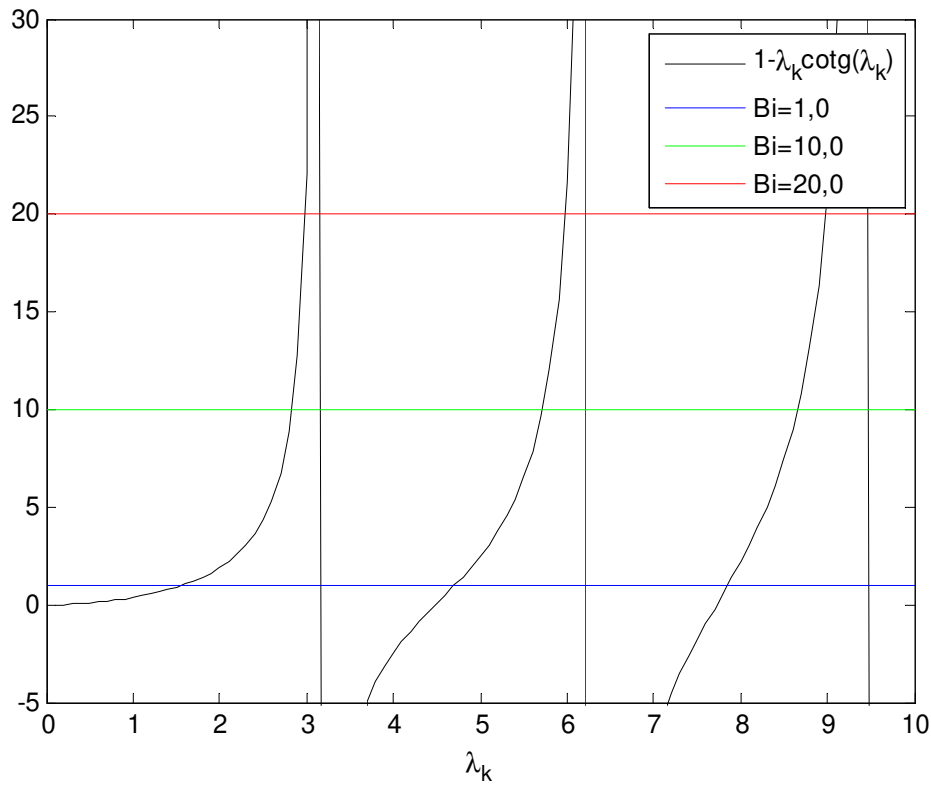


Figura 11 – Representação gráfica da Eq. (164) para diferentes números de Biot.

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (152) obtém-se:

$$\theta^*(r^*, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{*-1} A_k \sin(\lambda_k r^*) D_k \exp(-\lambda_k^2 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\sin(\lambda_k r^*)}{r^*} = 1 \quad (166)$$

onde  $C_k = A_k D_k$ . Ortogonalidade é utilizada para determinar  $C_k$ . A função  $\phi_k(r^*) = \sin(\lambda_k r^*)/r^*$  na Eq. (166) é a solução da Eq. (157). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (166) somente se a Eq. (157) for uma equação de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $r^* = 0$  e  $r^* = 1$  foram homogêneas. Comparando a Eq. (157) com a equação de Sturm-Liouville obtém-se que  $w(r^*) = r^{*2}$ . Tem-se que  $\phi_k(r^*)$  e  $\phi_i(r^*)$  são ortogonais com relação a função de ponderação  $w(r^*) = r^{*2}$ . Multiplicando ambos os

lados da Eq. (166) por  $w(r^*) \frac{\sin(\lambda_i r^*)}{r^*} dr^*$  e integrando de  $r^* = 0$  a  $r^* = 1$  obtém-se:

$$\int_0^1 \frac{\sin(\lambda_i r^*)}{r^*} w(r^*) dr^* = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\sin(\lambda_k r^*)}{r^*} \frac{\sin(\lambda_i r^*)}{r^*} w(r^*) dr^* \quad (167)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral e sabendo que  $w(r^*) = r^{*2}$  pode-se reescrever a Eq. (167) como:

$$\int_0^1 r^* \sin(\lambda_i r^*) dr^* = C_k \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \sin(\lambda_k r^*) \sin(\lambda_i r^*) dr^* \quad (168)$$

De acordo com o princípio da ortogonalidade, a integral do lado direito da Eq. (168) é nulo quando  $i \neq k$ . Assim, todas as integrais que surgem devido ao sinal de somatório são nulas, exceto quando  $i = k$ . A Eq. (168) pode então ser reescrita para  $C_k$  como:

$$C_k = \frac{\int_0^1 r^* \sin(\lambda_k r^*) dr^*}{\int_0^1 \sin^2(\lambda_k r^*) dr^*} \quad (169)$$

A solução das integrais da Eq. (169) pode ser obtida com o auxílio do MAPLE, cuja rotina de cálculos está descrita no EXEMPLO10.mw, com os resultados sendo escritos como:

$$\int_0^1 r^* \sin(\lambda_k r^*) dr^* = \frac{\sin(\lambda_k) - \lambda_k \cos(\lambda_k)}{\lambda_k^2} \quad (170)$$

$$\int_0^1 \sin^2(\lambda_k r^*) dr^* = \frac{\lambda_k - \sin(\lambda_k) \cos(\lambda_k)}{2\lambda_k} \quad (171)$$

Substituindo as Eqs. (170-171) na Eq. (169) e rearranjando obtém-se:

$$C_k = \frac{4[\sin(\lambda_k) - \lambda_k \cos(\lambda_k)]}{\lambda_k [2\lambda_k - \sin(2\lambda_k)]} \quad (172)$$

### 2.3.2-SOLUÇÃO APROXIMADA

Pode-se demonstrar que, para valores de  $Fo < 0,2$ , a solução em série infinita, Eq. (165), pode ser aproximada pelo primeiro termo da série. Utilizando essa aproximação e definindo  $\theta_o^* = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo)$ , a forma adimensional da distribuição de temperaturas é reescrita como:

$$\theta^*(r^*, Fo) = C_1 \frac{\sin(\lambda_1 r^*)}{r^*} \exp(-\lambda_1^2 Fo) = \theta_o^* \frac{\sin(\lambda_1 r^*)}{r^*} \quad (173)$$

$$1 - \lambda_1 \cot(\lambda_1) = Bi \quad (174)$$

$$C_1 = \frac{4[\sin(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1)]}{\lambda_1 [2\lambda_1 - \sin(2\lambda_1)]} \quad (175)$$

### 2.3.3-TRANSFERÊNCIA TOTAL DE ENERGIA

Em diversas situações de engenharia, é útil saber a energia total que deixou (ou entrou) a esfera até um dado tempo  $t$  em um processo transiente. A exigência da conservação da energia na forma diferencial pode ser aplicada no intervalo de tempo delimitado pela condição inicial ( $t = 0$ ) e por qualquer tempo  $t > 0$ , ou seja:

$$-dE_s = d(\Delta E_{acu}) \quad (176)$$

Igualando a quantidade de energia transferida a partir da esfera como sendo  $\delta Q = dE_s$  e estabelecendo que  $d(\Delta E_{acu}) = dE(r, t) - dE(r, 0)$  pode-se reescrever a Eq. (176) como:

$$\delta Q = -[dE(r, t) - dE(r, 0)] \quad (177)$$

Desprezando variações de energia cinética e potencial, a variação da energia total da esfera na Eq. (177) pode ser reescrita em termos da variação da energia interna específica do cilindro, ou seja:

$$dE(r,t) - dE(r,0) = dU(r,t) - dU(r,0) = (dm)[u(r,t) - u(r,0)] \quad (178)$$

Além disso, como a esfera é um meio incompressível, a variação de energia interna específica é igual ao produto entre o calor específico do material da esfera (considerado constante) e a variação de temperatura, ou seja:

$$dE(r,t) - dE(r,0) = (dm)c[T(r,t) - T(r,0)] \quad (179)$$

Finalmente, sabendo que  $dm = \rho dV$  e que  $T(r,0) = T_i$ , pode-se reescrever a Eq. (179) e igualar com a Eq. (177), fornecendo que:

$$\delta Q = -\rho c[T(r,t) - T_i]dV \quad (180)$$

A quantidade total de energia transferida é obtida pela integração da Eq. (180) ao longo do volume da esfera, ou seja:

$$Q = -\int \rho c[T(r,t) - T_i]dV \quad (181)$$

É conveniente adimensionalizar a Eq. (181) pela introdução da grandeza:

$$Q_o = \rho c(T_i - T_\infty)V \quad (182)$$

de tal forma que:

$$\frac{Q}{Q_o} = -\frac{\int \rho c[T(r,t) - T_i]dV}{\rho c(T_i - T_\infty)V} = \frac{1}{V} \int -\left[ \frac{T(r,t) - T_i}{T_i - T_\infty} \right] dV \quad (183)$$

A grandeza  $Q_o$  pode ser interpretada como a energia interna inicial da esfera com relação à temperatura do fluido. De maneira alternativa  $Q_o$  também pode ser interpretada como a máxima transferência de energia que ocorreria entre a esfera e o fluido se o processo se estendesse até  $t = \infty$ . Pode-se utilizar a Eq. (148) para expressar o termo entre colchetes da Eq. (183), ou seja:

$$\theta^* = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T(r,t) - T_i + T_i - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T(r,t) - T_i}{T_i - T_\infty} + 1 \Rightarrow -\left[\frac{T(r,t) - T_i}{T_i - T_\infty}\right] = 1 - \theta^* \quad (184)$$

Substituindo a Eq. (184) na Eq. (183), fazendo  $V = (4/3)\pi r_o^3$ ,  $dV = 4\pi r^2 dr$  e rearranjando obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int (1 - \theta^*) 3 \frac{r^2}{r_o^2} \frac{dr}{r_o} \quad (185)$$

Substituindo a Eq. (171) na Eq. (185), sabendo que  $r^2/r_o^2 = r^{*2}$ ,  $dr/r_o = dr^*$  e que nesse caso os limites de integração são de  $r^* = 0$  a  $r^* = 1$  obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int_0^1 [3r^{*2} - 3r^* \theta_o^* \sin(\lambda_1 r^*)] dr^* \quad (186)$$

Resolvendo a integral da Eq. (186) obtém-se:

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{3\theta_o^*}{\lambda_1^2} [\sin(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1)] \quad (187)$$

Uma rotina de cálculos pode ser vista no arquivo EXEMPLO11.mw do MAPLE. Deve ser ressaltado que a quantidade de energia transferida do cilindro para o fluido pode também ser determinada a partir da solução exata através de um balanço de energia na interface, fornecendo o seguinte resultado:

$$\frac{Q}{Q_o} = \int_0^{Fo} \frac{\partial \theta^*(1, Fo)}{\partial r^*} dFo \quad (188)$$

Na rotina do EXEMPLO11.mw, a quantidade de energia transferida foi determinada a partir da Eq. (188), e não a partir da Eq. (187). Isso garante a utilização da solução exata, Eq. (165) para o cálculo da quantidade total de energia transferida entre a esfera e o fluido dentro do intervalo de tempo considerado.

### 3-CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE

Os princípios básicos de condução unidimensional transiente também se aplicam a condução multidimensional transiente. Não surgem complexidades matemáticas adicionais devido a dependência da temperatura de mais uma coordenada espacial além do tempo. O próximo exemplo trata da condução bidimensional transiente. Nesse caso o campo de temperaturas depende de três variáveis (tempo e duas coordenadas espaciais) e o procedimento de solução é similar ao problema de condução tridimensional em regime permanente mostrado no Cap. (5).

#### EXEMPLO 3 – CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE RETANGULAR

Em uma barra utilizada para armazenamento de energia térmica, um fluido quente é circulado através de canais conforme a Fig. (12). As superfícies superior e inferior da barra estão isoladas. Desprezando efeitos de entrada, pode ser assumido que o fenômeno da condução térmica junto a parede separando dois canais vizinhos é bidimensional. Se no início da operação de armazenamento de energia térmica, a distribuição de temperaturas na parede é  $T(x, y, 0) = f(x, y)$ , e a bomba de circulação de fluido é subitamente ligada, determine a distribuição de temperaturas transiente na parede. Assuma que o coeficiente de transferência de calor entre as superfícies da parede e o fluido é bastante elevado ( $h \rightarrow \infty$ ), que a condutividade térmica da parede é constante e que não há geração interna de energia.

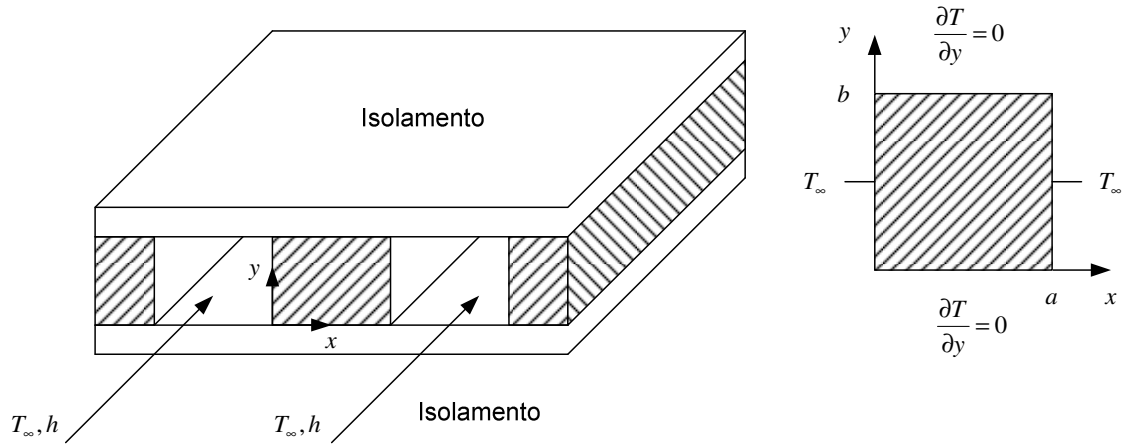


Figura 12 – Esquema do EXEMPLO 3.

SOLUÇÃO. A formulação para esse problema é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (189)$$

$$T(0, y, t) = T_{\infty} \quad (190)$$

$$T(a, y, t) = T_{\infty} \quad (191)$$

$$\frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} = 0 \quad (192)$$

$$\frac{\partial T(x, b, t)}{\partial y} = 0 \quad (193)$$

$$T(x, y, 0) = f(x, y) \quad (194)$$

Definindo a variável  $\theta(x, y, t) = T(x, y, t) - T_{\infty}$  pode-se reescrever as Eqs. (189-194) como:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (195)$$

$$\theta(0, y, t) = 0 \quad (196)$$

$$\theta(a, y, t) = 0 \quad (197)$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0, t)}{\partial y} = 0 \quad (198)$$

$$\frac{\partial \theta(x, b, t)}{\partial y} = 0 \quad (199)$$

$$\theta(x, y, 0) = f(x, y) - T_{\infty} \quad (200)$$

Deve ser notado que na variável  $\theta(x, y, t)$  todas as condições de contorno são agora homogêneas. Dessa forma, as direções  $x$  e  $y$  são as direções homogêneas nesse problema. Pelo método da separação de variáveis, a solução da Eq. (195) deve ter a forma:

$$\theta(x, y, t) = X(x)Y(y)\tau(t) \quad (201)$$

Substituindo a Eq. (201) na Eq. (195), fazendo as derivadas e multiplicando o resultado por  $1/(XY\tau)$  obtém-se:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (202)$$

Buscando ortogonalidade nas duas direções homogêneas, pode-se igualar o primeiro termo a esquerda da Eq. (202) a  $-\lambda_n^2$  e o segundo termo a esquerda da Eq. (202) a  $-\beta_m^2$  de tal forma que pode-se reescrever a Eq. (202) como:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (203)$$

$$\frac{d^2 Y_m}{dx^2} + \beta_m^2 Y_m = 0 \quad (204)$$

$$\frac{d\tau_{nm}}{dt} + \alpha(\lambda_n^2 + \beta_m^2)\tau_{nm} = 0 \quad (205)$$

A solução das Eqs. (203-204) é obtida pela técnica da equação característica e a solução da Eq. (205) é obtida por integração direta de tal forma que a solução completa da Eq. (195) é escrita como:

$$\theta(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x)] [C_m \sin(\beta_m y) + D_m \cos(\beta_m y)] \exp[-\alpha(\lambda_n^2 + \beta_m^2)t] \quad (206)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (196) obtém-se:

$$\theta_{nm}(0, y, t) = [A_n \underbrace{\sin(\lambda_n 0)}_{=0} + B_n \underbrace{\cos(\lambda_n 0)}_{=1}] \underbrace{Y(y)}_{\neq 0} \underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow B_n = 0 \quad (207)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (198) obtém-se:

$$\frac{\partial \theta(x, 0, t)}{\partial y} = X(x) \tau(t) \frac{\partial[Y(0)]}{\partial y} = \underbrace{X(x)}_{\neq 0} \underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} \underbrace{\beta_m}_{\neq 0} [C_m \underbrace{\cos(\beta_m 0)}_{=1} - D_m \underbrace{\sin(\beta_m 0)}_{=0}] = 0 \Rightarrow C_m = 0 \quad (208)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (197) obtém-se:

$$\theta(a, y, t) = [\underbrace{A_n}_{\neq 0} \sin(\lambda_n a)] \underbrace{Y(y)}_{\neq 0} \underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \sin(\lambda_n a) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (209)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (199) obtém-se:

$$\frac{\partial \theta(x, b, t)}{\partial y} = X(x) \frac{\partial[Y(b)]}{\partial y} \tau(t) = \underbrace{X(x)}_{\neq 0} [\underbrace{D_m}_{\neq 0} \cos(\beta_m b)] \underbrace{\tau(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \cos(\beta_m b) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{b}, m = 1, 2, 3, (210)$$

Substituindo as Eqs. (207-210) na Eq. (206) obtém-se:

$$\theta(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \exp\left[-\alpha\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) t\right] \quad (211)$$

onde  $a_{nm} = A_n D_m$ . O subscrito  $nm$  é utilizado para indicar que todos os valores de  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) e  $m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) fornecem soluções para a distribuição transiente de temperaturas. Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (200) obtém-se:

$$\theta(x, y, 0) = f(x, y) - T_{\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \quad (212)$$

Dupla ortogonalidade é utilizada para determinar  $a_{nm}$ . A função  $\sin(n\pi x/a)$  na Eq. (212) é solução da Eq. (203) e a função  $\cos(m\pi y/b)$  na Eq. (212) é solução da Eq. (204). Ortogonalidade pode ser aplicada na Eq. (212) somente se as Eqs. (203-204) forem equações de Sturm-Liouville e se as condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = a$  e em  $y = 0$  e  $y = b$  forem homogêneas.

Comparando as Eqs. (203-204) com a equação geral de Sturm-Liouville obtém-se que  $w(x) = 1$  e  $w(y) = 1$ . Tem-se então que  $\phi_n(x) = \sin(n\pi x/a)$  e  $\phi_k(x) = \sin(k\pi x/a)$  são ortogonais com relação a função de ponderação  $w(x) = 1$ . De maneira similar, tem-se também que  $\phi_m(y) = \cos(m\pi y/b)$  e  $\phi_i(y) = \cos(i\pi y/b)$  são ortogonais com relação a função de ponderação  $w(y) = 1$ . Multiplicando ambos os lados da Eq. (212) por  $w(x)w(y)\sin(k\pi x/a)\cos(i\pi y/b)dxdy$ , integrando de  $x = 0$  a  $x = a$  e de  $y = 0$  a  $y = b$  obtém-se:

$$\int_0^b \int_0^a [f(x, y) - T_{\infty}] w(x) w(y) \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{i\pi}{b} y\right) dxdy =$$

$$\int_0^b \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} w(x) w(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{i\pi}{b} y\right) dx dy \quad (213)$$

Trocando o símbolo do somatório e da integral, sabendo que  $w(x) = w(y) = 1$  e utilizando o princípio da ortogonalidade pode-se resolver a Eq. (213) para  $a_{nm}$ , ou seja:

$$a_{nm} = \frac{\int_0^b \int_0^a [f(x, y) - T_{\infty}] \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dx dy}{\int_0^b \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dx dy} \quad (214)$$

Calculando a integral do denominador da Eq. (214), substituindo a expressão resultante de  $a_{nm}$  na Eq. (211) e voltando na variável original obtém-se:

$$T(x, y, t) = T_{\infty} + \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^b \int_0^a [f(x, y) - T_{\infty}] \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dx dy \right\} \times \\ \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \exp\left[-\alpha \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) t\right] \quad (215)$$

#### 4-O MÉTODO DA SIMILARIDADE

Às vezes é possível que a solução de certos tipos de problemas de condução de calor possuam propriedades da similaridade. Essa propriedade também é uma característica de problemas em outras áreas de transferência de calor, mais notadamente em certos tipos de camadas limite de velocidade e térmica em convecção. Para problemas que possuam a propriedade da similaridade é possível introduzir uma variável de transformação que converte a equação diferencial governante de parcial para ordinária, usualmente mais simples de ser resolvida.

A mesma transformação deve ser aplicada nas condições de contorno. Esse tipo de transformação reduz a dificuldade envolvida na obtenção da solução do problema em termos de sua ordem de magnitude (modelo matemático envolvendo equações diferenciais parciais versus modelo matemático envolvendo equações diferenciais ordinárias). O método de solução que utiliza a propriedade da similaridade é conhecido

como método de solução por similaridade. No próximo exemplo, o método da similaridade será utilizado para obter a distribuição de temperaturas em um problema de condução unidimensional e transiente. Duas condições básicas devem ser satisfeitas para que o método da similaridade seja aplicável:

- 1) Todas as derivadas parciais tanto na equação governante quanto nas condições de contorno precisam ser transformadas em derivadas ordinárias,
- 2) A dimensão de espaço no problema de interesse deve ser semi-infinita (de zero a infinito). Como na prática todo corpo é finito, essa afirmação pode ser interpretada como: é a região do corpo na qual efeitos térmicos (aquecimento ou resfriamento) são sentidos, sendo esta região pequena quando comparada com a extensão física do corpo. Nesse caso o corpo é dito infinito com relação a região termicamente afetada.

#### EXEMPLO 4 – SIMILARIDADE EM CONDUÇÃO TRANSIENTE

Uma parede espessa, inicialmente com temperatura uniforme  $T_i$ , é subitamente colocada em contato térmico com um escoamento de um fluido aquecido com temperatura  $T_0$ , conforme a Fig. (13). É assumido contato térmico perfeito entre o fluido e a parede. Com o passar do tempo, parte da parede é aquecida devido ao contato com o fluido aquecido. Obtenha a distribuição de temperaturas unidimensional transiente na parede e o fluxo de calor na superfície da parede em contato com o fluido utilizando o método da similaridade. Considere que a condutividade térmica da parede é constante e que não existem efeitos de geração interna de energia térmica.

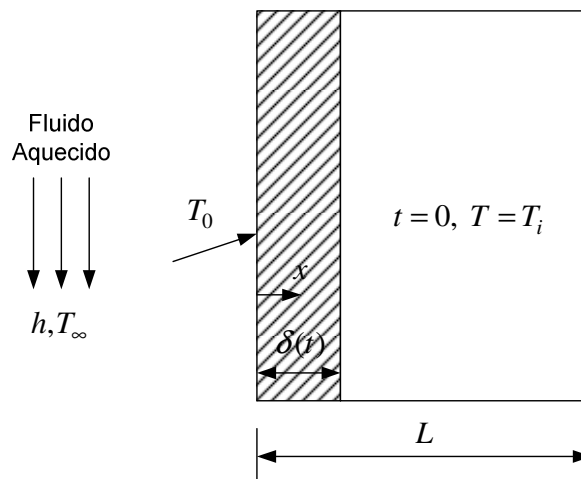


Figura 13 – Esquema do EXEMPLO 4.

A formulação para esse problema é dada por:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (216)$$

$$T(0, t) = T_0 \quad (217)$$

$$T(\infty, t) = T_i \quad (218)$$

$$T(x, 0) = T_i \quad (219)$$

A primeiro passo no método da similaridade é definir a variável de similaridade. Ela é uma combinação das variáveis independentes do problema ( $x, t$ ), sendo responsável pela transformação das equações diferenciais parciais do problema em equações diferenciais ordinárias. A definição da variável de similaridade envolve tanto argumentos matemáticos quanto físicos, além de um pouco de abstração e conhecimento do fenômeno físico em análise.

Para uma geometria semi-infinita não existe uma dimensão característica. Como a solução de todos os problemas físicos pode ser expressa na forma adimensional (a natureza não conhece escalas de medida) deve haver alguma maneira de adimensionalizar a solução desse problema. A única maneira possível é fazendo com que as variáveis apareçam juntas em um grupo adimensional. Analisando o denominador da Eq. (216), é aparente que  $x^2$  e  $(\alpha t)$  tem as mesmas dimensões, e, portanto,  $x^2/(\alpha t) = x/(\sqrt{\alpha t})$  é adimensional. A solução, de alguma forma, deve ser expressa em termos desta quantidade para que seja adimensional, ou seja:

$$\eta = A \frac{x}{(\alpha t)^{1/2}} \quad (220)$$

onde  $\eta$  é a variável de similaridade e  $A$  é uma constante que será definida posteriormente de maneira a simplificar a álgebra do problema. O segundo passo consiste em reescrever

a formulação do problema original, Eqs. (216-219) em termos da variável de similaridade. As derivadas parciais da Eq. (216) são reescritas como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left[ A \frac{x}{(\alpha t)^{1/2}} \right] = \frac{dT}{d\eta} \left( -\frac{A}{2} \frac{t^{-3/2}}{\alpha^{1/2}} x \right) \quad (221)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A \frac{x}{(\alpha t)^{1/2}} \right] = \frac{dT}{d\eta} \frac{A}{(\alpha t)^{1/2}} \quad (222)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{dT}{d\eta} \frac{A}{(\alpha t)^{1/2}} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ A \frac{x}{(\alpha t)^{1/2}} \right] = \frac{d^2 T}{d\eta^2} \frac{A^2}{\alpha t} \quad (223)$$

Substituindo as Eqs. (221-222) na Eq. (216) e rearranjando obtém-se:

$$-\frac{1}{2A^2} \eta \frac{dT}{d\eta} = \frac{d^2 T}{d\eta^2} \quad (224)$$

Nesse ponto deverá ser escolhido o valor para a constante  $A$ . Em princípio, qualquer valor arbitrário pode ser escolhido e a diferença entre as escolhas reside no fato de que mais ou menos passos algébricos deverão ser realizados em função dessa escolha. Para o problema em análise, bem documentado na literatura, a escolha que conduz ao menor número de passos algébricos é dada por  $A = 1/2$ . Substituindo esse valor na Eq. (224) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + 2\eta \frac{dT}{d\eta} = 0 \quad (225)$$

As condições de contorno também devem ser reescritas em termos da variável de similaridade. Da própria definição da Eq. (220), quando  $x = 0$ ,  $\eta = 0$  e quando  $x = \infty$ ,  $\eta = \infty$  de tal forma que as Eqs. (217-218) são reescritas como:

$$T(\eta = 0) = T_0 \quad (226)$$

$$T(\eta = \infty) = T_i \quad (227)$$

O novo problema consiste em resolver a equação diferencial ordinária dada pela Eq. (225) sujeita as condições de contorno dadas pelas Eqs. (226-227). A Eq. (225) pode ser reescrita introduzindo a variável  $P = dT/d\eta$  de tal forma que:

$$\frac{dP}{d\eta} + 2\eta P = 0 \quad (228)$$

Separando as variáveis na Eq. (228), integrando e voltando na variável original obtém-se:

$$\frac{dT}{d\eta} = C e^{-\eta^2} \quad (229)$$

Integrando ambos os lados da Eq. (229) de  $\eta = 0$  a  $\eta = \xi$  (qualquer valor de  $\eta$ ) obtém-se:

$$T(\eta = \xi) - T(\eta = 0) = C \int_0^\xi e^{-\eta^2} d\eta \quad (230)$$

Utilizando as condições de contorno simultaneamente na Eq. (230) obtém-se:

$$T(\eta = \infty) - T(\eta = 0) = T_i - T_0 = C \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta \Rightarrow C = \frac{T_i - T_0}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} \quad (231)$$

Substituindo a Eq. (231) na Eq. (230) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{T(\eta = \xi) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{\int_0^\xi e^{-\eta^2} d\eta}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} \quad (232)$$

As integrais que aparecem no lado direito da Eq. (232) são as definições da função erro, conforme o Apêndice, ou seja:

$$erf(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta \quad (233)$$

$$erf(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1 \quad (234)$$

Substituindo as Eqs. (233-234) na Eq. (232), substituindo  $\xi$  por  $\eta$  visto que  $\xi$  nada mais é do que um valor arbitrário de  $\eta$ , substituindo a definição de  $\eta$ , Eq. (220) com  $A = 1/2$  e rearranjando obtém-se:

$$\frac{T(x,t) - T_0}{T_i - T_0} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (235)$$

O fluxo de calor na superfície da parede pode ser calculado pela lei de Fourier em conjunto com a variável de similaridade e a Eq. (222), ou seja:

$$q_s''(t) = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -k \left( \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{\eta=0} = -k \left( \frac{dT}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \right)_{\eta=0} = -\frac{k}{2\sqrt{\alpha t}} \left( \frac{dT}{d\eta} \right)_{\eta=0} \quad (236)$$

A derivada na Eq. (236) pode ser calculada pelas Eqs. (229), (231) e (234):

$$\left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=0} = C e^{-0^2} = C = \frac{T_i - T_0}{\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} = \frac{T_i - T_0}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(\infty)} = \frac{2(T_i - T_0)}{\sqrt{\pi}} \quad (237)$$

Substituindo a Eq. (237) na Eq. (236) obtém-se:

$$q_s''(t) = \frac{k(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \quad (238)$$

Claramente, o fluxo de calor local em  $x = 0$  decresce proporcionalmente a  $t^{-1/2}$  conforme  $t$  aumenta (e conforme a parede se aquece).

## 5-O MÉTODO INTEGRAL

O método integral é um método aproximado que oferece uma alternativa matematicamente menos rigorosa do que os métodos utilizados nesse capítulo. Ele é particularmente atrativo para problemas unidimensionais transientes pois combina simplicidade e resultados com precisão aceitável. O método integral foi amplamente utilizado no passado para estudar problemas de condução envolvendo fusão e solidificação. Os principais conceitos desse método são idênticos aqueles utilizados por von Kármán e Pohlhausen no seu tratamento clássico do escoamento laminar na camada limite. Para ilustrar esse método será analisado novamente o EXEMPLO 4, só que agora pelo método integral.

### EXEMPLO 5 – MÉTODO INTEGRAL EM CONDUÇÃO TRANSIENTE

Uma parede, inicialmente com temperatura uniforme  $T_i$ , é subitamente colocada em contato térmico com um escoamento de um fluido aquecido com temperatura  $T_0$ . É assumido contato térmico perfeito entre o fluido e a parede. Com o passar do tempo, parte da parede é aquecida devido ao contato com o fluido aquecido. Obtenha a distribuição de temperaturas unidimensional transiente na parede e o fluxo de calor na superfície da parede em contato com o fluido utilizando o método integral.

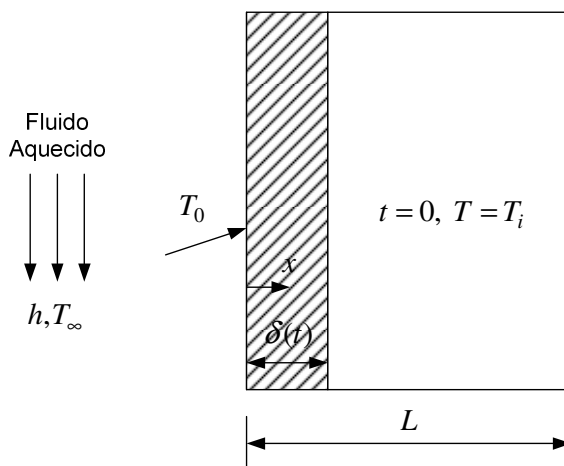


Figura 14 – Esquema do EXEMPLO 5.

A formulação para esse problema é dada por:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (239)$$

$$T(0, t) = T_0 \quad (240)$$

$$T(\infty, t) = T_i \quad (241)$$

$$T(x, 0) = T_i \quad (242)$$

O primeiro passo consiste em integrar a Eq. (239) em  $x$  de  $x=0$  a  $x=\delta(t)$  obtendo-se:

$$\int_{x=0}^{x=\delta(t)} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} dx = \int_{x=0}^{x=\delta(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \int_{x=0}^{x=\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\delta(t)} - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (243)$$

onde  $\delta(t)$  é a camada de penetração térmica ou camada limite térmica na qual o efeito de aquecimento ou resfriamento da fronteira é sentido pelo corpo. Fora da camada limite o corpo está na sua temperatura inicial. O lado esquerdo da Eq. (243) pode ser reescrito utilizando a regra de Leibniz, escrita na forma geral como:

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} [f(x, t)] dx = \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx + f[x, a(t)] \frac{d}{dt} [a(t)] - f[x, b(t)] \frac{d}{dt} [b(t)]$$

Assim, utilizando a regra de Leibniz obtém-se:

$$\int_{x=0}^{x=\delta(t)} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_0^{\delta(t)} T(x, t) dx - T[x, \delta(t)] \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (244)$$

Substituindo a Eq. (244) na Eq. (243) obtém-se a equação da energia na forma integral, ou seja:

$$\frac{1}{\alpha} \left[ \frac{d}{dt} \int_0^{\delta} T dx - (T)_{x=\delta} \frac{d\delta}{dt} \right] = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\delta} - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (245)$$

O segundo passo consiste em assumir uma expressão geral para a temperatura  $T$ , sendo a forma mais comum uma expressão polinomial com coeficientes desconhecidos que podem ser determinados pelas condições de contorno do problema, Eqs. (240-241). Se necessário (devido a presença de mais coeficientes que condições de contorno), pode-se utilizar condições de contorno adicionais, como por exemplo, avaliar a equação da energia e suas derivadas nos limites da região de interesse ( $x=0$  e  $x=\delta$ ). Pode-se então assumir a seguinte expressão polinomial na forma adimensional:

$$\frac{T(x) - T_i}{T_0 - T_i} = A + B \frac{x}{\delta} + C \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 + D \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 \quad (246)$$

A obtenção dos coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  deve ser feita através de quatro condições de contorno, ou seja:

$$T(0) = T_0 \quad (247)$$

$$T(\delta) = T_i \quad (248)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\delta} = 0 \quad (249)$$

$$\frac{1}{\alpha} \underbrace{\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x=0}}_{=0} = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{x=0} \quad (250)$$

As duas primeiras condições de contorno são as Eqs. (247-248), com a última modificada para situar o problema dentro da camada limite térmica. A Eq. (249) indica que não há fluxo de calor a partir de  $\delta(t)$  pois a temperatura é sempre igual a  $T_i$ . Já a Eq. (250) é a equação de condução avaliada em  $x=0$ , com a derivada temporal nula pois  $T_0$

é constante ao longo do tempo. A partir da Eq. (246) pode-se escrever de forma mais geral a distribuição de temperaturas e as derivadas primeira e segunda para se utilizar nas condições de contorno, ou seja:

$$T(x) = T_i + (T_0 - T_i) \left[ A + B \frac{x}{\delta} + C \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 + D \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 \right] \quad (251)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_0 - T_i) \left[ \frac{B}{\delta} + \frac{2Cx}{\delta^2} + \frac{3Dx^2}{\delta^3} \right] \quad (252)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (T_0 - T_i) \left[ \frac{2C}{\delta^2} + \frac{6Dx}{\delta^3} \right] \quad (253)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (250) obtém-se:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{x=0} = (T_0 - T_i) \left[ \frac{2C}{\delta^2} + \frac{6D \cdot 0}{\delta^3} \right] = 0 \Rightarrow C = 0 \quad (254)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (247) obtém-se:

$$T(0) = T_i + (T_0 - T_i) \left[ A + B \frac{0}{\delta} + D \left( \frac{0}{\delta} \right)^3 \right] = T_0 \Rightarrow A = 1 \quad (255)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (249) obtém-se:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\delta} = (T_0 - T_i) \left[ \frac{B}{\delta} + \frac{3D\delta^2}{\delta^3} \right] = 0 \Rightarrow B = -3D \quad (256)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela Eq. (248) obtém-se:

$$T(\delta) = T_i + (T_0 - T_i) \left[ 1 - 3D \frac{\delta}{\delta} + D \left( \frac{\delta}{\delta} \right)^3 \right] = T_i \Rightarrow D = \frac{1}{2} \quad (257)$$

Da Eq. (256) tem-se que  $B = -3/2$  e substituindo os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  na Eq. (251) e rearranjando obtém-se:

$$T(x) = T_i + (T_0 - T_i) \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{x}{\delta} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 \right] \quad (258)$$

A derivada da Eq. (258) com relação a  $x$  é escrita como:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_0 - T_i) \left[ -\frac{3}{2\delta} + \frac{3x^2}{2\delta^3} \right] \quad (259)$$

O terceiro passo consiste em substituir as Eqs. (258-259) na Eq. (245), ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^\delta \left[ T_i + (T_0 - T_i) \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{x}{\delta} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 \right] \right] dx - \left[ T_i + (T_0 - T_i) \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{\delta}{\delta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{\delta} \right)^3 \right] \right] \frac{d\delta}{dt} \right\} = \\ (T_0 - T_i) \left[ -\frac{3}{2\delta} + \frac{3\delta^2}{2\delta^3} \right] - (T_0 - T_i) \left[ -\frac{3}{2\delta} + \frac{3.0^2}{2\delta^3} \right] \quad (260) \end{aligned}$$

Rearranjando a Eq. (260) obtém-se:

$$\frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^\delta \left[ T_i + (T_0 - T_i) \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{x}{\delta} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 \right] \right] dx - T_i \frac{d\delta}{dt} \right\} = \frac{3}{2\delta} (T_0 - T_i) \quad (261)$$

Resolvendo a integral da Eq. (261) e rearranjando obtém-se:

$$\frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \left\{ T_0 [x]_0^\delta - (T_0 - T_i) \frac{3}{4\delta} [x^2]_0^\delta + (T_0 - T_i) \frac{1}{8\delta^3} [x^4]_0^\delta \right\} - T_i \frac{d\delta}{dt} \right\} = \frac{3}{2\delta} (T_0 - T_i) \quad (262)$$

Substituindo os limites de integração, rearranjando, simplificando o termo  $(T_0 - T_i)$  e separando variáveis obtém-se:

$$2\delta d\delta = 8\alpha dt \quad (263)$$

A Eq. (263) pode ser integrada de  $\delta = 0$  em  $t = 0$  à  $\delta$  em  $t$ , ou seja:

$$\int_{\delta=0}^{\delta(t)} 2\delta d\delta = \int_{t=0}^t 8\alpha dt \quad (264)$$

Resolvendo a Eq. (264) obtém-se:

$$\delta(t) = \sqrt{8\alpha t} \quad (265)$$

O último passo consiste em substituir a Eq. (265) na Eq. (258), fornecendo o seguinte resultado para a distribuição de temperaturas transiente adimensional:

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_0 - T_i} = 1 - \frac{3}{2} \frac{x}{\sqrt{8\alpha t}} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{8\alpha t}} \right)^3 \quad (266)$$

O fluxo de calor na superfície da parede pode ser determinado utilizando a lei de Fourier em conjunto com a Eq. (259) e o resultado da Eq. (265), ou seja:

$$q_s''(t) = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -k \left\{ (T_0 - T_i) \left[ -\frac{3}{2\sqrt{8\alpha t}} + \frac{3.0^2}{2\sqrt{8\alpha t}^3} \right] \right\} = \frac{3k(T_0 - T_i)}{4\sqrt{2\alpha t}} \quad (267)$$

Deve ser notado que a Eq. (267) fornece um resultado apenas 6 % abaixo daquele calculado pela solução exata, Eq. (238) obtida pelo método da similaridade. Além disso, esse problema também poderia ter sido resolvido utilizando a condição de contorno

$$\frac{1}{\alpha} \underbrace{\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x=\delta}}_{=0} = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{x=\delta} \quad (268)$$

ao invés da condição de contorno dada pela Eq. (250). Nessa condição pode ser mostrado que os resultados obtidos têm a seguinte forma:

$$\delta(t) = \sqrt{24\alpha t} \quad (269)$$

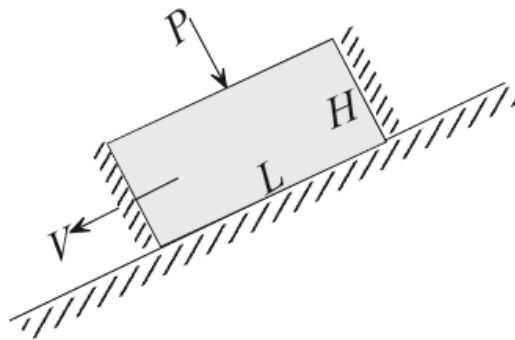
$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_0 - T_i} = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{24\alpha t}}\right)^3 \quad (270)$$

$$q_s''(t) = \frac{3k(T_0 - T_i)}{\sqrt{6\alpha t}} \quad (271)$$

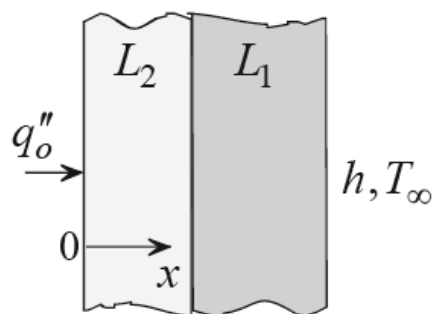
A Eq. (271) fornece um resultado 8,5 % acima daquele calculado pela solução exata, Eq. (238) obtida pelo método da similaridade. Isso deixa claro que embora o método integral seja de fácil aplicação, a precisão dos resultados depende do perfil de temperaturas assumido e da escolha das condições de contorno a serem satisfeitas.

## 6-EXERCÍCIOS PROPOSTOS

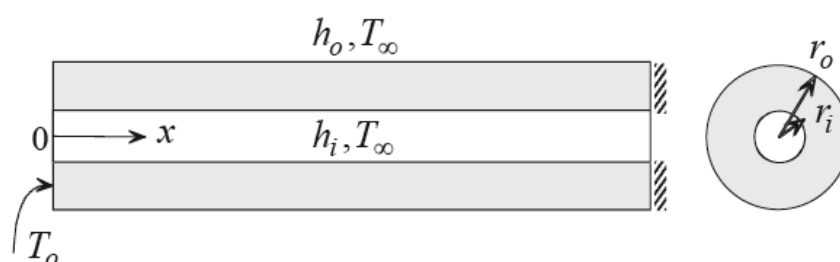
1) Uma barra retangular com seção transversal  $L \times H$  está em repouso à temperatura uniforme  $T_i$ . No instante  $t > 0$  a barra começa a deslizar sobre uma superfície inclinada com velocidade constante  $V$ . A pressão e o coeficiente de atrito na interface são  $P$  e  $\mu$ , respectivamente. Na face superior, a barra troca calor por convecção com as vizinhanças. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . As outras duas superfícies estão isoladas. Assuma que o número de Biot é maior que a unidade e despreze a transferência de calor na direção normal ao plano  $L \times H$ . Determine a distribuição de temperaturas transiente na barra.



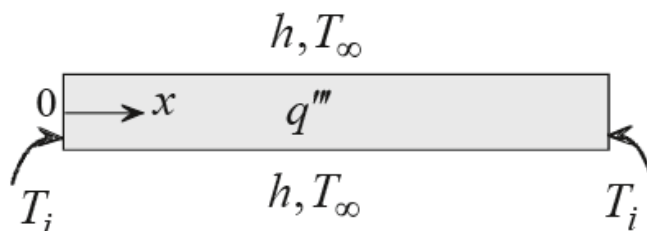
2) Uma placa com espessura  $L_1$  está inicialmente à temperatura  $T_1$ . Uma segunda placa de mesmo material com espessura  $L_2$  está inicialmente à temperatura  $T_2$ . Em  $t > 0$  as duas placas são unidas com um contato perfeito na interface. Simultaneamente, a superfície de uma das placas é aquecida com um fluxo de calor uniforme  $q_o''$  e a superfície oposta começa a trocar calor por convecção com o ambiente. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . Determine a distribuição de temperaturas unidimensional transiente nas duas placas.



3) Um duto com raio interno  $r_i$ , raio externo  $r_o$  e comprimento  $L$  está inicialmente à temperatura uniforme  $T_i$ . Em  $t > 0$  uma extremidade está mantida a  $T_o$  enquanto a outra extremidade está isolada. Simultaneamente, o duto começa a trocar calor por convecção ao longo de suas superfícies interna e externa. Os coeficientes de transferência de calor interno e externo são  $h_i$  e  $h_o$ , respectivamente. A temperatura ambiente interna e externa é  $T_\infty$ . Desprezando a variação de temperatura na direção  $r$ , determine a distribuição de temperaturas unidimensional transiente no duto.

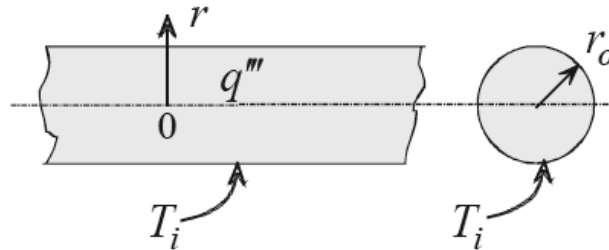


4) Um cabo elétrico com raio  $r_o$  e comprimento  $L$  está inicialmente à temperatura uniforme  $T_i$ . Em  $t > 0$  corrente elétrica começa a passar através do cabo resultando em uma taxa de geração volumétrica uniforme  $\dot{q}$ . As duas extremidades do cabo são mantidas à temperatura inicial  $T_i$ . O cabo troca calor por convecção com o ambiente. O coeficiente de transferência de calor é  $h$  e a temperatura ambiente é  $T_\infty$ . Desprezando variação de temperaturas na direção  $r$ , determine a distribuição de temperaturas unidimensional transiente no cabo. Qual a temperatura em regime permanente na metade do comprimento do cabo?

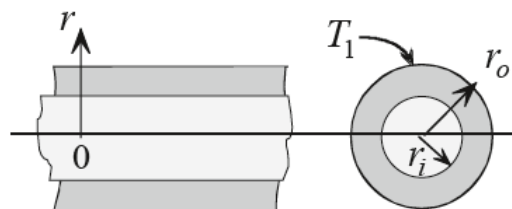


5) Considere um cilindro sólido longo com raio  $r_o$  que está inicialmente à temperatura uniforme  $T_i$ . Em  $t > 0$  corrente elétrica começa a passar através do cilindro resultando em uma taxa de geração volumétrica uniforme  $\dot{q}$ . A superfície cilíndrica está mantida à

temperatura inicial  $T_i$ . Determine a distribuição de temperaturas unidimensional transiente no cilindro.



6) Um cilindro oco com raio externo  $r_o$  e raio interno  $r_i$  está inicialmente à temperatura uniforme  $T_1$ . Um segundo cilindro maciço com raio  $r_i$  é do mesmo material do primeiro e está inicialmente à temperatura uniforme  $T_2$ . Em  $t > 0$  o cilindro sólido é forçado a passar no interior do cilindro oco resultando em um contato térmico perfeito. A superfície externa do cilindro oco é mantida à temperatura  $T_1$ . Determine a distribuição de temperaturas unidimensional transiente nos dois cilindros.



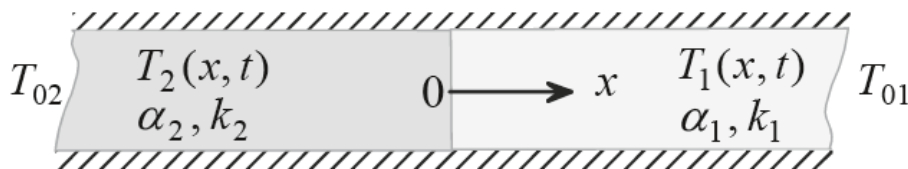
7) Uma esfera com raio  $r_o$  está inicialmente a uma temperatura  $T_i = f(r)$ . Em  $t > 0$  a superfície está mantida a uma temperatura uniforme  $T_o$ . Determine a distribuição de temperaturas unidimensional transiente na esfera.

8) Uma carne para assar a temperatura inicial uniforme  $T_i$  é colocada em um forno à temperatura  $T_\infty$ . A carne é assada por convecção e radiação. O coeficiente de transferência de calor é  $h$ . Modelos a carne como uma esfera com raio  $r_o$  e assumo que o fluxo de radiação é constante e igual a  $q_o''$ . Qual o tempo necessário para que a temperatura do centro da carne atinja a temperatura de cozimento especificada  $T_o$ ?

9) A superfície de uma placa semi-infinita que está inicialmente à temperatura uniforme  $T_i$  é subitamente aquecida por um fluxo de calor dependente do tempo na forma  $q_o'' = C/\sqrt{t}$ , onde  $C$  é uma constante. Use o método da similaridade para determinar a distribuição de temperaturas unidimensional transiente na placa.

10) Duas barras longas, 1 e 2, estão inicialmente à temperaturas uniformes  $T_{01}$  e  $T_{02}$ , respectivamente. As duas barras são colocadas em contato perfeito em suas extremidades e permitidas trocar calor por condução entre si. Assumindo que as barras estão isoladas ao longo de suas superfícies, determine:

- a) A distribuição de temperaturas unidimensional transiente nas duas barras e
- b) A temperatura da interface.



11) Resolva novamente o EXEMPLO 5 para o seguinte perfil de temperaturas:

$$\frac{T(x) - T_i}{T_0 - T_i} = A + B \frac{x}{\delta} + C \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 + D \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 + E \left( \frac{x}{\delta} \right)^4$$

Determine também o fluxo de calor superficial e o erro no fluxo de calor quando comparado com a solução exata obtida pelo método da similaridade.

## APÊNDICE – MATEMÁTICA APLICADA

### 1-EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM LINEARES E HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Começamos considerando o caso especial da equação diferencial de segunda ordem homogênea:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

Inicialmente deve-se escrever a chamada equação auxiliar ou equação característica da Eq. (1), que possui a seguinte forma:

$$am^2 + bm + c = 0 \quad (2)$$

Consideramos três casos, a saber: as soluções para a equação auxiliar correspondem a raízes reais distintas, raízes reais iguais e raízes complexas conjugadas.

**CASO I (RAÍZES REAIS DISTINTAS)** – Com a hipótese de que a Eq. (2) possui duas raízes reais distintas  $m_1$  e  $m_2$ , a solução geral para a Eq. (1) é:

$$y_H(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \quad (3)$$

**CASO II (RAÍZES REAIS IGUAIS)** – Com a hipótese de que a Eq. (2) possui duas raízes reais iguais  $m_1 = m_2 = m$ , a solução geral para a Eq. (1) é:

$$y_H(x) = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} \quad (4)$$

CASO III (RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS) – Com a hipótese de que a Eq. (2) possui duas raízes reais complexas na forma  $m_1 = \alpha + i\beta$  e  $m_2 = \alpha - i\beta$  em que  $\alpha$  e  $\beta > 0$  são reais e  $i^2 = -1$ , a solução geral para a Eq. (1) é:

$$y_H(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (5)$$

## 2-EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM LINEARES E NÃO-HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Começamos considerando o caso especial da equação diferencial de segunda ordem não-homogênea:

$$ay'' + by' + cy = q(x) \quad (6)$$

### 2.1-SOLUÇÃO GERAL PELO MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

A solução geral de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não-homogênea com coeficientes constantes tem a seguinte forma:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) \quad (7)$$

onde  $y_H(x)$  é a solução da equação homogênea  $ay'' + by' + c = 0$  conforme mostrado no item anterior e  $y_p(x)$  é uma solução particular da equação não-homogênea. A função  $y_H(x)$  é calculada pelo método da equação característica enquanto a função  $y_p(x)$  depende da forma de  $q(x)$ . Embora o método dos coeficientes indeterminados apresentado nesta seção não se limite a equações de segunda ordem, ele se limita a equações lineares não-homogêneas com as seguintes características:

- 1) Que têm coeficientes constantes, e
- 2) Em que  $q(x)$  é uma constante  $C$ , uma função polinomial, uma função exponencial  $e^{\alpha x}$ ,  $\sin \beta x$ ,  $\cos \beta x$ , ou somas e produtos dessas funções.

No método dos coeficientes indeterminados, os coeficientes da solução particular são determinados após inserirmos  $y_p(x)$  e suas derivadas na equação diferencial. Conforme mencionado anteriormente, esse método dá bons resultados quando  $q(x)$  é uma função contínua (tipicamente uma função polinomial, exponencial, seno ou cosseno ou combinação destas funções). Para funções descontínuas ou mais complexas, outro método, mais geral, chamado de método da variação dos parâmetros é mais recomendado e será descrito no próximo item. Assim, a solução de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com coeficientes constantes, pelo método dos coeficientes indeterminados tem as seguintes etapas:

1) Cálculo de  $y_H(x)$ , a solução da equação homogênea, pelo método da equação característica,

2) Cálculo de uma solução particular  $y_p(x)$  da equação não-homogênea, sendo que tal solução particular tem sua forma induzida pela função  $q(x)$  e

3) A solução geral da equação é  $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$ .

Na Tab. (1) ilustramos alguns exemplos específicos de  $q(x)$  juntamente com a forma correspondente da solução particular:

Tabela 1 – Tentativas para soluções particulares.

| $q(x)$                 | Forma de $y_p(x)$                                   |
|------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1 (qualquer constante) | $A$                                                 |
| $5x + 7$               | $Ax + B$                                            |
| $3x^2 - 2$             | $Ax^2 + Bx + C$                                     |
| $x^3 - x + 1$          | $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$                              |
| $\sin 4x$              | $A \cos 4x + B \sin 4x$                             |
| $\cos 4x$              | $A \cos 4x + B \sin 4x$                             |
| $e^{5x}$               | $Ae^{5x}$                                           |
| $(9x - 2)e^{5x}$       | $(Ax + B)e^{5x}$                                    |
| $x^2 e^{5x}$           | $(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$                             |
| $e^{3x} \sin 4x$       | $Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \sin 4x$                 |
| $5x^2 \sin 4x$         | $(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 4x$ |
| $xe^{3x} \cos 4x$      | $(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + D)e^{3x} \sin 4x$   |

## 2.2-SOLUÇÃO GERAL PELO MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

O método da variação dos parâmetros, apesar de mais complexo, tem uma vantagem sobre o método dos coeficientes indeterminados. Ele sempre produz uma solução particular  $y_p(x)$ , desde que a equação homogênea associada possa ser resolvida. O presente método não se limita a uma função  $q(x)$  que seja combinação linear dos tipos de funções listadas na Tab. (1). Ainda, o método da variação dos parâmetros se aplica a equações diferenciais com coeficientes variáveis. Segue abaixo um roteiro de cálculo para a aplicação do método:

1)Escrever a equação diferencial  $ay''+by'+cy=q(x)$  na forma  $y''+Py'+Qy=f(x)$ , ou seja, dividir todos os termos da primeira por  $a$  de tal maneira que a última apresente o coeficiente de  $y''$  unitário,

2)Para a equação diferencial  $y''+Py'+Qy=f(x)$ , utilizar a equação característica para calcular a solução geral da equação diferencial  $y''+Py'+Qy=0$  na forma  $y(x)=C_1y_1+C_2y_2$ , onde a forma de  $y_1$  e  $y_2$  é função de ser o CASO I, II ou III,

3)Após a identificação de  $y_1$  e  $y_2$  calcular o Wronskiano  $W$  de  $y_1$  e  $y_2$  na forma:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (8)$$

4)Calcular os Wronskiano  $W_1$  e  $W_2$  na seguinte forma:

$$W_1(0, y_2) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = -y_2 f(x) \quad (9)$$

$$W_2(y_1, 0) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = y_1 f(x) \quad (10)$$

5) Calcular  $u_1'$  e  $u_2'$  através das seguintes expressões:

$$u_1' = \frac{W_1(0, y_2)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \quad (11)$$

$$u_2' = \frac{W_2(y_1, 0)}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \quad (12)$$

6) Integrar  $u_1'$  e  $u_2'$  para a obtenção de  $u_1$  e  $u_2$ , ou seja:

$$u_1 = \int u_1' dx \quad (13)$$

$$u_2 = \int u_2' dx \quad (14)$$

7) Compor a solução particular na forma  $y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2$  e

8) A solução final da equação diferencial é então  $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ .

### 3-EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BESSEL E FUNÇÕES DE BESSEL

#### 3.1-FORMA GERAL DAS EQUAÇÕES DE BESSEL

Uma classe de equações diferenciais ordinárias com coeficientes variáveis é conhecida como equações diferenciais de Bessel. Tais equações são encontradas em aletas com área de seção transversal variável, problemas de condução multidimensional e geração de energia dependente da temperatura. Uma forma geral dessas equações diferenciais é dada por:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [(1-2A)x - 2Bx^2] \frac{dy}{dx} + [C^2 D^2 x^{2C} + B^2 x^2 - B(1-2A)x + A^2 - C^2 n^2] y = 0 \quad (15)$$

Examinando a equação diferencial acima nota-se o seguinte:

1) Ela é uma equação diferencial de segunda ordem linear com coeficientes variáveis. Ou seja, os coeficientes da variável dependente  $y$  e de suas derivadas são funções da variável independente  $x$ ,

2)  $A, B, C, D$  e  $n$  são constantes. Seus valores variam dependendo da equação sob consideração. Assim, a equação acima representa uma classe de várias equações diferenciais de Bessel,

3)  $n$  é chamada de ordem da função de Bessel e

4)  $D$  pode ser real ou imaginário.

### 3.2-SOLUÇÕES: FUNÇÕES DE BESSEL

A solução geral da equação acima pode ser obtida na forma de séries de potências infinitas. Como a equação diferencial de Bessel é de segunda ordem, são necessárias duas soluções linearmente independentes. A forma da solução depende das constantes  $n$  e  $D$ . Existem quatro combinações possíveis:

CASO 1)  $n$  é zero ou inteiro positivo,  $D$  é real. A solução é:

$$y(x) = x^A \exp(Bx) [C_1 J_n(Dx^C) + C_2 Y_n(Dx^C)] \quad (16)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração,  $J_n(Dx^C)$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem  $n$  de argumento  $Dx^C$  e  $Y_n(Dx^C)$  é a função de Bessel de segunda espécie de ordem  $n$  de argumento  $Dx^C$ .

CASO 2)  $n$  não é zero nem inteiro positivo,  $D$  é real. A solução é:

$$y(x) = x^A \exp(Bx) [C_1 J_n(Dx^C) + C_2 J_{-n}(Dx^C)] \quad (17)$$

CASO 3)  $n$  é zero ou inteiro positivo,  $D$  é imaginário. A solução é:

$$y(x) = x^A \exp(Bx) [C_1 I_n(px^C) + C_2 K_n(px^C)] \quad (18)$$

onde  $p = D/i$ , onde  $i$  é imaginário e  $i = \sqrt{-1}$ ,  $I_n(px^C)$  é a função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem  $n$  de argumento  $px^C$  e  $K_n(px^C)$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem  $n$  de argumento  $px^C$ .

CASO 4)  $n$  não é zero nem inteiro positivo,  $D$  é imaginário. A solução é:

$$y(x) = x^A \exp(Bx) [C_1 I_n(px^C) + C_2 I_{-n}(px^C)] \quad (19)$$

### 3.3-FORMAS DAS FUNÇÕES DE BESSEL

As expressões matemáticas que dão origem às funções de Bessel podem ser vistas abaixo nas Eqs. (20-23):

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m+n}}{m! \Gamma(m+1+n)} \quad (20)$$

$$Y_n(x) = \begin{cases} \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} & n \neq 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{m \rightarrow n} \frac{J_m(x) \cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)} & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (21)$$

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2m}}{m! \Gamma(n+m+1)} \quad (22)$$

$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2 \sin(n\pi)} [I_{-n}(x) - I_n(x)] & n \neq 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{m \rightarrow n} \frac{\pi}{2 \sin(m\pi)} [I_{-m}(x) - I_m(x)] & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (23)$$

onde  $\Gamma$  é a função gama, que será definida posteriormente. O comportamento gráfico das Eqs. (20-23) pode ser visualizado nas Figs. (1-4), ou seja:

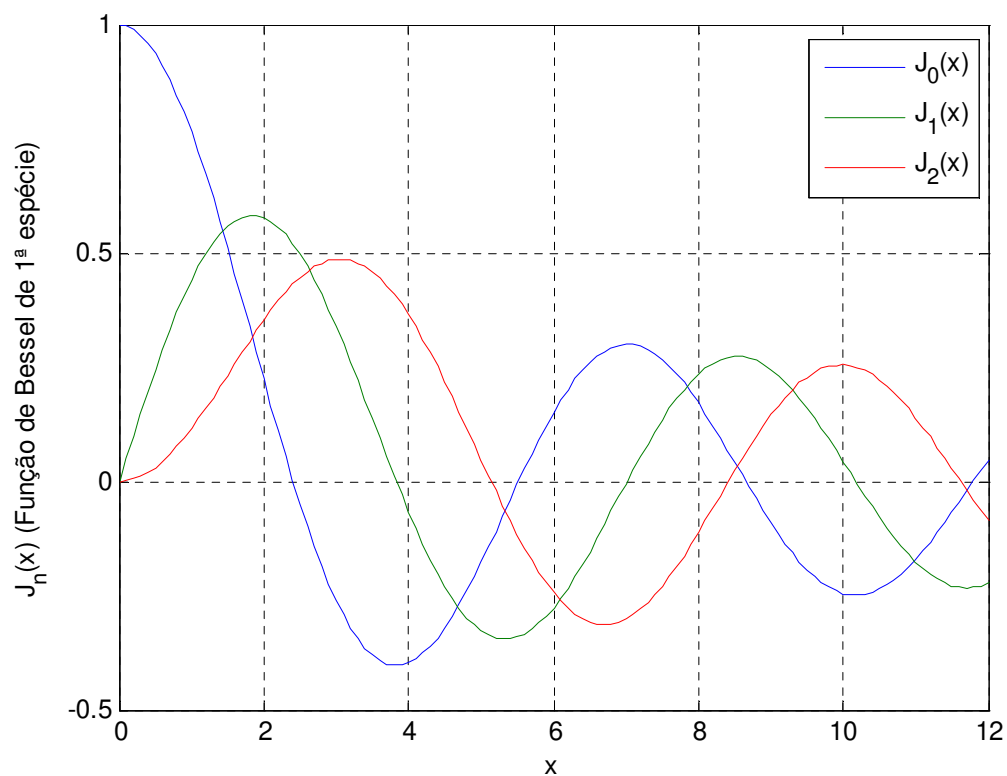


Figura 1 – Comportamento da função  $J_n(x)$ .

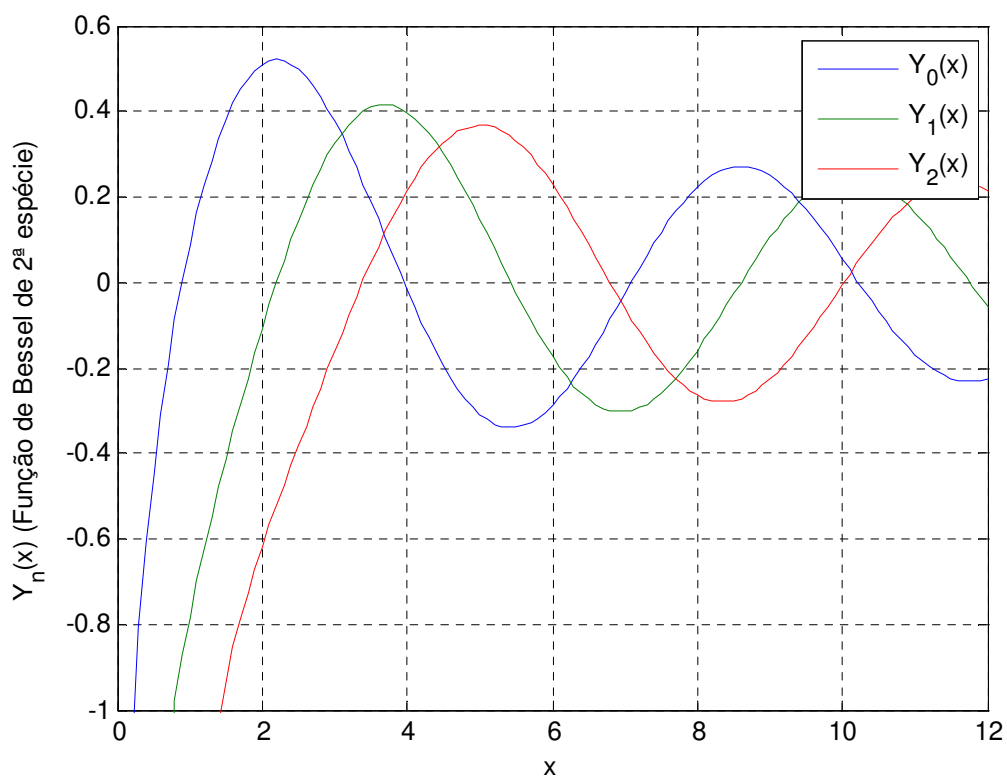


Figura 2 – Comportamento da função  $Y_n(x)$ .

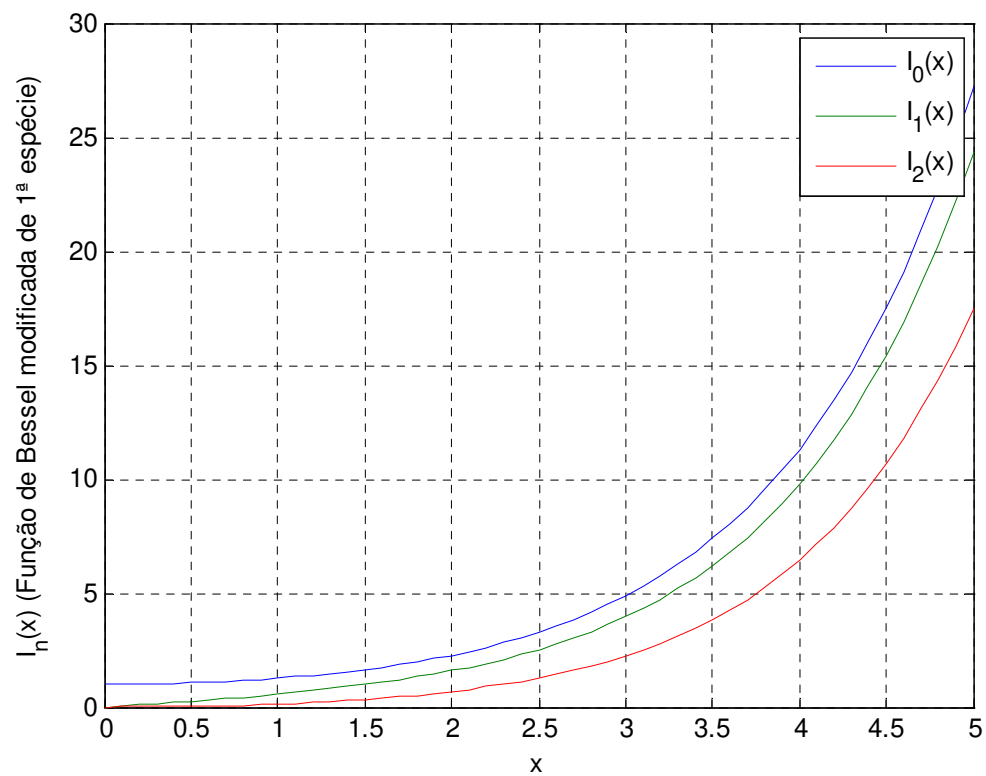


Figura 3 – Comportamento da função  $I_n(x)$ .

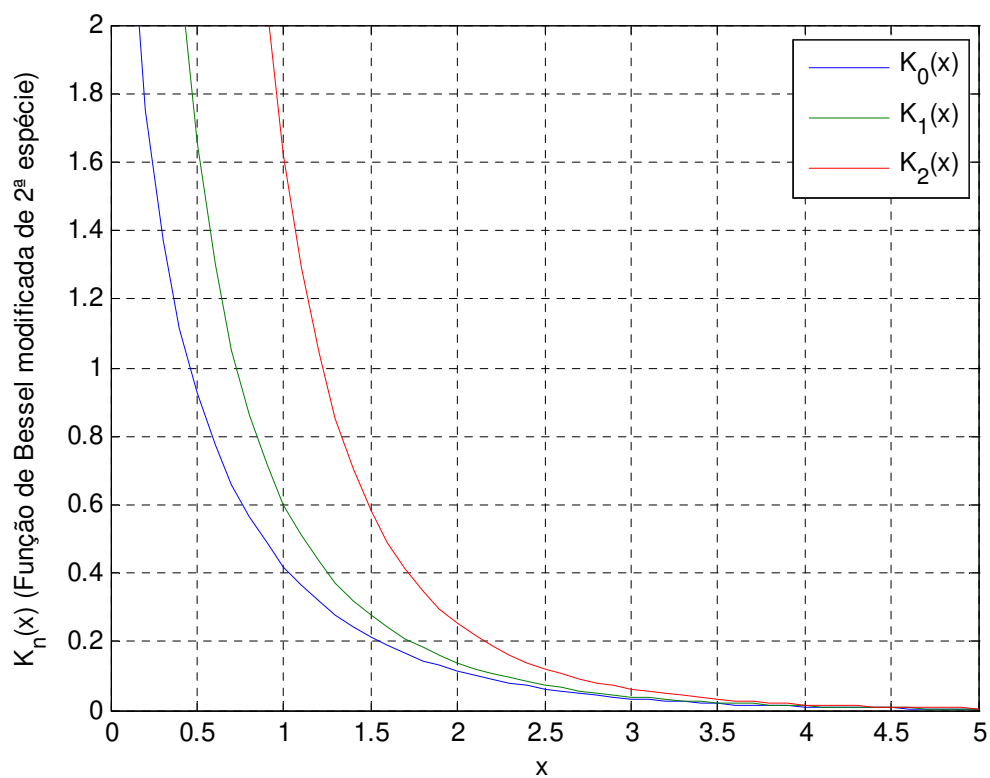


Figura 4 – Comportamento da função  $K_n(x)$ .

Observando o comportamento das curvas das Figs. (1-4) notam-se diversas tendências assintóticas, que são de grande auxílio na solução de problemas de condução térmica, especialmente na aplicação das condições de contorno. Por exemplo, da Fig. (1), tem-se que  $J_0(0)=1$  e  $J_0(\infty)=0$ . Entretanto, para ordens superiores,  $J_n(0)=0$  e  $J_n(\infty)=0$ . Outras tendências também podem ser verificadas para os gráficos das funções de Bessel  $Y_n(x)$ ,  $I_n(x)$  e  $K_n(x)$ . Um resumo desses resultados podem ser vistos na Tab. (2), que fornece valores práticos de funções de Bessel para alguns pontos de interesse:

Tabela 2 – Valores práticos das funções de Bessel.

| $x$      | $J_0(x)$ | $J_n(x)$ | $I_0(x)$ | $I_n(x)$ | $Y_n(x)$  | $K_n(x)$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|
| 0        | 1        | 0        | 1        | 0        | $-\infty$ | $\infty$ |
| $\infty$ | 0        | 0        | $\infty$ | $\infty$ | 0         | 0        |

### 3.4-FORMAS ESPECIAIS FECHADAS DAS FUNÇÕES DE BESSEL

São casos especiais onde a ordem  $n$  tem a forma:

$$n = \frac{\text{inteiro não múltiplo de 2}}{2} \quad (24)$$

Nesse caso, as funções  $J_{1/2}(x)$  e  $J_{-1/2}(x)$  podem ser representadas como:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (25)$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (26)$$

Funções de Bessel de ordem  $3/2, 5/2, 7/2, \dots$ , são determinadas a partir das Eqs. (25-26) e a partir da seguinte fórmula de recorrência:

$$J_{k+1/2}(x) = \frac{2k-1}{x} J_{k-1/2}(x) - J_{k-3/2}(x) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

De maneira similar, funções de Bessel modificadas para  $n=1/2$  tem as seguintes formas:

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh x \quad (28)$$

$$I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cosh x \quad (29)$$

Funções de Bessel modificadas de ordem  $3/2, 5/2, 7/2, \dots$ , são determinadas a partir das Eqs. (28-29) e a partir da seguinte fórmula de recorrência:

$$I_{k+1/2}(x) = -\frac{2k-1}{x} I_{k-1/2}(x) + I_{k-3/2}(x) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

### 3.5-RELAÇÕES ESPECIAIS PARA $n = 1, 2, 3, \dots$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (31)$$

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \quad (32)$$

$$I_{-n}(x) = I_n(x) \quad (33)$$

$$K_{-n}(x) = K_n(x) \quad (34)$$

### 3.6-DERIVADAS E INTEGRAIS DE FUNÇÕES DE BESSEL

Nas próximas expressões, o símbolo  $Z_n$  representa uma função de Bessel de ordem  $n$ .

$$\frac{d}{dx}[x^n Z_n(mx)] = \begin{cases} mx^n Z_{n-1}(mx) & Z = J, Y, I \\ -mx^n Z_{n-1}(mx) & Z = K \end{cases} \quad (35)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} Z_n(mx)] = \begin{cases} -mx^{-n} Z_{n+1}(mx) & Z = J, Y, K \\ mx^{-n} Z_{n+1}(mx) & Z = I \end{cases} \quad (36)$$

$$\frac{d}{dx}[Z_n(mx)] = \begin{cases} mZ_{n-1}(mx) - \frac{n}{x} Z_n(mx) & Z = J, Y, I \\ -mZ_{n-1}(mx) - \frac{n}{x} Z_n(mx) & Z = K \end{cases} \quad (37)$$

$$\frac{d}{dx}[Z_n(mx)] = \begin{cases} -mZ_{n+1}(mx) + \frac{n}{x} Z_n(mx) & Z = J, Y, K \\ mZ_{n+1}(mx) + \frac{n}{x} Z_n(mx) & Z = I \end{cases} \quad (38)$$

$$\int x^n Z_{n-1}(mx) dx = \left(\frac{1}{m}\right) x^n Z_n(mx) \quad Z = J, Y, I \quad (39)$$

$$\int x^{-n} Z_{n+1}(mx) dx = -\left(\frac{1}{m}\right) x^{-n} Z_n(mx) \quad Z = J, Y, K \quad (40)$$

### 3.7-INTEGRAIS NORMALIZADAS DE BESSEL

A aplicação da ortogonalidade leva a integrais envolvendo as funções características de um problema. Uma integral comum que surge quando as funções características são funções de Bessel tem a seguinte forma:

$$N_m = \int_0^{r_0} r J_n^2(\lambda_n r) dr \quad (41)$$

onde  $N_m$  é chamada de integral de normalização. O valor dessa integral depende da forma das condições de contorno homogêneas que levam a equação característica. A Tab. (3) fornece  $N_m$  para cilindros sólidos, correspondente às três condições de contorno em  $r = r_o$ , dadas pelas Eqs. (18-20) do Capítulo 5. O número de Biot da Tab. (3) é definido como  $Bi = hr_o/k$ .

Tabela 3 – Integrais normalizadas para cilindros sólidos.

| Condição de contorno em $r_o$                              | $N_m = \int_0^{r_o} r J_n^2(\lambda_n r) dr$                                     |
|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $J_n(\lambda_n r_o) = 0$                                   | $\frac{r_o^2}{2\lambda_n^2} \left[ \frac{dJ_n(\lambda_n r_o)}{dr} \right]^2$     |
| $\frac{dJ_n(\lambda_n r_o)}{dr} = 0$                       | $\frac{1}{2\lambda_n^2} [(\lambda_n r_o)^2 - n^2] J_n^2(\lambda_n r_o)$          |
| $-k \frac{dJ_n(\lambda_n r_o)}{dr} = h J_n(\lambda_n r_o)$ | $\frac{1}{2\lambda_n^2} [(Bi)^2 + (\lambda_n r_o)^2 - n^2] J_n^2(\lambda_n r_o)$ |

#### 4-ORTOGONALIDADE E FUNÇÕES ORTOGONAIS

A definição de ortogonalidade é a seguinte: considere duas sequências de funções  $\phi_m(x)$  e  $\phi_n(x)$ , onde  $m=1,2,3,\dots, n=1,2,3,\dots$ . Se:

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) w(x) dx \begin{cases} = 0 & m \neq n \\ \neq 0 & m = n \end{cases} \quad (42)$$

então as funções  $\phi_m(x)$  e  $\phi_n(x)$  são ortogonais na região  $[a,b]$  com relação a uma função peso  $w(x)$ . Vale a pena mencionar que a função seno, a função cosseno, funções de Bessel de primeira espécie e funções de Bessel de segunda espécie são ortogonais sob certas condições. Essa condição é que ambas as condições de contorno nos limites do intervalo de integração  $[a,b]$  na Eq. (42) precisam ser homogêneas da forma mostrada mais à frente nas Eqs. (44-45). Por outro lado, exponenciais, senos e cossenos

hiperbólicos e funções modificadas de Bessel de primeira e segunda espécies não são ortogonais.

Para mostrar que a propriedade da ortogonalidade depende da homogeneidade das condições de contorno na direção na qual a integração da Eq. (42) é realizada, será apresentado o seguinte teorema.

**Teorema.** Considere a equação diferencial:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\phi}{dx} \right] + [q(x) + \lambda^2 w(x)] \phi = 0 \quad (43)$$

onde  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $w(x)$  são contínuas no intervalo  $a \leq x \leq b$ . Se  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  são valores distintos do parâmetro  $\lambda$  na qual soluções não triviais da Eq. (43),  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$  existem tendo derivadas contínuas e satisfazendo as condições de contorno:

$$A\phi(a) + B \left( \frac{d\phi}{dx} \right)_{x=a} = 0 \quad (44)$$

$$C\phi(b) + D \left( \frac{d\phi}{dx} \right)_{x=b} = 0 \quad (45)$$

onde  $A, B, C$  e  $D$  são constantes tais que  $A$  e  $B$  não são ambas zero e  $C$  e  $D$  não são ambas zero, as sequências de funções  $\phi_m(x)$ ,  $m=1,2,3,\dots$  e  $\phi_n(x)$ ,  $n=1,2,3,\dots$  são ortogonais com relação a função peso  $w(x)$  sobre a integral no intervalo  $[a,b]$ .

**Prova.** Antes de começar a prova vale a pena salientar que as Eqs. (44-45) são condições de contorno homogêneas. Fazendo referência à condução de calor elas são condições de contorno convectivas do tipo  $\pm h\phi \pm k(d\phi/dx) = 0$ . No caso especial onde  $A = 0$  ou  $C = 0$ , essas condições de contorno tornam-se condições de contorno de isolamento ou simetria ( $d\phi/dx = 0$ ). De maneira similar, se  $B = 0$  ou  $D = 0$ , as Eqs. (44-45) tornam-se condições de contorno de temperatura zero ( $\phi = 0$ ). Tendo dito isso, vamos assumir que  $\phi_m$  e  $\phi_n$  são duas soluções distintas da Eq. (43) correspondendo a valores distintos  $\lambda_m$  e  $\lambda_n$  do parâmetro  $\lambda$ . Portanto, eles satisfazem a Eq. (43), ou seja:

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\phi_m}{dx} \right) + (q + \lambda_m^2 w) \phi_m = 0 \quad (46)$$

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\phi_n}{dx} \right) + (q + \lambda_n^2 w) \phi_n = 0 \quad (47)$$

Multiplicando a Eq. (46) por  $\phi_n$ , a Eq. (47) por  $\phi_m$  e subtraindo as equações resultantes obtêm-se:

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) w \phi_m \phi_n = \phi_m \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\phi_n}{dx} \right) - \phi_n \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\phi_m}{dx} \right) \quad (48)$$

Adicionando e subtraindo a expressão  $p(d\phi_n/dx)(d\phi_m/dx)$  no lado direito da Eq. (48), obtêm-se:

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) p \phi_m \phi_n = \frac{d}{dx} \left[ p \left( \phi_m \frac{d\phi_n}{dx} - \phi_n \frac{d\phi_m}{dx} \right) \right] \quad (49)$$

Integrando ambos os lados da Eq. (49) de  $x = a$  a  $x = b$  resulta em:

$$\begin{aligned} (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_a^b w \phi_m \phi_n dx &= \left[ p \left( \phi_m \frac{d\phi_n}{dx} - \phi_n \frac{d\phi_m}{dx} \right) \right]_a^b \\ &= p(b) \left[ \phi_m(b) \left( \frac{d\phi_n}{dx} \right)_{x=b} - \phi_n(b) \left( \frac{d\phi_m}{dx} \right)_{x=b} \right] - p(a) \left[ \phi_m(a) \left( \frac{d\phi_n}{dx} \right)_{x=a} - \phi_n(a) \left( \frac{d\phi_m}{dx} \right)_{x=a} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

Para continuar, vamos considerar a condição de contorno dada pela Eq. (45), a qual é satisfeita por ambos  $\phi_m$  e  $\phi_n$ :

$$C \phi_m(b) + D \left( \frac{d\phi_m}{dx} \right)_{x=b} = 0 \quad (51)$$

$$C\phi_n(b) + D\left(\frac{d\phi_n}{dx}\right)_{x=b} = 0 \quad (52)$$

Multiplicando a Eq. (51) por  $\phi_n$ , a Eq. (52) por  $\phi_m$  e subtraindo as equações resultantes obtém-se:

$$\phi_m(b)\left(\frac{d\phi_n}{dx}\right)_{x=b} - \phi_n(b)\left(\frac{d\phi_m}{dx}\right)_{x=b} = 0 \quad (53)$$

A Eq. (53) prova que o primeiro termo entre colchetes no lado direito da Eq. (50) é igual à zero. Utilizando a condição de contorno dada pela Eq. (44) e fazendo um procedimento similar, pode ser mostrado facilmente que o segundo termo entre colchetes no lado direito da Eq. (50) também é igual à zero. De acordo com esses resultados, obtém-se que:

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_a^b \phi_m \phi_n w(x) dx = 0 \quad (54)$$

Como  $m \neq n$ , a Eq. (54) prova que:

$$m \neq n: \quad \int_a^b \phi_m \phi_n w(x) dx = 0 \quad (55)$$

e o teorema da ortogonalidade está estabelecido. A Eq. (43) para  $p(x)=1$ ,  $q(x)=0$  e  $w(x)=1$ , se torna uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes do tipo  $X'' + \lambda^2 X = 0$  ou  $Y'' + \lambda^2 Y = 0$  que aparecem frequentemente em problemas de condução de calor. Essa equação possui solução geral em termos das funções seno e cosseno. Claramente, então, como mostrado no teorema acima, essas funções são ortogonais, desde que as condições de contorno sejam homogêneas da forma mostrada nas Eqs. (44-45). Essa é a razão pela qual a separação de variáveis deve ser realizada de tal maneira que os senos e os cossenos (funções ortogonais em potencial) apareçam na solução correspondente à direção ( $x$  ou  $y$ ) com as duas condições de contorno homogêneas.

Para  $p(x) = x$ ,  $q(x) = x$  e  $w(x) = -n^2/x$  pode ser facilmente mostrado que a Eq. (43) se torna a equação de Bessel:

$$(\lambda x)^2 \frac{d^2 \theta}{d(\lambda x)^2} + (\lambda x) \frac{d\theta}{d(\lambda x)} + [(\lambda x)^2 - n^2] \theta = 0 \quad (56)$$

que tem uma solução geral em termos de funções de Bessel de ordem  $n$  e argumento  $(\lambda x)$ . Por isso, como mostrado no teorema acima, a separação de variáveis em coordenadas cilíndricas deve ser realizada tal que se ambas as condições de contorno na direção radial são homogêneas da forma mostrada nas Eqs. (44-45), a solução da equação na direção radial é em termos de funções de Bessel. Essas funções, acompanhadas por condições de contorno homogêneas, possuem a propriedade da ortogonalidade.

Por outro lado, se a direção com duas condições de contorno homogêneas é a direção radial em um problema de condução de calor em coordenadas cilíndricas, a separação de variáveis deve ser realizada tal que funções ortogonais (senos e cossenos) são obtidas nessa direção, enquanto funções modificadas de Bessel, que não são ortogonais, são obtidas na direção radial.

## 5-FUNÇÃO ERRO E FUNÇÃO ERRO COMPLEMENTAR

A função erro (também conhecida como função erro de Gauss) é definida como:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta \quad (57)$$

Pode ser mostrado que para baixos valores do argumento  $x$ :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \dots \right) \quad (58)$$

Além disso, as seguintes relações matemáticas podem ser úteis:

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x) \quad (59)$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0 \quad (60)$$

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1 \quad (61)$$

A primeira derivada de função erro de  $x$  com relação a  $x$  é escrita como:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (62)$$

A integral da função erro de  $x$  com relação a  $x$  é escrita como:

$$\int \operatorname{erf}(x) dx = x \operatorname{erf}(x) + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \quad (63)$$

A função erro complementar é definida como:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\eta^2} d\eta \quad (64)$$

Portanto, com base nas Eqs. (58), (60-61) e para baixos valores de  $x$ :

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right) \quad (65)$$

$$\operatorname{erfc}(0) = 1 \quad (66)$$

$$\operatorname{erfc}(\infty) = 0 \quad (67)$$

Na Fig. (5) podem ser vistas as variações das funções erro e erro complementar  $\operatorname{erf}(x)$  e  $\operatorname{erfc}(x)$  na forma gráfica.

## 6-FUNÇÃO GAMA

A função gama é de grande importância na teoria de probabilidades, em problemas de física, matemática e de engenharia. A função gama é definida para  $x > 0$  como sendo:

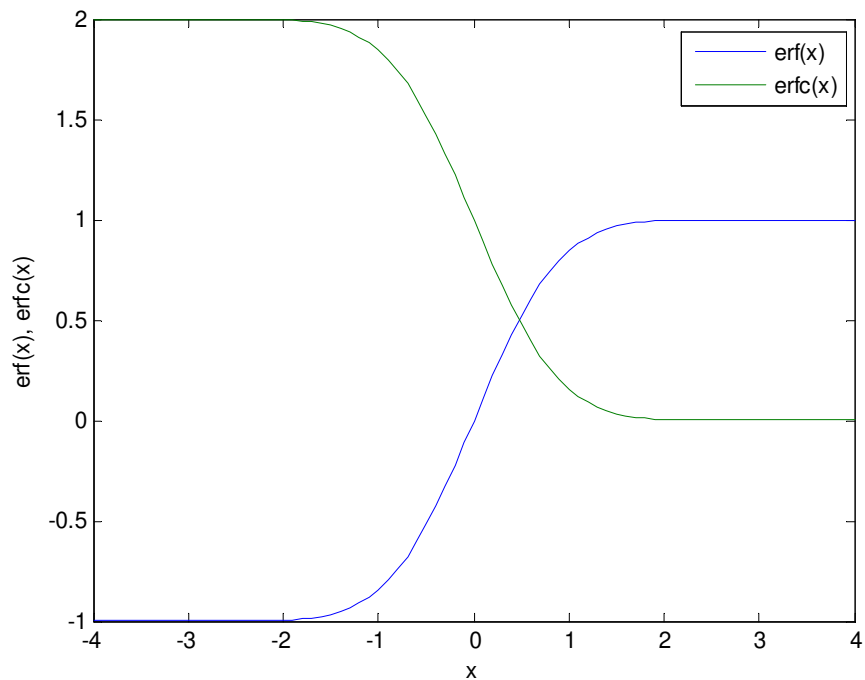


Figura 5 – Comportamento das funções  $\text{erf}(x)$  e  $\text{erfc}(x)$ .

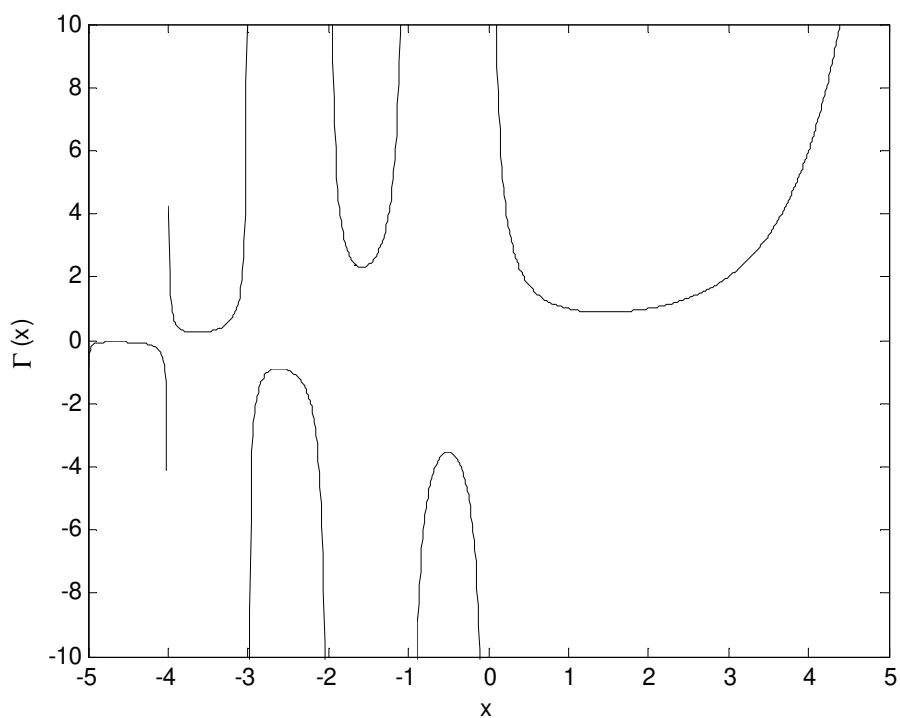


Figura 6 – Comportamento da função  $\Gamma(x)$ .

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} k^{x-1} e^{-k} dk \quad (68)$$

Já para  $x < 0$  a função gama é definida como sendo:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad (69)$$

Na Fig. (6) pode ser visto o comportamento da função gama  $\Gamma(x)$  na forma gráfica.

## 7-FUNÇÃO INTEGRAL EXPONENCIAL

A definição da função integral exponencial é:

$$\text{Ei}(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad (70)$$

Para pequenos valores de  $x$  a função integral exponencial pode ser aproximada por:

$$\text{Ei}(x) = -\gamma - \ln(x) + \left( \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \dots \right) \quad (71)$$

onde  $\gamma = 0,5772\dots$  é a constante de Euler. Além disso, as seguintes relações matemáticas podem ser úteis:

$$\text{Ei}(x) = -\text{Ei}(-x) \quad (72)$$

$$\text{Ei}(\infty) = 0 \quad (73)$$

$$\text{Ei}(0) = \infty \quad (74)$$

Na Fig. (7) pode ser visto o comportamento da função gama  $Ei(x)$  na forma gráfica:

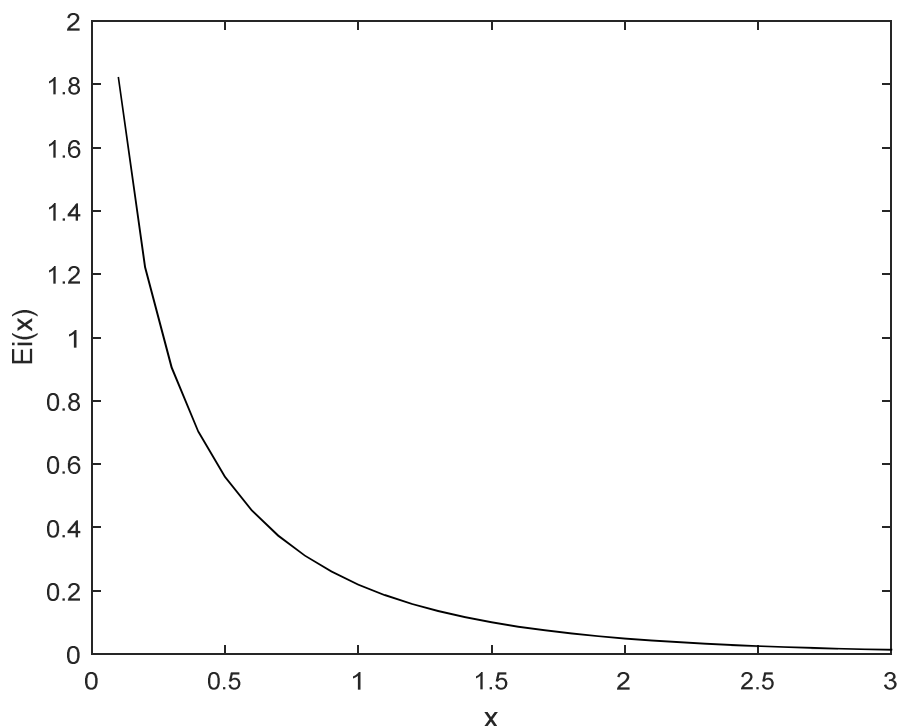


Figura 7 – Comportamento da função  $Ei(x)$ .

## 8-EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE LEGENDRE

A equação diferencial ordinária:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad (75)$$

é conhecida como equação diferencial de Legendre, com  $n$  sendo chamado de grau. A solução geral da Eq. (75) é escrita como:

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x) \quad (76)$$

onde as funções  $P_n(x)$  são chamadas de polinômios de Legendre de primeira espécie e as funções  $Q_n(x)$  são chamadas de polinômios de Legendre de segunda espécie.

Os polinômios  $P_n(x)$  e  $Q_n(x)$  são dados pelas seguintes expressões:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (77)$$

Se  $n$  é um número par e  $|x| < 1$ :

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{n/2} 2^n [(n/2)!]^2}{n!} \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right] \quad (78)$$

Se  $n$  é um número ímpar e  $|x| < 1$ :

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{(n+1)/2} (2^{n-1}) \{[(n-1)/2]!\}^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n} \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right] \quad (79)$$

De particular interesse na solução de problemas de condução é a propriedade da ortogonalidade dos polinômios de Legendre  $P_n(x)$  na região  $-1 < x < 1$  com uma função peso unitária, ou seja:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{se } m = n \end{cases} \quad (80)$$

Além disso, as seguintes expressões são usualmente utilizadas:

$$Q_n(x = \pm 1) \rightarrow \infty \quad (81)$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad (82)$$

$$\frac{d}{dx} [P_{n+1}(x)] - \frac{d}{dx} [P_{n-1}(x)] = 2(n+1) P_n(x) \quad (83)$$

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \frac{P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)}{2n+1} \quad (84)$$

Nas Figs. (8-9) podem ser visualizados os comportamentos dos polinômios  $P_n(x)$  e  $Q_n(x)$ , respectivamente:

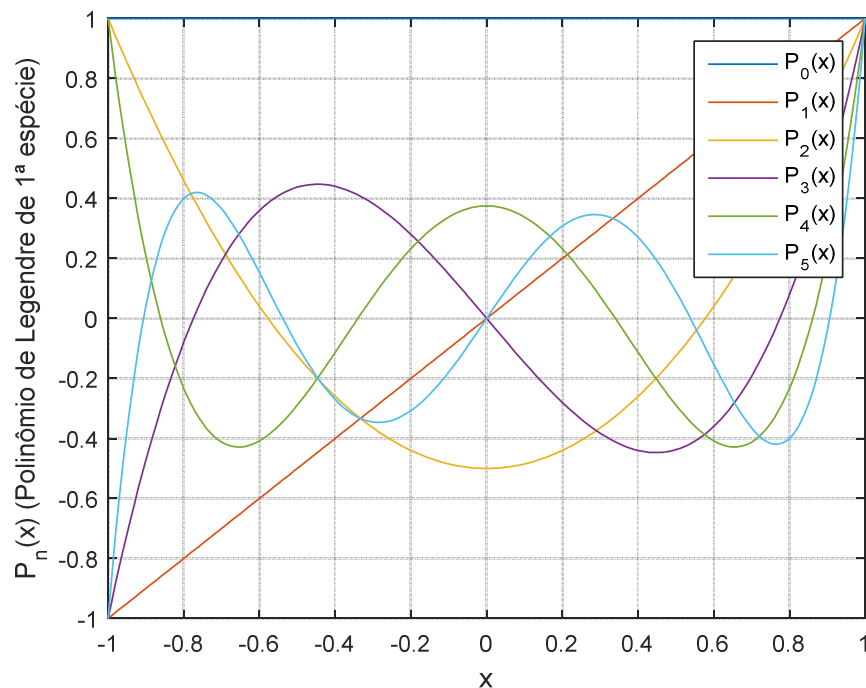


Figura 8 – Comportamento do polinômio  $P_n(x)$ .

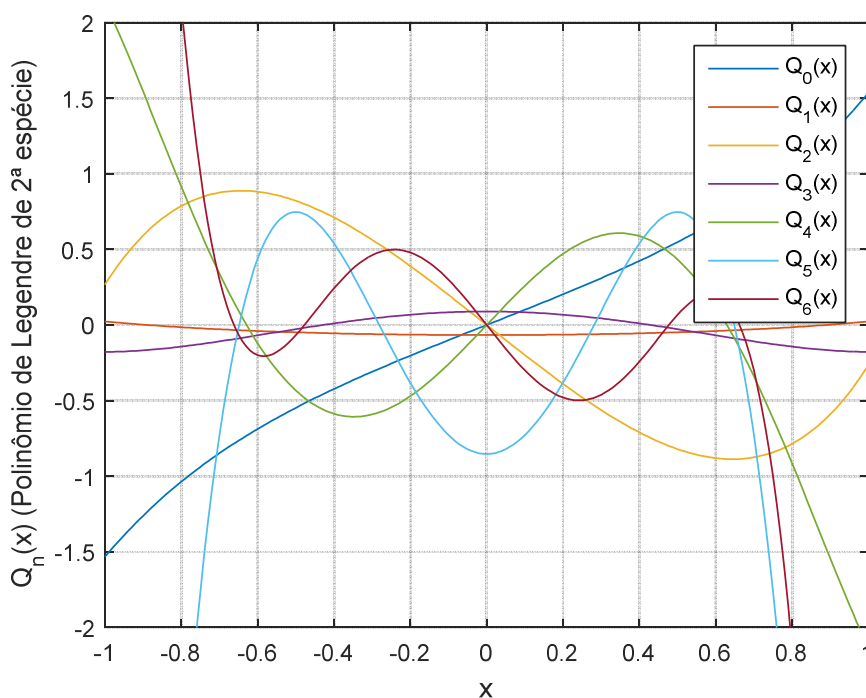


Figura 9 – Comportamento do polinômio  $Q_n(x)$ .

A equação diferencial ordinária:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (85)$$

é chamada de equação diferencial associada de Legendre. Note que para  $m=0$  a Eq. (85) se reduz a Eq. (75). A solução geral da Eq. (85) é escrita como:

$$y = C_1 P_n^m(x) + C_2 Q_n^m(x) \quad (86)$$

onde as funções  $P_n^m(x)$  são chamadas de polinômios associados de Legendre de primeira espécie e as funções  $Q_n^m(x)$  são chamadas de polinômios associados de Legendre de segunda espécie.

As funções  $P_n^m(x)$  e  $Q_n^m(x)$  são dadas pelas seguintes expressões:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} [P_n(x)] \quad (87)$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} [Q_n(x)] \quad (88)$$

De particular interesse na solução de problemas de condução é a propriedades da ortogonalidade dos polinômios associados de Legendre  $P_n^m(x)$  na região  $-1 < x < 1$  com uma função peso unitária, ou seja:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{se } m = n \end{cases} \quad (89)$$

Além disso, as seguintes expressões são usualmente utilizadas:

$$P_n^m(x) = 0 \quad \text{para } m > n \quad (90)$$

$$Q_n^m(x \pm 1) \rightarrow \infty \quad (91)$$

Nas Figs. (10-13) podem ser visualizados os comportamentos dos polinômios  $P_n^1(x)$ ,  $P_n^2(x)$ ,  $Q_n^1(x)$  e  $Q_n^2(x)$ , respectivamente:

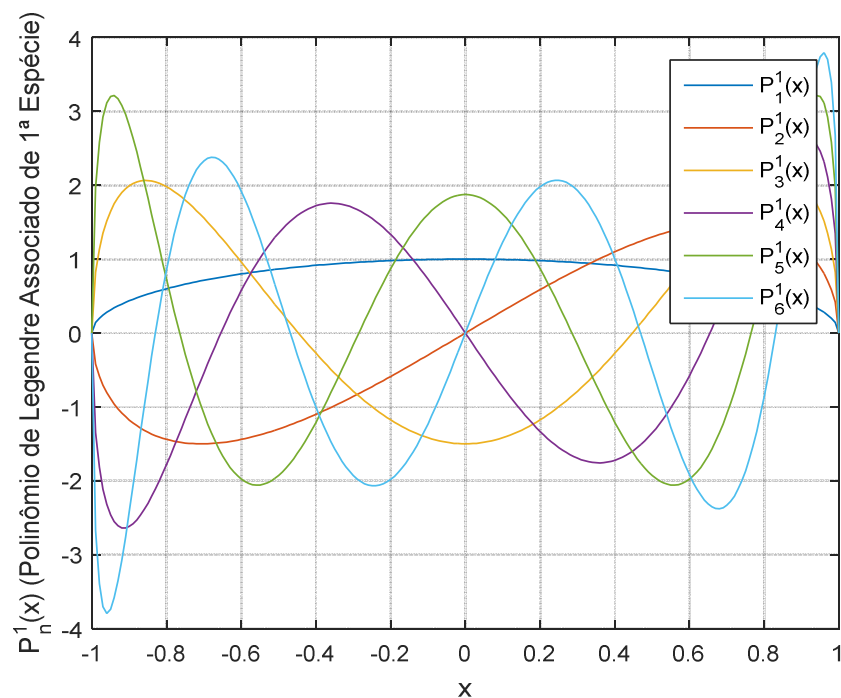


Figura 10 – Comportamento dos polinômios  $P_n^1(x)$ .

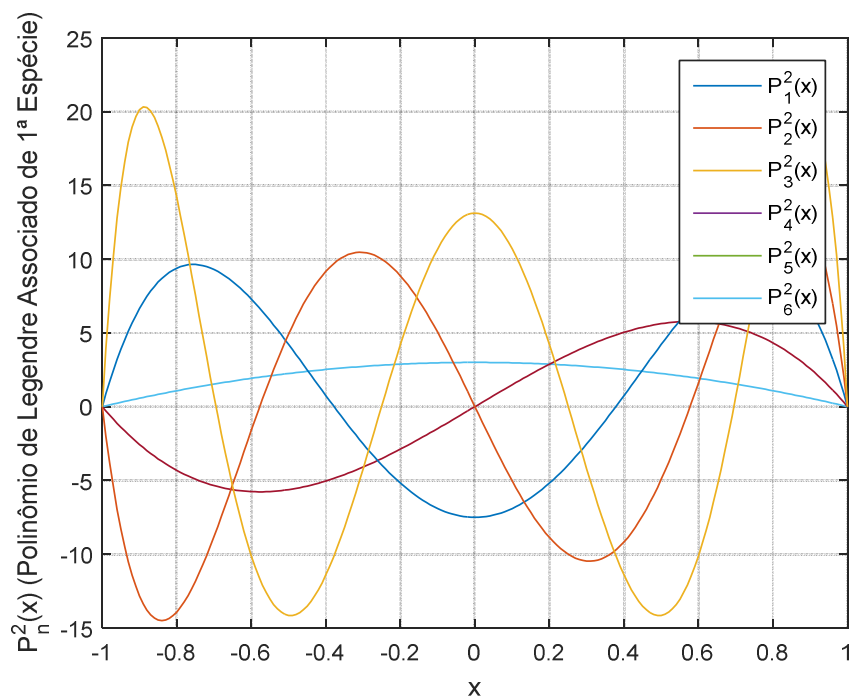


Figura 11 – Comportamento dos polinômios  $P_n^2(x)$ .

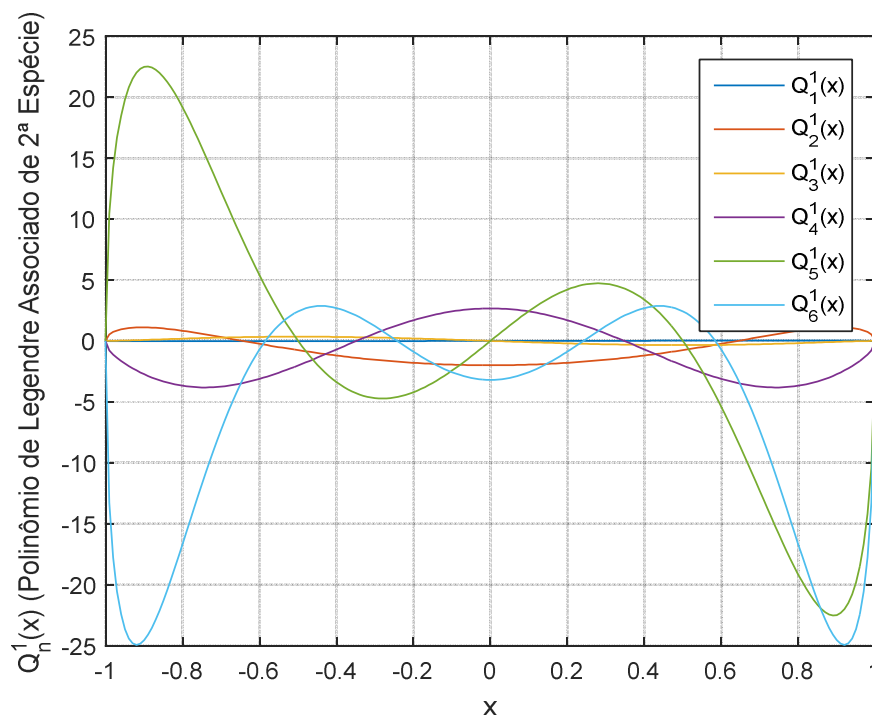


Figura 12 – Comportamento dos polinômios  $Q_n^1(x)$ .

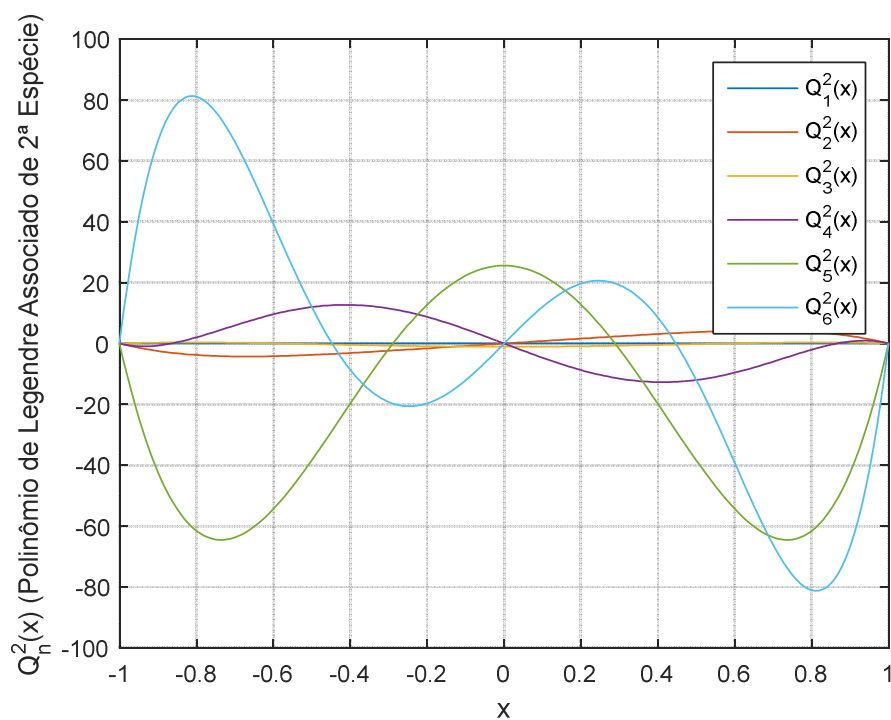


Figura 13 – Comportamento dos polinômios  $Q_n^2(x)$ .

Mais informações sobre a equação diferencial de Legendre, sobre os polinômios de Legendre e também sobre os polinômios associados de Legendre podem ser encontradas em literatura especializada.