UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru
Faculdade de Engenharia de Bauru

APÊNDICE A – EQUAÇÕES DE TRANSFERÊNCIA POR CONVECÇÃO

Prof. Dr. Santiago del Rio Oliveira

A.1 DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA

- Se a conservação da energia for aplicada a um volume de controle diferencial em um fluido em movimento, os efeitos do movimento do fluido (advecção) sobre a transferência de energia através das superfícies do volume de controle devem ser necessariamente consideradas, em conjunto com os efeitos da condução.

- A equação diferencial resultante fornece a base para a previsão da distribuição de temperaturas, requerendo o conhecimento do campo de velocidades.

- Esse campo deve ser determinado pela solução das equações diferenciais da conservação da massa e da segunda lei de Newton do movimento em um volume de controle diferencial.

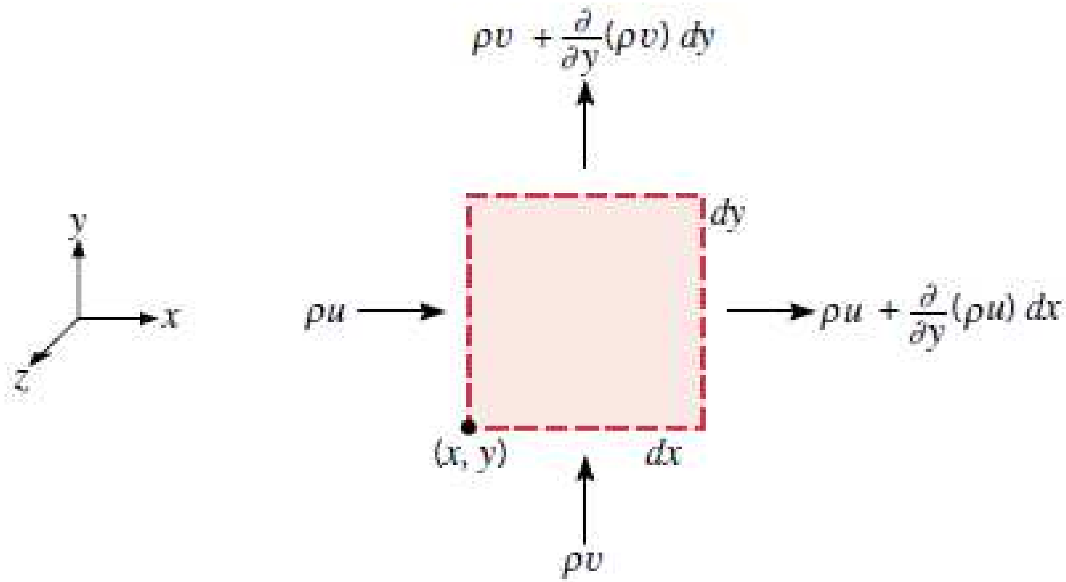
- As condições para simplificar as deduções são de escoamento bidimensional em regime estacionário nas direções x e y num volume de controle diferencial com profundidade unitária $(dx.dy.1)$.

- Objetivos: deduzir equações diferenciais para prever os campos de velocidades e de temperaturas no interior do fluido.

A.1.1 Conservação da massa

- Matéria não pode ser criada ou destruída. Em regime estacionário: taxa líquida de entrada de massa no volume de controle (entrada – saída) deve ser igual a zero.

- Massa entra e sai do volume de controle pelo movimento global do fluido (advecção).



Volume de controle diferencial $(dx.dy.1)$ para a conservação de massa em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso

- Taxa à qual a massa entra no volume de controle perpendicular a x (kg/s):

$$(\rho u)(dy.1) = (\rho u)dy$$

- Taxa à qual a massa sai do volume de controle perpendicular a x (kg/s):

$$(\rho u)dy + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dxdy = \left[(\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right] dy$$

- Taxa à qual a massa entra no volume de controle perpendicular a *y* (kg/s):

$$(\rho v)(dx.1) = (\rho v)dx$$

- Taxa à qual a massa sai do volume de controle perpendicular a *y* (kg/s):

$$(\rho v)dx + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dydx = \left[(\rho v) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]dx$$

- Conservação da massa:

$$(\rho u)dy + (\rho v)dx - \left[(\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dy - \left[(\rho v) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]dx = 0$$

- Simplificando a equação acima e dividindo por $dxdy$ obtém-se:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

- A equação acima deve ser satisfeita para todos os pontos do interior do fluido.
- A equação acima se aplica a um fluido composto por uma única espécie, assim como em misturas nas quais podem estar ocorrendo a difusão de espécies.
- Se o fluido por incompressível, ρ é constante e a equação acima torna-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

A.1.2 Segunda lei do movimento de Newton

- A soma de todas as forças que atuam sobre o volume de controle deve ser igual à taxa líquida à qual o momento deixa o volume de controle (saída – entrada).

- Dois tipos de forças podem atuar sobre o fluido: forças de corpo (proporcionais ao volume) e forças de superfície (proporcionais a área).

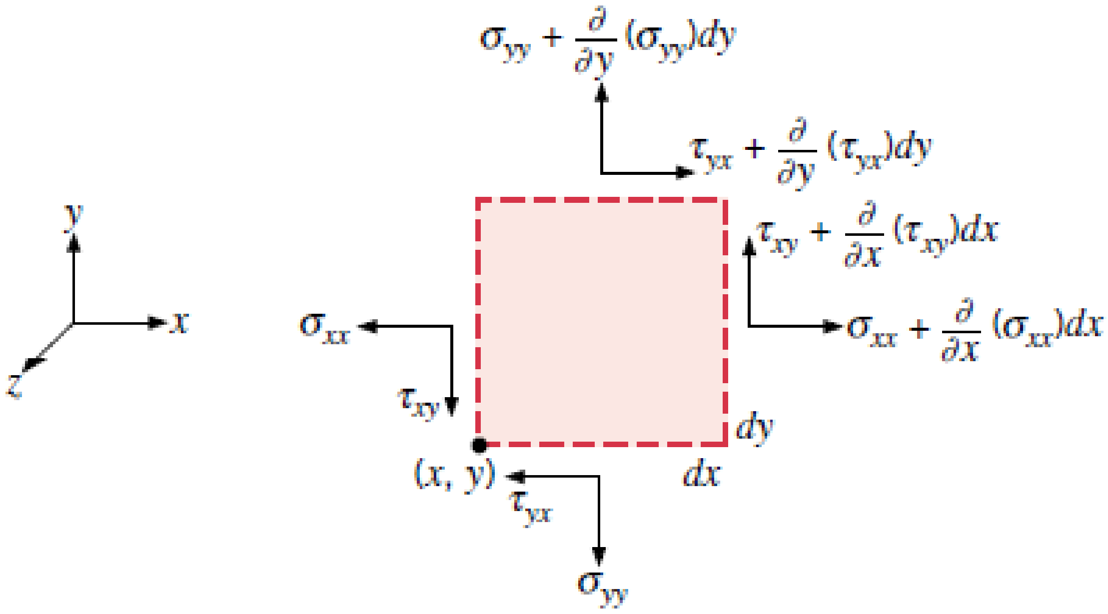
- Forças de corpo: campos gravitacional, centrífugos, magnéticos, elétricos. Designamos por X e Y as componentes nas direções x e y.

- Forças de superfície: pressão estática dos fluidos, tensões viscosas.

- A tensão viscosa pode ser decomposta em dois componentes perpendiculares (a tensão normal σ_{ii} e a tensão de cisalhamento τ_{ij}).

- Notação indicial: primeiro índice (orientação da superfície, fornecendo a direção da sua normal; segundo índice (direção da componente da força).

- As tensões viscosas normais são tensões de tração e as tensões viscosas que se originam da pressão estática são tensões de compressão.



- Força resultante na direção *x* positivo (tensões normais, tensões viscosas e pressão estática):

$$F_{s,x+} = \left(\sigma_{xx}dy.1 + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dxdy.1\right) + \left(\tau_{yx}dx.1 + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dydx.1\right) + \left(pdy.1\right)$$

- Força resultante na direção *x* negativo (tensões normais, tensões viscosas e pressão estática):

$$F_{s,x-} = (\sigma_{xx} dy.1) + (\tau_{yx} dx.1) + \left(p dy.1 + \frac{\partial p}{\partial x} dx dy.1 \right)$$

- Força de superfície líquida na direção *x* $(F_{s,x+} - F_{s,x-})$:

$$F_{s,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx dy$$

- Força resultante na direção *y* positivo (tensões normais, tensões viscosas e pressão estática):

$$F_{s,y+} = \left(\sigma_{yy} dx.1 + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy dx.1 \right) + \left(\tau_{xy} dy.1 + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy.1 \right) + (p dx.1)$$

- Força resultante na direção *x* negativo (tensões normais, tensões viscosas e pressão estática):

$$F_{s,y-} = \left(\sigma_{yy} dx.1\right) + \left(\tau_{xy} dy.1\right) + \left(pdx.1 + \frac{\partial p}{\partial y} dydx.1\right)$$

- Força de superfície líquida na direção *y* $\left(F_{s,y+} - F_{s,y-}\right)$:

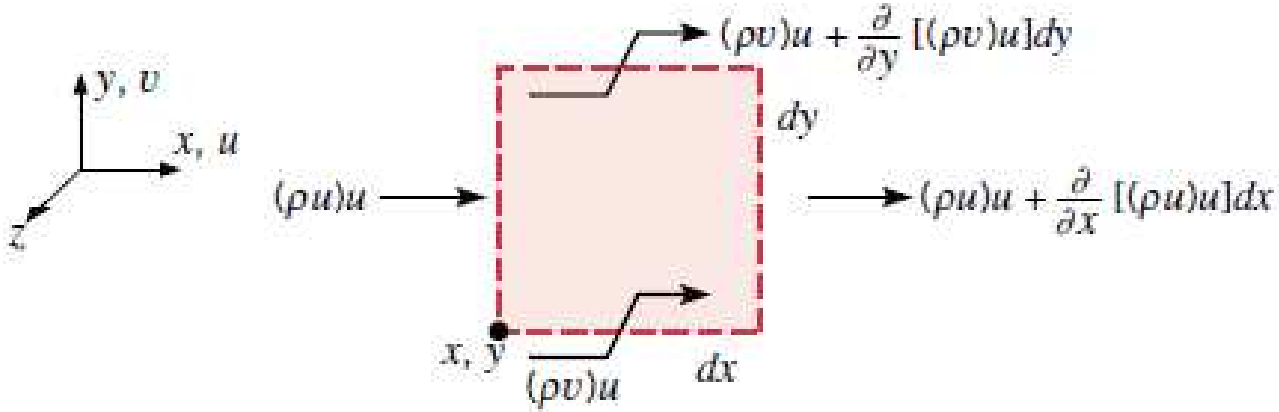
$$F_{s,y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

- Devemos avaliar as taxas de momento para o volume de controle em *x* e *y*.

1. Fluxo de massa através da superfície *x*: ρu $\frac{\text{kg}}{\text{s.m}^2}$

2. Fluxo de momento na direção *x* correspondente: $(\rho u)u \quad \dfrac{\text{kg}}{\text{s}^2.\text{m}}$

3. Taxa de momento na direção *x* correspondente: $(\rho u)u(dy.1) \quad \dfrac{\text{kg.m}}{\text{s}^2} = 1\text{N}$



- Taxa de momento em $x + dx$: $(\rho u)u(dy.1) + \dfrac{\partial[(\rho u)u]}{\partial x}dx(dy.1)$
- Taxa de momento em y: $(\rho v)u(dx.1)$

- Taxa de momento em $y+dy$: $(\rho v)u(dx.1)+\dfrac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y}dy(dx.1)$

- Taxa líquida à qual o momento na direção *x* sai do volume de controle:

$$(\rho u)u(dy.1)+\frac{\partial[(\rho u)u]}{\partial x}dx(dy.1)+(\rho v)u(dx.1)+\frac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y}dy(dx.1)$$
$$-(\rho u)u(dy.1)-(\rho v)u(dx.1)$$

$$\frac{\partial[(\rho u)u]}{\partial x}dx(dy)+\frac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y}dy(dx)$$

- De maneira similar na direção *y*, a taxa líquida à qual o momento na direção *y* sai do volume de controle é:

$$\frac{\partial[(\rho v)v]}{\partial y}dy(dx)+\frac{\partial[(\rho u)v]}{\partial x}dx(dy)$$

- A taxa de variação do componente do momento do fluido na direção *x* é igual a soma das forças que atuam na mesma direção *x*, ou seja:

$$\frac{\partial[(\rho u)u]}{\partial x}dx(dy)+\frac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y}dy(dx)=\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\right)dxdy+Xdxdy$$

- A expressão acima pode ser rearranjada efetuando as derivadas do lado esquerdo e substituindo a equação da conservação da massa, ou seja:

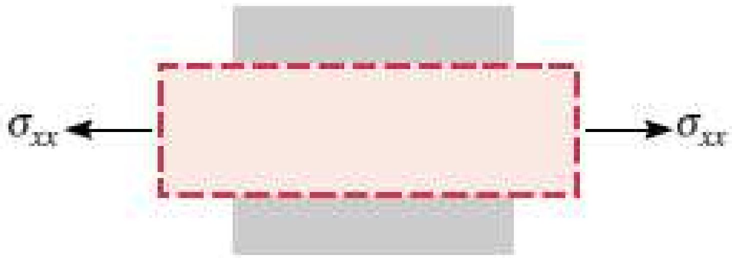
$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}-p)+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X \quad (2)$$

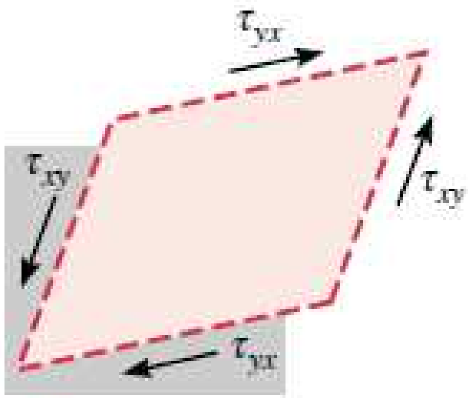
- Uma expressão similar pode ser obtida para direção *y*, tendo a forma:

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy}-p)+Y \quad (3)$$

- As equações (1), (2) e (3) podem ser resolvidas para fornecer o campo de velocidades.

- A tensão normal deve produzir uma deformação linear no fluido, enquanto que uma tensão de cisalhamento deve produzir uma deformação angular no fluido.





- Para que uma solução das equações (2) e (3) seja obtida, é necessário relacionar as tensões viscosas a viscosidade do fluido e aos gradientes de velocidades existentes no escoamento.

- Para o escoamento de um fluido Newtoniano, foi demonstrado que:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad \sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

- Substituindo essas expressões nas equações (2) e (3) obtém-se:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left[2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + X$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left[2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + Y$$

- As equações acima fornecem uma representação completa das condições em um escoamento viscoso bidimensional.

- O campo de velocidades pode ser determinado pela resolução dessas equações. Com isso, a tensão de cisalhamento na parede τ_s pode ser determinada.

- Para um fluido incompressível com viscosidade constante, e utilizando a equação (1) obtém-se:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+X \quad (4)$$

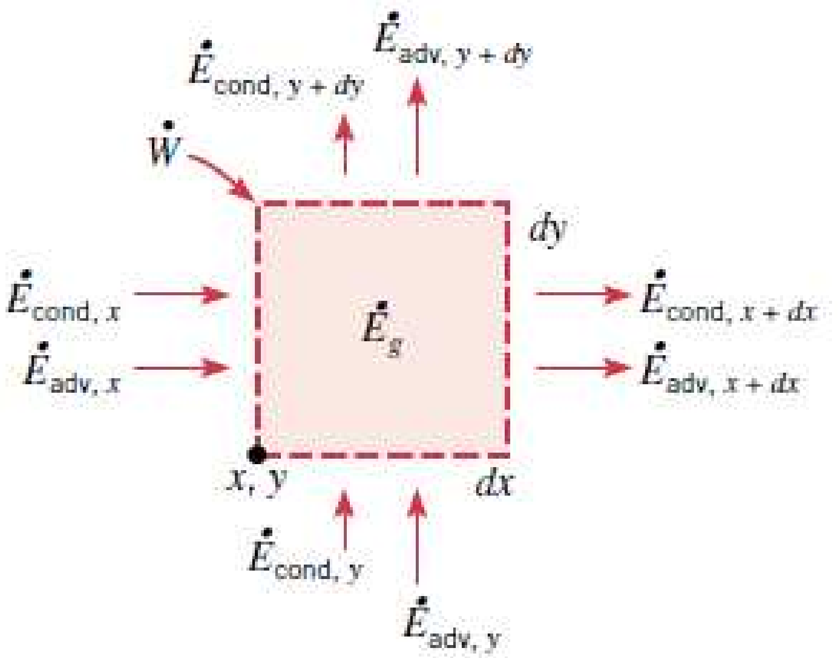
$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+Y \quad (5)$$

A.1.3 Conservação de energia

- Os efeitos da energia potencial serão tratados como trabalho efetuado pelas forças de corpo.

- A energia por unidade de massa do fluido inclui a energia interna térmica e a energia cinética $V^2/2$ onde $V^2 = u^2 + v^2$.

- As energias térmica e cinética são transportadas por advecção pelo movimento global do fluido através das superfícies de controle.



Volume de controle diferencial ($dx.dy.1$) para a conservação de energia em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso com transferência de calor.

- Taxa à qual energia entra no volume de controle em x:

$$\dot{E}_{adv,x} = \rho u\left(e+\frac{V^2}{2}\right)(dy.1)$$

- Taxa à qual energia sai do volume de controle em $x+dx$:

$$\dot{E}_{adv,x+dx} = \rho u\left(e+\frac{V^2}{2}\right)(dy.1)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]dx(dy.1)$$

- Taxa líquida à qual energia entra no volume de controle em x:

$$\dot{E}_{adv,x}-\dot{E}_{adv,x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]dxdy \quad (6)$$

- Taxa à qual energia entra no volume de controle em y:

$$\dot{E}_{adv,y} = \rho v\left(e+\frac{V^2}{2}\right)(dx.1)$$

- Taxa à qual energia sai do volume de controle em $y+dy$:

$$\dot{E}_{adv,y+dy} = \rho v\left(e+\frac{V^2}{2}\right)(dx.1)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]dy(dx.1)$$

- Taxa líquida à qual energia entra no volume de controle em y:

$$\dot{E}_{adv,y}-\dot{E}_{adv,y+dy} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]dxdy \quad (7)$$

- Taxa à qual energia entra no volume de controle em x por condução:

$$\dot{E}_{cond,x} = -\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)(dy.1)$$

- Taxa à qual energia sai do volume de controle em $x+dx$ por condução:

$$\dot{E}_{cond,x+dx} = -\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)(dy.1) + \frac{\partial}{\partial x}\left[-\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right]dx(dy.1)$$

- Taxa líquida à qual energia entra no volume de controle em x por condução:

$$\dot{E}_{cond,x} - \dot{E}_{cond,x+dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dxdy \quad (8)$$

- Taxa à qual energia entra no volume de controle em y por condução:

$$\dot{E}_{cond,y} = -\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)(dx.1)$$

- Taxa à qual energia sai do volume de controle em $y+dy$ por condução:

$$\dot{E}_{cond,y+dy} = -\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)(dx.1) + \frac{\partial}{\partial y}\left[-\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]dy(dx.1)$$

- Taxa líquida à qual energia entra no volume de controle em y por condução:

$$\dot{E}_{cond,y} - \dot{E}_{cond,y+dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdy \quad (9)$$

- Taxa líquida à qual trabalho é efetuado sobre o fluido pelas forças na direção x:

$$\dot{W}_{liq,x} = (Xu)dxdy + \frac{\partial}{\partial x}[(\sigma_{xx} - p)u]dxdy + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u)dxdy \quad (10)$$

- Na direita, o primeiro termo é o trabalho efetuado pela força de corpo, o segundo termo o trabalho efetuado pelas forças de pressão e o terceiro termo o trabalho efetuado pelas forças viscosas.

- Taxa líquida à qual trabalho é efetuado sobre o fluido pelas forças na direção *y*:

$$\dot{W}_{liq,y} = (Yv)dxdy + \frac{\partial}{\partial y}[(\sigma_{yy} - p)v]dxdy + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}v)dxdy \quad (11)$$

- Das equações de (6) a (11), da exigência da conservação da energia obtém-se:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$+(Xu)+\frac{\partial}{\partial x}[(\sigma_{xx}-p)u]+\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u)+(Yv)+\frac{\partial}{\partial y}[(\sigma_{yy}-p)v]+\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}v)+\dot{q}=0 \quad (12)$$

- $\dot{q}$ é a taxa na qual a energia térmica é gerada por unidade de volume.

- A equação anterior representa a conservação das energias cinética e térmica, sendo raramente utilizada em transferência de calor.

- É mais conveniente trabalhar com a equação da energia térmica, obtida multiplicando as equações (2) e (3), respectivamente por u e v, e pela subtração dos resultados da equação (12). Após um pouco de algebra:

$$\rho u\frac{\partial e}{\partial x}+\rho v\frac{\partial e}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)-p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\Phi+\dot{q} \quad (13)$$

- $p(\partial u/\partial x+\partial v/\partial y)$ representa uma conversão reversível entre trabalho mecânico e energia térmica.

- $\mu\Phi$ é chamado de dissipação viscosa, definida como:

$$\mu\Phi = \mu\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\} \quad (14)$$

- A expressão acima indica: taxa à qual trabalho mecânico é irreversivelmente convertido em energia térmica devido aos efeitos viscosos no fluido.

- Para fluido incompressível, pode-se utilizar a equação (1) e além disso, $de = c_v dT$ com $c_v = c_p$ de tal forma que:

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\Phi+\dot{q} \qquad \text{e}$$

$$\mu\Phi = \mu\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\right\}$$

- A equação da energia térmica pode ser reescrita em termos da entalpia do fluido, $i = e + p/\rho$:

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \mu\Phi + \dot{q}$$

- Se o fluido for um gás perfeito, $di = c_p dT$ e a equação anterior torna-se:

$$\rho c_p\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \mu\Phi + \dot{q} \quad (15)$$